$\Theta K + \overline{KE}^2 = \overline{E\Theta}^2$. (λ) ἀλλ' $\overline{E\Theta}^2 = \overline{E\Gamma}^2$. (μ) ἄρα $\overline{E\Gamma}^2 = \Delta\Theta.\ \Theta K + \overline{KE}^2$. ἀλλ' $\overline{E\Gamma}^2 = \overline{\Gamma K}^2 + \overline{KE}^2$. (ν) ἄρα $\overline{\Gamma K}^2 + \overline{KE}^2 = \Delta\Theta.\ \Theta K + \overline{KE}^2$. τῶν ἴσων δὲ ἀφαιρεθέντων, ἔσται $\overline{\Gamma K}^2 = \Delta\Theta.\ \Theta K$. ἀλλὰ $\overline{\Gamma K}^2 = \overline{K\Delta}^2$. ἄρα $\overline{K\Delta}^2 = \Delta\Theta.\ \Theta K$. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι ὡς ΔΘ : ΔΚ :: ΔΚ : ΘΚ. (ξ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὸ Ἡμίτονον τοῦ 36° μοιρῶν τόξου εὑρεῖν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ τοῦ ἡμικυκλίου ΑΒΓΔ ἀνιστάσθω ἡ ΚΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΑΔ. καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΔ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθείσης τῆς ΕΓ, εἰλήφθω ἡ ΕΗ = ΕΓ. καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΓ, ἐφηρμόσθω εἰς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἡ ΑΒ = ΗΓ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἤχθω ἡ ΚΘ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΑ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ι. λέγω ὅτι ἡ ΒΘ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονόν ἐστιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΚΓ. σχ. 6.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΚΘ, ΑΚΘ αἱ μὲν πρὸς τῷ Θ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις, (ο) ἡ δὲ ΚΒΘ = ΚΑΒ, (π) ἡ δὲ ΚΘ κοινή. ἄρα καὶ ἡ ΒΚΘ, ἤτοι ἡ ΒΚΙ ἴση τῇ ΘΚΑ, εἴτουν τῇ ΙΚΑ. (ρ) ἔστι δὲ ὅλη ἡ ΒΚΑ ἴση μοίραις 72°. (ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ πλευρά ἐστι πενταγώνου κανονικοῦ, εἰς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐφηρμοσμένη, (σ) τὸ ΑΙΒ τόξον πεμπτημόριον τῆς ὅλης περιφερείας ἐστίν.) ἡ ἄρα ΒΚΙ

(λ) Κατὰ τὴν ς'. τοῦ β'. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. δῆλον. (ν) Κατὰ τὴν μζ'. τοῦ α'. (ξ) Κατὰ τὴν ις'. τοῦ ς'. (ο) Ἐκ τῆς κατασκ. (π) Κατὰ τὴν ς'. τοῦ α'. (ρ) Κατὰ τὴν κς'. τοῦ α'. (σ) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ.

ΒΚΙ γωνία ἡμίσεια ὄσα τῆς ΒΚΑ, ἴση ἐςὶ μοίραις 36°. ἀλλ' ἡ ΒΘ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐςι τȣ̃ ΒΙ τόξȣ. (τ) ἡ ΒΘ ἄρα τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐςι τȣ̃ 36° μοιρῶν τόξȣ.

Ἐπεὶ δὲ $\overline{\Gamma E}^2 = \overline{\Gamma K}^2 + \overline{KE}^2$, γνωςαὶ δὲ αἱ ΓΚ, ΚΕ, γνωςὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΕ. ἀλλ' ἡ ΓΕ = ΕΗ, (υ) γνωςὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΗ. γνωςὴ δὲ καὶ ἡ ΕΚ, ἄρα ϗ ἡ ΚΗ. ἐπεὶ δὲ $\overline{\Gamma H}^2 = \overline{\Gamma K}^2 + \overline{KH}^2$, γνωςὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΗ, ἤτȣν ἡ ΒΑ. γνωςὸν ἄρα καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, τȣτέςι τὸ ΒΘ Ἡμίτονον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Δοθέντος τȣ̃ Ἡμιτόνȣ ΕΔ τȣ̃ ὁποιȣδηποτȣ̃ν τόξȣ ΓΕ, τὸ Ἡμίτονον ΕΖ τȣ̃ παραπληρώματος ΕΒ πρὸς τὸ τȣ̃ κύκλȣ τεταρτημόριον ΓΕΒ εὑρεῖν. χ. 7.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΚΕ. λέγω ὅτι τὸ Ἡμίτονον ΕΖ τȣ̃ παραπληρώματος ΕΒ ἴσον ἐςὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς διαφορᾶς τȣ̃ τετραγώνȣ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ΚΕ, ϗ τȣ̃ τετραγώνȣ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ δοθέντος Ἡμιτόνȣ ΕΔ, ἤτȣν $EZ = \sqrt{\overline{EK}^2 - \overline{E\Delta}^2}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

$\overline{EZ}^2 + \overline{ZK}^2 = \overline{EK}^2$. (φ) ἀφαιρεθέντων ἄρα τῶν ἴσων, ἔςαι $\overline{EZ}^2 = \overline{EK}^2 - \overline{ZK}^2$. ἀλλὰ ΖΚ = ΕΔ. (χ) ἄρα $\overline{EZ}^2 = \overline{EK}^2 - \overline{E\Delta}^2$. ἄρα $EZ = \sqrt{\overline{EK}^2 - \overline{E\Delta}^2}$. ὃ ἔδει δεῖξαι. ἐπεὶ δὲ δεδομέναι εἰσὶν αἱ ΕΚ, ΕΔ, γνωςὸν ἄρα τὸ ζητȣ́μενον Ἡμίτονον ΕΖ.

ΠΡΟ-

(τ) Κατὰ τὸν β'. ὁρισμ. (υ) Ἐκ τῆς κατασκ. (φ) Κατὰ τὴν μζ'. τȣ̃ α'. (χ) Κατὰ τὴν λδ'. τȣ̃ α'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

Δοθέντος τῦ Ἡμιτόνυ ΔΗ τῦ ὁποιυῦν τόξυ ΓΒ, τὸ Ἡμίτονον τῦ ἡμίσεως τῦ αὐτῦ τόξυ εὑρεῖν. χ. 8.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, ϗ ἀπὸ μὲν τῦ κέντρυ Κ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΒ ἡ ΚΘ, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Γ· ἀπὸ δὲ τῦ Δ ἤχθω ἡ ΔΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΚ. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΔΘ ἐςὶ τὸ ζητύμενον Ἡμίτονον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ἀπὸ τῦ κέντρυ ΚΘΓ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα τῇ χορδῇ ΒΔ, αὐτήν τε καὶ τὸ τόξον ΔΒ δίχα τέμνει, ὡς ῥᾳδίως δεῖξαι ἔνεςι. τὸ ἄρα ΔΓ τόξον τὸ ἥμισυ ἐςὶ τῦ ΔΓΒ τόξυ. ἀλλὰ τῦ ΔΓ τόξυ ὀρθὸν Ἡμιτονόν ἐςιν ἡ ΔΘ. (ψ) ἡ ἄρα ΔΘ τῦ ζητύμενον Ἡμιτονόν ἐςι. καὶ ἐπεὶ δέδοται τὸ ἡμίτονον ΔΗ, δεδομένον ἄρα ἐςὶ ϗ τὸ ΔΖ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος ΔΕ. (ω) ἀλλ' ἡ ΔΖ $=$ ΗΚ. γνωςὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΚ. ἔςι δὲ ὅλη ἡ ΒΚ γνωςὴ, ὡς ἡμιδιάμετρος, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΗ γνωςή. ἀλλὰ τὸ $\overline{\Delta B}^2 = \overline{\Delta H}^2 + \overline{HB}^2$. γνωςὴ ἄρα ϗ ἡ ΔΒ. διὸ γνωςὸν καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, εἴτυν τὸ ΔΘ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄.

Δοθέντος τῦ Ἡμιτόνυ ΔΗ τῦ 60° μοιρῶν τόξυ ΔΒ σὺν τῷ Ἡμιτόνῳ ΕΖ τῦ 36° μοιρῶν τόξυ ΕΒ, τὸ Ἡμίτονον εὑρεῖν τῦ 12° μοιρῶν τόξυ. χ. 9.

(ψ) Κατὰ τὸν β΄. ὁρισμ. (ω) Κατὰ τὸ προλ. πρόβλ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΔ. λέγω δὴ ὅτι τὸ τῆς ΕΔ χορδῆς ἥμισυ τὸ Ἡμιτονόν ἐςι τȣ̃ 12° μοιρῶν τόξȣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΔΒ ἐςὶ τόξον μοιρῶν 60°, τὸ δὲ ΕΒ, 36°. (α) τὸ ἄρα ΔΛΕ τόξον ἐςὶ μοιρῶν 24°, τὸ ἥμισυ ἄρα τȣ̃ ΔΛΕ τόξȣ, τόξον ἐςὶ μοιρῶν 12°. ἀλλὰ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ τόξȣ ΔΛΕ Ἡμιτονόν ἐςι τὸ τῆς χορδῆς ΕΔ ἥμισυ. (β) τὸ ἄρα ἥμισυ τῆς ΕΔ χορδῆς τὸ Ἡμιτονόν ἐςι τȣ̃ 12° μοιρῶν τόξȣ. ο. ε. δ. Ἐπεὶ δὲ τὰ Ἡμίτονα ΔΗ, ΕΖ δεδομένα εἰσὶ, γνωςὰ ἄρα καὶ τὰ τῶν παραπληρωμάτων Ἡμίτονα ΔΙ, ΕΘ. γνωςὴ ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ τῶν ΔΗ, ΕΖ διαφορὰ ΔΑ, καὶ ἡ τῶν ΔΙ, ΕΘ, ἡ ΕΑ. ἐπεὶ δὲ $\overline{\mathrm{E\Delta}}^2 = \overline{\mathrm{EA}}^2 + \overline{\mathrm{A\Delta}}^2$, γνωςὸν ἄρα καὶ τὸ $\overline{\mathrm{E\Delta}}^2$, καὶ ἡ τȣ́τȣ ῥίζα ΕΔ, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ὅπερ ἐςὶ τὸ Ἡμίτονον τȣ̃ 12° μοιρῶν τόξȣ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ′.

Δοθέντων τῶν Ἡμιτόνων ΔΛ, ΖΙ τῶν τόξων ΔΓ, ΖΓ, τῶν διαφερόντων ἀλλήλοις λεπτὰ 45′, τόξȣ τινὸς μέσȣ, οἷον τȣ̃ ΕΓ, τὸ Ἡμίτονον ΕΛ εὑρεῖν. σχ. 10.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἀπὸ τȣ̃ Ζ ἡ ΖΘ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΛ. καὶ κείσθω τὸ ΖΕ τόξον ἴσον εἶναι λεπτοῖς 15′. καὶ γεγονέτω ὡς ΖΔ : ΖΕ :: ΔΘ : ΕΗ. προσκείσθω δὲ τῷ ἐλάττονι Ἡμιτόνῳ ΖΙ ἡ ΕΗ. καὶ ἔςαι δὴ τὸ τȣ́των ἄθροισμα τὸ ζητȣ́μενον Ἡμίτονον τȣ̃ τόξȣ ΕΓ.

ΔΕΙ-

(α) Ἐξ ὑποθ. (β) Ἐκ τȣ̃ προλ. προβλ. δῆλον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ γνωστὰ τὰ ἡμίτονα ΔΛ, ΖΙ, γνωστὰ ἄρα καὶ τὰ τούτων τόξα ΔΓ, ΖΓ. γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ τούτων διαφορὰ ΔΖ. ὡσαύτως γνωστὴ καὶ τῶν ἡμιτόνων ἡ διαφορὰ, ἤτουν ἡ ΔΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕ τόξον γνωστὸν ἐκ τῆς κατασκευῆς. καὶ ἐπεὶ ὡς ΖΔ : ΖΕ : : ΔΘ : ΕΗ, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΗ. (γ) (ὡς εὐθεῖαι λογίζονται διὰ τὴν τούτων σμικρότητα τὰ τόξα ΖΔ, ΖΕ.) προστεθέντος οὖν τῇ ΕΗ τοῦ γνωστοῦ Ἡμιτόνου ΖΙ, γνωστὸν ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονον ΕΑ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος Ἡμιτόνου τοῦ 45° μοιρῶν τόξου, γνωστὰ γίνεται Ἡμίτονα ἕξ. τουτέστι τὸ Ἡμίτονον τοῦ τόξου 22°. 30′, τοῦ ἡμίσεως ὄντος τοῦ 45° τόξου, ὁμοίως καὶ τὸ τοῦ 11°, 15′ τόξου, ὅ ἐστι τὸ τοῦ ἡμίσεως ἥμισυ. (δ) ὡσαύτως καὶ τὰ τῶν παραπληρωμάτων αὐτῶν, τοῦ 67°, 30′, καὶ τοῦ 78°, 45′. (ε) ἔστι δὲ καὶ τὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ παραπληρώματος, ἤτοι 33°. 45′, καὶ τὸ τοῦ παραπληρώματος αὐτοῦ, ἤτουν τοῦ 56°. 15′. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐκ μὲν τοῦ Ἡμιτόνου τοῦ 60° μοιρῶν τόξου γνωστὰ γίνεται δέκα καὶ πέντε Ἡμίτονα· ἐκ δὲ τοῦ τῶν 36°, τριάκοντα καὶ ἕν· ἐκ δὲ τοῦ τῶν 12°, ἑξήκοντα καὶ τρία· συμποσοῦνται δὲ πάντα Ἡμίτονα 120, ἅπερ Ἡμίτονά εἰσι τόξων ἀλλήλοις διαφερόντων μόνον λεπτὰ πρῶτα 45′. μεταξὺ δὲ τούτων ἄλλα εὑρίσκονται Ἡμίτονα τόξων ἀλλήλοις 15′ λεπτὰ διαφερόντων. (ζ) καὶ πάλιν μεταξὺ τῶν εὑρεθέντων δῆλα γίνονται ἕτερα τόξα, ὧν ἡ διαφορὰ, λεπτὰ πέντε. καὶ αὖθις με-

(γ) Κατὰ τὸ β′. πρόβλ. τοῦ δ′. τῆς Ἀριθμ. Βιβλ. (δ) Κατὰ τὸ ε′. πρόβλ. (ε) Κατὰ τὸ δ′. πρόβλ. (ζ) Κατὰ τὸ ζ′. πρόβλ.

μεταξὺ τȣ́των ἄλλα τόξων, ὧν ἕτερον τὸ ἕτερον ἓν μόνον λεπτὸν ὑπερέχει.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῷ εἰρημένῳ τρόπῳ κατεσκευάσθησαν οἱ τῶν Ἡμιτόνων πίνακες. ἐπεὶ δὲ ȣ̃τοι Ἡμίτονα τόξων περιέχȣσι, μοίρας μόνων καὶ λεπτὰ πρῶτα ἐμφαινόντων, ῥητέον τῷ τρόπῳ τὰ Ἡμίτονα εὑρίσκεται τῶν τόξων τῶν λεπτὰ δεύτερα μόνον, ἢ μοίρας, λεπτὰ πρῶτα καὶ δεύτερα περιεχόντων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄.

Δοθέντος τȣ̃ Ἡμιτόνȣ ΔΕ τȣ̃ ΔΒ τόξȣ, τȣ̃ ἴσȣ ἑνὶ λεπτῷ πρώτῳ, καὶ τȣ̃ ΓΒ τόξȣ, τȣ̃ ἴσȣ 40″ λεπτοῖς δευτέροις, τὸ Ἡμίτονον αὐτȣ̃ ΓΖ εὑρεῖν σχ. 11.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Γεγονέτω ὡς 1′ λεπτὸν πρῶτον, ἤτοι 60″ λεπτὰ δεύτερα, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τȣ̃ ἑνὸς λεπτȣ̃ πρώτȣ, εἴτȣν τȣ̃ 2909, (ἐν τοῖς τῶν Ἡμιτόνων πίναξι ὁ ἀριθμὸς ȣ̃τος κεῖται.) ȣ̃τω τὰ 40″ λεπτὰ δεύτερα, πρὸς τὸν τέταρτον ὅρον, ὅςις τὸ ζητȣ́μενον Ἡμίτονον ΓΖ ἐςί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς εὐθειῶν τῶν ΔΒ, ΓΒ τόξων διὰ τὴν τȣ́των σμικρότητα λογισθέντων, ἔσεται διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΔΕ, ΒΓΖ ὡς ΔΒ: ΔΕ :: ΓΒ: ΓΖ, ἤτοι ὡς 60″: 2909:: 40″: ΓΖ. διὸ ἡ $\Gamma Z = \frac{2909 \cdot 40''}{60''}$. (η)

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Παντὸς ἄρα δοθέντος τόξȣ διὰ λεπτῶν δευτέρων ἐμφαινομένȣ τὸ Ἡμίτονον εὑρίσκεις, διελὼν τὸ γνόμενον ἐκ

(η) Κατὰ τὸ β΄. πρόβλ. τȣ̃ γ΄. τῆς Ἀριθμ. βιβλ.

ἐκ τῆ Ἡμιτόνȣ τȣ̃ ἑνὸς λεπτȣ̃ πρώτȣ καὶ τῶν δοθέντων λεπτῶν δευτέρων δὶ ἑνὸς λεπτȣ̃ πρώτȣ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ΄.

Τὸ Ἡμίτονον ΓΘ εὑρεῖν τȣ̃ ΓΑ τόξȣ, τȣ̃ ἐκ μοιρῶν 89°, λεπτῶν πρώτων 59′, καὶ λεπτῶν δευτέρων 20″ συγκειμένȣ. χ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω δύω τόξα τὰ ΔΑ, ΒΑ ἐγγύτατα τȣ̃ ΓΑ. καὶ ἔςω τὸ μὲν ΔΑ μικρόν τι μεῖζον, εἴτȣν ἴσον μοίραις 90°· τὸ δὲ ΒΑ, μικρόν τι ἔλαττον, ἤτοι ἴσον 89°, 59′. λήφθήτω δὲ ἀπὸ τῶν πινάκων τὰ τȣ́των Ἡμίτονα, εἴτȣν τȣ̃ μὲν ΔΑ τόξȣ τὸ ΔΚ = 10000000, τȣ̃ δὲ ΒΑ τὸ ΒΗ = 9999999. καὶ ἀπὸ τȣ̃ Β ἤχθω ἡ ΒΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΚ. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΓΖ σὺν τῇ ΒΗ ἐςὶ τὸ ζητȣ́μενον Ἡμίτονον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΓΘ, ὅπερ ἐςὶ τὸ ζητȣ́μενον Ἡμίτονον, ἴσον ἐςὶ τῷ ΓΖ + ΖΘ. ἀλλὰ ΖΘ = ΒΗ. τὸ ἄρα ζητȣ́μενον Ἡμίτονον ἴσον ΓΖ + ΒΗ. ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν τόξον ΔΑ = 90°, τὸ δὲ ΒΑ = 89°, 59′. τὸ ἄρα ΔΒ = 1′, ἤτοι 60″. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ΒΑ = 89°, 59′, τὸ δὲ ΓΑ = 89°, 59′, 20″. τὸ ἄρα ΓΒ = 20″. ἐπεὶ δὲ ἡ ΕΚ = ΒΗ, ἡ δὲ ΒΗ = 9999999, ἄρα καὶ ἡ ΕΚ = 9999999. ἀλλ᾽ ἡ ΔΚ = 10000000. ἄρα ἡ ΔΕ = 1. καὶ ἐπεὶ ὡς ΔΒ : ΔΕ :: ΓΒ : ΓΖ, (θ) ἔςιν ἄρα καὶ ὡς 60″ : 1 :: 20″ : ΓΖ. διὸ ἡ ΓΖ = $\frac{1}{3}$. ἡ ἄρα ΓΖ + ΒΗ, εἴτȣν ἡ ΓΘ = 9999999 + $\frac{1}{3}$. τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ εὑρεθήσεται πᾶν Ἡμίτονον τόξȣ ἐκ μοιρῶν καὶ λεπτῶν πρώτων καὶ δευτέρων συγκειμένȣ.

ΠΡΟ-

(θ) Διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΒΔΕ, ΒΓΖ ὁμοιότητα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

Δοθέντος τȣ̃τε Ἡμιτόνȣ ΕΒ ϗ τȣ̃ συνημιτόνȣ ΕΗ τȣ̃ ὁποιȣ̃ν τόξȣ ΓΕ, τήντε ἐφαπτομένην αὐτȣ̃ ΓΔ καὶ τὴν τέμνȣσαν ΚΔ εὑρεῖν. π. ϑ. Β' χ. 13.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Γεγονέτω ὡς Συνημίτονον. πρὸς Ἡμίτονον, ȣ̔́τως ἡ ἡμιδιάμετρος, πρὸς τὴν τετάρτην ἀνάλογον. αὕτη δὴ ἔςαι ἡ ζητηθεῖσα ἐφαπτομένη. γεγονέτω δὲ καὶ ὡς Συνημίτονον, πρὸς ἡμιδιάμετρον, ȣ̔́τως ἡμιδιάμετρος, πρὸς τὴν τρίτην ἀνάλογον, ἥτις ἡ ζητȣμένη τέμνȣσα ἐςί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ τρίγωνα ΚΒΕ, ΚΓΔ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσὶν, ὡς ἄρα ΚΒ : ΒΕ :: ΚΓ : ΓΔ. ἀλλὰ ΚΒ = ΕΗ, ὡς ἄρα ΕΗ : ΒΕ :: ΚΓ : ΓΔ. ἐξ ȣ̔̃ δῆλον τὸ πρῶτον. ἔςι δὲ ϗ ὡς ΚΒ : ΚΕ :: ΚΓ : ΚΔ, εἴτȣν ΕΗ : ΚΕ :: ΚΓ : ΚΔ. ἐκ τȣ́τȣ δὲ δῆλον τὸ δεύτερον. ϗ ἐπεὶ τό, τε Ἡμίτονον καὶ τὸ Συνημίτονον καὶ ἡ ἡμιδιάμετρος γνωςά εἰσι, γνωςὴ ἄρα καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΓΔ καὶ ἡ τέμνȣσα ΚΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΒΑΓ ἐὰν ὡς ὁλοημίτονον, εἴτȣν ὡς ἡμιδιάμετρος ληφθῇ ἡ ΒΓ πλευρὰ, ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνȣσα γωνίαν ΒΑΓ, ἑκατέρα τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχȣσῶν πλευρῶν τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐςι τῆς ὑπ᾽ αὐτῆς ὑποτεινομένης ὀξείας γωνίας· οἷον

οἷον ἡ μὲν ΓΑ, τῆς ΑΒΓ· ἡ δὲ ΒΑ, τῆς ΒΓΑ. χ. 14.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ τεταρτημόριον κύκλου γεγράφθω τὸ ΗΓΔ. πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ ΓΒ κύκλου τεταρτημόριον γεγράφθω τὸ ΖΒΕ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ΓΑ, ΒΑ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ τῶν περιφερειῶν σημεῖα Ε, Δ.

Ἐκ τῆς τοῦ καταγράμματος θεωρίας καὶ τοῦ δευτέρου ὁρισμοῦ δῆλον ὅτι ἡ μὲν ΓΑ τὸ ὀρθὸν Ἡμιτονόν. ἐστι τῆς ΑΒΓ γωνίας· ἡ δὲ ΒΑ, τῆς ΑΓΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΓΑΒ ὁποτερασοῦν τῶν πλευρῶν τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν, οἷον τῆς ΓΑ, ὡς Ὁλοημιτόνου ληφθείσης, ἡ ἑτέρα ἡ ΑΒ ἐφαπτομένη γίνεται ἧς ὑποτείνει ὀξείας γωνίας ΑΓΒ· ἡ δὲ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρὰ ΓΒ, τέμνουσα τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΓΒ. χ. 15.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΔΕ.

Δῆλον ὥστε τοῦ πέμπτου ὁρισμοῦ καὶ τῆς τοῦ καταγράμματος θεωρίας, ὅτι ἡ μὲν ΑΒ ἡ ἐφαπτομένη ἐστὶ τῆς ΑΓΒ γωνίας, ἡ δὲ ΓΒ ἡ τέμνουσα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ληφθῇ ὡς Ὁλοημίτονον ἡ ΒΑ, καὶ γραφθῇ κύκλος ὁ ΑΕΖ, ἡ μὲν ΑΓ ἡ ἐφαπτομένη γίνεται τῆς ΑΒΓ γωνίας· ἡ δὲ ΒΓ, ἡ τέμνουσα.

ΣΗ-

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰϛέον δὲ, ὅτι τῆς ἑτέρας τοῦ τριγώνου πλευρᾶς ὡς Ὁλοημιτόνου ληφθείσης, οὐ δεῖ καὶ τὴν ἑτέραν τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ὡς Ὁλοημίτονον ἐκλαμβάνειν. οὕτω μὲν γὰρ ἐπὶ τοῦ ἀνισοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ αὐτὸ Ἡμίτονον ἕξουσι καὶ τὴν αὐτὴν τέμνουσαι αἱ ἄνισοι γωνίαι. ὅπερ ἄτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δʹ.

Αἱ πλευραὶ παντὸς ὀξυγωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου τριγώνου λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ Ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τῶν ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινομένων.

Εἰ μὲν τὸ τρίγωνον ἰσόπλευρόν ἐϛι, δῆλον τὸ προκείμενον. τὸ γὰρ ἰσόπλευρον τρίγωνον, καὶ ἰσογώνιόν ἐϛι. (ι) τῶν δ' ἴσων γωνιῶν ἴσα καὶ τὰ Ἡμίτονα. ἀλλὰ δὴ ἔϛω τὸ ΒΓΑ τρίγωνον ὀξυγώνιον, ἀνίσους ἔχον τὰς πλευράς. καὶ ἔϛω ἡ ΒΓ μείζων τῆς ΒΑ. σχ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἡ ΓΔ ἴση τῇ ΒΑ. καὶ ἀπὸ τῶν Δ καὶ Β σημείων ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΑ αἱ ΔΕ, ΒΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ τρίγωνα ΓΔΕ, ΓΒΖ ὅμοιά εἰσιν. ὡς ἄρα ΓΒ : ΓΔ :: ΒΖ : ΔΕ. ἀλλ' ἡ ΓΔ = ΒΑ. ὡς ἄρα ΓΒ : ΒΑ :: ΒΖ : ΔΕ. ἀλλ' ἡ μὲν ΒΖ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐϛι τῆς ΒΑΖ γωνίας, ἤτοι τῆς ΒΑΓ· ἡ δὲ ΔΕ, τῆς ΔΓΕ, εἴτουν τῆς ΒΓΑ. (κ) ἡ ἄρα ΓΒ πλευρὰ, πρὸς τὴν ΒΑ πλευρὰν λόγον ἔχει, ὃν τὸ Ἡμίτονον τῆς ΒΑΓ γωνίας, πρὸς τὸ τῆς ΒΓΑ Ἡμί-

(ι) Κατὰ τὴν α. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ϛ'. τοῦ α. (κ) Κατὰ τὸ β. Θεώρ.

Ἡμίτονον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐὰν ἡ ΑΓ μείζων ᾖ τῆς ΑΒ. ληφθείσης τῆς ΓΖ ἴσης τῇ ΑΒ, καὶ ἀχθεισῶν τῶν ΖΗ, ΑΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΓΑΔ, ΓΖΗ ἐστὶν ὡς ΓΑ : ΓΖ :: ΑΔ : ΖΗ. ἀλλὰ ΓΖ$=$ΑΒ. ὡς ἄρα ΓΑ : ΑΒ :: ΑΔ : ΖΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ΑΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τῆς ΑΒΔ, ἤτουν τῆς ΑΒΓ γωνίας, ἡ δὲ ΖΗ τῆς ΖΓΗ, (λ) ἤτοι τῆς ΑΓΒ. ὡς ἄρα ΓΑ, πρὸς ΑΒ, οὕτω τὸ Ἡμίτονον τῆς ΓΒΑ γωνίας, πρὸς τὸ τῆς ΑΓΒ γωνίας Ἡμίτονον. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΓΒ ΒΑ :: τὸ Ἡμίτ. τῆς ΒΑΓ γων. πρὸς τὸ Ἡμίτ. τῆς ΒΓΑ γων. ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ ὡς ΓΑ, πρὸς ΓΒ, οὕτω τὸ Ἡμίτ. τῆς ΓΒΑ γωνίας πρὸς τὸ Ἡμίτ. τῆς ΒΑΓ. (μ)

Ἔστω δὲ τὸ ΒΓΑ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ΑΒΓ γωνίαν. καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΒ κατὰ τὸ συνεχὲς, ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ καὶ Β σημείων ἡ μὲν ΓΔ κάθετος τῇ ΑΔ. ἡ δὲ ΒΖ τῇ ΑΓ. Σχ. 17.

Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΖΒ ἔχουσι τὴν μὲν πρὸς τῷ Α γωνίαν κοινὴν, τὴν δὲ ΑΔΓ$=$ΑΖΒ. (ν) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΔ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΒΖ. (ξ) ὡς ἄρα ΑΓ : ΑΒ :: ΓΔ : ΒΖ. (ο) ἀλλ' ἡ μὲν ΓΔ ὀρθὸν οὖσα Ἡμίτονον τῆς ΓΒΔ γωνίας, (π) τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς ΓΒΑ γωνίας, ἥτις τὸ ἀναπλήρωμα αὐτῆς ἐστὶ πρὸς δύω ὀρθὰς, (ρ) ἡ δὲ ΒΖ τῆς ΒΓΑ, (σ) ὡς ἄρα ΑΓ, πρὸς ΑΒ, οὕτω τὸ Ἡμίτονον τῆς ΓΒΑ γωνίας, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς ΒΓΑ. ὃ ἔδει δεῖξαι.

(λ) Κατὰ τὸ αὐτ. Θεώρ. (μ) Κατὰ τὴν ζ'. καὶ τὴν ι'. τοῦ ι'
(ν) Ἐκ τῆς κατασκ. (ξ) Κατὰ τὴν ζ'. Συμπ. τῆς λβ' τοῦ α'.
(ο) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς'. (π) Κατὰ τὸ β'. Θεώρ. (ρ) Κατὰ τὸν β'. ὁρισμ. (σ) Κατὰ τὸ β'. Θεώρ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἐπιλύσεως τῶν περὶ τὰ τρίγωνα προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Δοθεισῶν δύω γωνιῶν τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΒΑΓ, τῆς ὀρθῆς δηλαδὴ ΒΑΓ, καὶ τῆς ὀξείας ΑΒΓ, τὸν λόγον εὑρεῖν, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχȣσιν αἱ πλευραί. χ. 18.

Ἡ μὲν ὀρθὴ ΑΒΓ γωνία ἴση ἐςὶ 90°. ἔςω δὴ ἡ ΑΒΓ = 44°. 29'. ἔςαι δὲ ἡ ΑΓΒ, παραπλήρωμα ȣ̃σα τῆς ΑΒΓ πρὸς μίαν ὀρθὴν, ἴση 45°, 31'. καὶ τὸ μὲν ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς ΒΑΓ = 10000000, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓ = 7007018, τὸ δὲ τῆς ΑΓΒ = 7134543. (τ) ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΓ : : 7134543 : 10000000. καὶ ὡς ΑΓ : ΓΒ : : 7007018 : 10000000. καὶ ὡς ΑΒ : ΑΓ : 7134543 7007018. (υ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Δοθείσης ὁποτερασȣ̃ν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΒΑΓ, καὶ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΑΓ ὑποτεινȣ́σης πλευρᾶς ΒΓ, ἑκατέραν εὑρεῖν τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχȣσῶν πλευρῶν, τήν τε ΑΓ δηλαδὴ καὶ τὴν ΑΒ χ. 19.

Ἐςω·

(τ) Ἐν τοῖς πίναξι ταῦτα εὑρίσκεται. (υ) Κατὰ τὸ β. Θεώρ.

Ἔςω δὴ ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ = 100, ἡ δὲ γωνία ΑΒΓ = 59°. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑΓ = 90°, ὡς ὀρθὴ, ἔσεται ἄρα ἡ ΑΓΒ = 31°. (φ) ἔςι δὲ τὸ μὲν ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς ΑΒΓ = 8571673· τὸ δὲ τῆς ΑΓΒ = 5150381· τὸ δὲ τῆς ΒΑΓ = 10000000. Ἐπεὶ δὲ ὡς τὸ Ἡμιτ. τῆς ΒΑΓ, πρὸς τὸ Ἡμίτ. τῆς ΑΒΓ, ὕτω ΒΓ, πρὸς ΑΓ, (χ) ἐςὶν ἄρα ὡς 10000000 : 8571673 :: 100 : ΑΓ. ἡ ἄρα ΑΓ = $85 + \frac{71673}{100000}$ (ψ) πάλιν ἐπεὶ ὡς Ἡμίτ. τῆς ΒΑΓ γων. πρὸς Ἡμίτ. τῆς ΑΓΒ, ὕτω ΒΓ, πρὸς ΑΒ, ἄρα καὶ ὡς 10000000 : 5150381 :: 100 : ΑΒ. ἡ ἄρα ΑΒ = $51 + \frac{50381}{100000}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

Δοθείσης ὁποτερασῦν τῶν ὀξειῶν τῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ ΒΑΓ γωνιῶν, καὶ ὁποτερασῦν τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχυσῶν πλευρῶν, τὰς δύω λοιπὰς εὑρεῖν τῦ τριγώνυ πλευράς. χ. 20.

Ἔςω ἡ μὲν γωνία Γ = 39°, 15΄, ἡ δὲ ΑΒ = 50. καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία Α = 90°, ὡς ὀρθὴ, ἡ ἄρα γωνία Β = 50°, 45΄. ἔςι δὲ τὸ μὲν ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς γωνίας Γ, 6327053· τὸ δὲ τῆς Β, 7743927· τὸ δὲ τῆς Α, 10000000. Ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς γωνίας Γ, πρὸς Ἡμίτονον τῆς γωνίας Β, ὕτως ΑΒ, πρὸς ΑΓ, ἐςὶν ἄρα ὡς 6327053 : 7743927 :: 50 : ΑΓ. ἄρα ἡ ΑΓ = $61 + \frac{1246117}{6327053}$ πάλιν ἐπεὶ ὡς Ἡμίτ. τῆς γων. Γ,

(φ) Κατὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τῆς λβ΄. τῦ α΄. (χ) Κατὰ τὸ β΄. Θεώρ. (ψ) Κατὰ τὸ β΄. πρόβλ. τῦ δ΄. τῆς Ἀριθμ. βιβλ.

Γ, πρὸς Ἡμίτ. τῆς γων. Α, ὕτως ΑΒ, πρὸς ΒΓ, ἐςὶν ἄρα κ̀ ὡς 6327053 : 10000000 :: 50 : ΒΓ. ἡ ἄρα ΒΓ $= 79 + \frac{3628 13}{6327053}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ′.

Δοθείσης τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΒΑΓ ὑποτεινȣ́σης πλευρᾶς ΓΒ, καὶ ὁποτερασȣ̃ν των τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχȣσω̃ν πλευρω̃ν, ἑκατέραν τω̃ν ὀξειω̃ν γωνιω̃ν, καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν εὑρεῖν. χ. 21.

Ἔςω ἡ μὲν ΓΒ $=$ 1000, ἡ δὲ ΑΒ $=$ 891. καὶ ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ὀρθὴ, τὸ Ἡμίτονον αὐτῆς ἐςὶ, 10000000.

Ἐπεὶ δὲ ὡς ΓΒ, πρὸς ΑΒ, ὕτω τὸ Ἡμίτονον τῆς Α γωνίας, πρὸς τὸ τῆς Γ γωνίας Ἡμίτονον. ἐςὶν ἄρα ὡς 1000 : 891 :: 10000000 : Ἡμίτ. τῆς γων. Γ. τὸ ἄρα τῆς Γ γωνίας Ἡμίτονον $=$ 8910000. τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τȣ́τȣ ἐγγύτατος ὁ ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμὸς 8910065, ὁ τὸ Ἡμίτονον ἐμφαῖνον τῆς 63° μοιρω̃ν γωνίας, ὃ κ̀ ἀπαρασφαλίςως ἀντὶ τȣ̃ εὑρεθέντος Ἡμιτόνȣ 8910000 ἐκλαμβανόμενος. ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία $=$ 63°. διὸ ἡ πρὸς τῷ Β $=$ 27°, ἧς Ἡμίτονον, ὁ 4539905. ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς γωνίας Γ, πρὸς Ἡμίτονον τῆς Β, ὕτως ΑΒ : ΑΓ, ἔτȣν ὡς 8910065 : 4539905 :: 891 : ΑΓ. ἄρα ἡ ΑΓ $= 45 + \frac{7638525}{8910065}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε′.

Δοθεισω̃ν τω̃ν δύω πλευρω̃ν, ΑΓ, ΑΒ, τω̃ν τὴν ὀρθὴν γωνίαν Α περιεχȣσω̃ν τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΒΑΓ, ἑκατέραν εὑρεῖν τω̃ν

ὀξει-

ὀξειῶν Γ, Β, καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν. χ. 22.

Ἔςω ἡ ἡ μὲν ΑΓ=100, ἡ δὲ ΑΒ=79. καὶ ληφθήτω ἡ ΑΓ ὡς Ὁλοημίτονον.

Ἐπεὶ ὡς ΑΓ, πρὸς ΑΒ, οὕτω τὸ Ὁλοημίτονον, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς Γ γωνίας, (ω) εἴτουν ὡς 100: 79:: 10000000: ΑΒ, ἡ ἄρα ΑΒ=7900000. τούτου δὲ τοῦ ἀριθμοῦ ἐγγύτερος ἐν τοῖς πίναξιν ἐςὶν ὁ 7902248, ὁ ἐμφαίνων ἐφαπτομένην τόξου 38°, 19′. ἡ ἄρα γωνία Γ=38°, 19′. διὸ ἡ γωνία Β=51°, 41′, ἧς Ἡμίτονον ὁ 7845961 ἀριθμός. ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς Β γωνίας, πρὸς Ἡμίτονον τῆς Α, οὕτως ΑΓ, πρὸς ΒΓ, ἤτοι ὡς 7845961; 10000000:: 100: ΒΓ, ἡ ἄρα ΒΓ=127 + $\frac{3562953}{7845961}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ′.

Δοθεισῶν πασῶν τῶν τοῦ ὀξυγωνίου τριγώνου ΒΑΓ γνωνιῶν, τὸν λόγον εὑρεῖν, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ πλευραί. χ. 23.

Ἔςω ἡ μὲν γωνία Α=69°, ἡ δὲ Β=71°, ἔςαι δὲ ἡ Γ=40°. καὶ τῆς μὲν γωνίας Α τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον = 9335804, τὸ δὲ τῆς Β=9455185, τὸ δὲ τῆς Γ=6427876. ὡς ἄρα ΒΓ: ΑΓ:: 9335804: 9455185, εἴτουν ὡς ΒΓ: ΑΓ:: 1 : 1 + $\frac{119381}{9335804}$. καὶ ὡς ΒΓ: ΑΒ:: 9335804: 6427876, ἤτοι ὡς ΒΓ : ΑΒ:: 1 + $\frac{2907928}{9335804}$. 1. καὶ ὡς ΑΓ : ΑΒ:: 9455185: 6427876, τουτέςιν ὡς

 ΑΓ:

(ω) Κατὰ τὸ γ′. Θεώρ. τοῦ πρὸλ. βιβλ.

ΑΓ : ΑΒ : : $1 + \frac{3027309}{6427876}$: 1. (α) τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ εὑρεθήσεται ὁ λόγος, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ τοῦ ἀμβλυγωνίου τριγώνου πλευραί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄.

Μιᾶς τῶν τοῦ ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ πλευρῶν δοθείσης, καὶ δύω γωνιῶν, τὰς λοιπὰς τοῦ τριγώνου εὑρεῖν πλευράς. χ. 24.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πλευρὰ ΑΓ = 1000· καὶ ἡ μὲν γωνία Β = 39°, ἡ δὲ Γ = 55°. καὶ ἔσται δὴ ἡ γωνία Α = 86°. ἔστι δὲ τῆς μὲν Β γωνίας τὸ Ἡμίτονον = 6293204, τὸ δὲ τῆς Γ = 8191521, τὸ δὲ τῆς Α = 9975640. Ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτονον τῆς γωνίας Β, πρὸς Ἡμίτονον τῆς Γ, οὕτως ἡ ΑΓ : ΑΒ, ἔσται καὶ ὡς 6293204 : 8191521 :: 1000 : ΑΒ. ἡ ἄρα ΑΒ = $1301 + \frac{1015649}{1573301}$ πάλιν ἐπεὶ ὡς Ἡμίτ. τῆς γων. Β, πρὸς Ἡμίτ. τῆς Α, οὕτως ΑΓ, πρὸς ΒΓ, ἔσται ὡς 6293204 : 9975640 :: 1000 : ΒΓ, ἡ ἄρα ΒΓ = $1585 + \frac{227915}{1573301}$ τὰ αὐτὰ δὴ ποιητέον κἂν ἀμβλυγώνιον ᾖ τὸ τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄.

Δοθεισῶν δύω τῶν τοῦ ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ πλευρῶν, καὶ ὁποτερασοῦν τῶν μὴ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένων γωνιῶν, τὰς λοιπὰς γωνίας καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν εὑρεῖν. χ. 25.

Ἔστω ἡ μὲν ΑΒ = 150, ἡ δὲ ΒΓ = 100, ἡ δὲ γωνία Γ = 63°, ἧς τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον = 8910065.

Ἐπεὶ

(α) Ὅρα τὴν β΄. Συνέπ. τοῦ ϛ΄. ὁρισμ. τοῦ α΄. τῆς Ἀριθμ. βιβλ.

Ἐπεὶ ὡς ΑΒ, πρὸς ΒΓ, ὅτω τὸ τῆς Γ γωνίας Ἡμίτονον, πρὸς τὸ τῆς Α, ἔσαι ἄρα ὡς 150: 100:: 8910065, πρὸς τὸ τῆς Α Ἡμίτ. τὸ ἄρα τῆς Α γωνίας Ἡμίτονον $= 5940043 + \frac{1}{3}$. τότε δὲ τῶ ἀριθμῶ ὁ ἐν τοῖς πίναξιν ἐγγύτερος, ὁ τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον ἐμφαίνων τόξε 36°, 27′, ἐςὶν ὁ 5941211. διὸ ἡ γωνία Α $=$ 36°, 27′. ἔςι δὲ καὶ ἡ γωνία Γ $=$ 63°. ἡ ἄρα γωνία Β $=$ 80°, 33′, ἧς Ἡμίτονον ὁ 9864293 ἀριθμός. ἐπεὶ δὲ ὡς Ἡμίτ. τῆς Γ, πρὸς Ἡμιτ. τῆς Β, ὅτως ΑΒ : ΑΓ, ἔσαι καὶ ὡς 8910065 : 9864293 :: 150 : ΑΓ. ἡ ἄρα ΑΓ $= 166 + \frac{573160}{8910065}$. τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ τὰ αὐτὰ εὑρεθήσονται κἀν τῷ ἀμβλυγωνίῳ τριγώνῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θʹ.

Δοθεισῶν δύω τῶν τῦ ΑΒΓ ὀξυγωνίυ τριγώνυ πλευρῶν, καὶ τῆς ὑπ' αὐτων περιεχομένης γωνίας ΒΑΓ, τὰς λοιπὰς γωνίας καὶ τὴν λοιπὴν εὑρεῖν πλευράν. πίν. Γʹ χ. 26.

Ἔςω ἡ μὲν ΑΓ $=$ 16, ἡ δὲ ΑΒ $=$ 12, καὶ γωνία ἡ Α $=$ 63°, ἧς τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον $=$ 8910065. ἀχθείσης δὲ τῆς ΒΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ, ἔσαι ἡ γωνία ΑΒΔ $=$ 27°, ἧς τὸ Ἡμίτονον $=$ 4539905.

Ἐπεὶ δὲ ὡς τὸ τῆς ΑΔΒ γων. Ἡμίτ. πρὸς τὸ τῆς ΑΒΔ, ὅτως ΑΒ, πρὸς ΑΔ, ἤτυν ὡς 10000000: 4539905 :: 12: ΑΔ. ἄρα ἡ ΑΔ $= \frac{54478860}{10000000}$. ἀλλ' ΑΓ $-$ ΑΔ $=$ ΔΓ. ἄρα ΔΓ $= 16 - \frac{54478860}{10000000} = \frac{105521140}{100000000}$. πάλιν ἐπεὶ ὡς τὸ τῆς ΒΔΑ Ἡμιτ. πρὸς τὸ τῆς Α, ὅτως ΑΒ: ΒΔ, ἤτοι 10000000: 8910065 :: 12: ΒΔ. ἡ ἄρα ΒΔ $=$

$\frac{106920780}{10000000}$. ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ἂν τριγώνῳ ΒΔΓ ἐςὶν ὡς ΒΔ πρὸς ΔΓ, ἕτω τὸ Ὁλοημίτονον, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ΑΒΓ γωνίας, (β) εἴτ8ν ὡς $\frac{106920780}{10000000}$: $\frac{105521140}{10000000}$ :: 10000000, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ΔΒΓ γωνίας. ἡ ἄρα ἐφαπτομένη τῆς ΔΒΓ γωνίας = 98690862. τέτ8 δὲ τ8 ἀριθμ8 ὁ ἐν τοῖς πίναξιν ἐγγύτερός ἐςιν ὁ 9867079, ὁ ἐμφαίνων ἐφαπτομένην τόξ8 44°, 37′. ἡ ἄρα γωνία ΔΒΓ = 44°, 37′. ἀλλ' ἡ ΑΒΔ = 27°, ὡς δέδεικται, ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓ = 71°. 37′. ἐπεὶ ἂν τ8 ΑΒΓ τριγώνȣ γνωςαί εἰσιν αἱ δύω πλευραὶ, ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἡ μὴ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΑΒΓ, καὶ τὰ λοιπὰ εὑρεθήσεται. (γ) Ἐὰν δὲ ἡ ΒΑΓ γωνία ἀμβλεῖα ᾖ, καὶ ἡ ἀγομένη κάθετος ΒΔ ἐκτὸς τ8 τριγώνȣ ΑΒΓ πίπτῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ ἐκβληθείσης κατὰ τὸ Δ, (σχ. 27.) γνωςαὶ ἔσονται τ8 ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ἥτε ΒΔΑ γωνία, ὡς ὀρθὴ, καὶ ἡ ΒΑΔ ὡς ἀναπλήρωμα πρὸς δύω ὀρθὰς τῆς δεδομένης ΒΑΓ, ἔςι δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΑ δεδομένη, διὸ γνωςαὶ ἔσονται καὶ αἱ τέτȣ πλευραὶ, ΒΔ, ΔΑ. (δ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΓ δεδομένη ἐςὶ, γνωςὴ ἄρα ὅλη ἡ ΔΓ. ἐπεὶ ἂν τ8 ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΒΔΓ γνωςαί εἰσιν αἱ δύω πλευραὶ ΒΔ, ΔΓ, αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΔΓ περιέχȣσαι, γνωςὴ ἄρα ἔσεται καὶ ἡ ΒΓ πλευρὰ, καὶ ἡ ΒΓΔ γωνία, (ε) ἐξ ὧν καὶ ἡ ΑΒΓ γνωςὴ ἔςαι· ἅπερ εἰσὶ τὰ ζητȣμενα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

Δοθεισῶν πασῶν τῶν τ8 ΑΒΓ τριγώνȣ πλευρῶν, πάσας εὑρεῖν τὰς τ8 τριγώνȣ γωνίας. σχ. 28.

Ἔςω

(β) Ὅρα τὸ β′. Θεώρ. τ8 προλ. βιβλ. (γ) Κατὰ τὸ προλ. πρόβλ. (δ) Κατὰ τὸ β′. πρόβλ. (ε) Κατὰ τὸ ι. πρόβλ.

Ἔςω ἡ μὲν ΑΒ $=$ 50, ἡ δὲ ΒΓ $=$ 30, ἡ δὲ ΑΓ $=$ 64. καὶ ἤχθω ἡ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ. ἐὰν δὲ ἡ κάθετος ΒΔ ἐκτὸς τῦ τριγώνυ πίπτῃ, ἤχθω κάθετος ἤτοι ἀπὸ τῦ Γ τῇ ΑΒ, ἢ ἀπὸ τῦ Α τῇ ΒΓ.

Ἡ ὖν ἀχθεῖσα κάθετος ΒΔ ἤτοι εἰς ἴσα, ἢ εἰς ἄνισα τέμνει μέρη τὴν ΑΓ. τεμνέτω δὴ αὐτὴν εἰς ἴσα κατὰ τὸ Δ. καὶ ἐπεὶ δεδομένη ἡ ΑΓ, γνωςόν ἐςι καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, εἴτυν ἡ ΑΔ. ἐπεὶ δὲ $\mathrm{AB}^2 = \overline{\mathrm{B\Delta}}^2 + \overline{\mathrm{A\Delta}}^2$, (ζ) τῶν ἴσων ἄρα ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $\overline{\mathrm{B\Delta}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{A\Delta}}^2$. γνωςῶν δὲ ὄντων τῶν $\overline{\mathrm{AB}}^2$, $\overline{\mathrm{A\Delta}}^2$, γνωςὸν ἔςαι καὶ τὸ $\mathrm{B\Delta}^2$. διὸ γνωςὴ καὶ ἡ τέτυ ῥίζα, εἴτυν ἡ ΒΔ. τῦ ὀρθογωνίυ ὖν τριγώνυ ΑΒΔ γνωςαὶ αἱ δύω πλευραὶ ΑΔ, ΔΒ αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΔΒ περιέχυσαι, γνωςαὶ ἄρα καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΑΒΔ. (η) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ γνωςαὶ ἔσονται καὶ αἱ δύω γωνίαι ΒΓΔ, ΓΒΔ τῦ ὀρθωγωνίυ τριγωνίυ ΒΔΓ. διὸ γνωςὴ καὶ ὅλη ἡ ΑΒΓ γωνία τῦ ΑΒΓ τριγώνυ. γνωςαὶ δὲ, ὡς δέδεικται, καὶ αἱ Α καὶ Γ γωνίαι, πᾶσαι ἄρα αἱ τῦ τριγώνυ γωνίαι εὕρηνται.

Ἐὰν δὲ ἡ ΒΔ εἰς ἄνισα τέμνῃ τὴν ΑΓ κατὰ τὸ Δ, τετμήσθω ἡ ΑΓ εἰς ἴσα κατὰ τὸ Ε. ἐὰν ὖν εὑρεθῇ ἡ ΕΔ, γνωςὴ ἔςαι ἤτε ΑΔ καὶ ἡ ΔΓ. διὸ γνωςαὶ ἔσονται καὶ πᾶσαι αἱ τῦ ΑΒΓ τριγώνυ γωνίαι κατὰ τὰ εἰρημένα. (κ. 29.) εὑρεθήσεται δὲ ἡ ΕΔ ὕτω.

Τὸ $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{B\Delta}}^2 + \overline{\mathrm{A\Delta}}^2$. ἀλλ' $\overline{\mathrm{A\Delta}}^2 = \overline{\mathrm{AE}}^2 + \overline{\mathrm{E\Delta}}^2 + 2\mathrm{AE}.\,\mathrm{E\Delta}$ (θ) ἄρα $\mathrm{AB}^2 = \overline{\mathrm{B\Delta}}^2 + \overline{\mathrm{AE}}^2 + \overline{\mathrm{E\Delta}}^2 + 2\mathrm{AE}.\,\mathrm{E\Delta}$. καὶ τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $\overline{\mathrm{B\Delta}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AE}}^2 - \overline{\mathrm{E\Delta}}^2 - 2\mathrm{AE}.\,\mathrm{E\Delta}$. πάλιν τὸ $\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{B\Delta}^2 +$

 $\overline{\Delta\Gamma}^2$.

(ζ) Κατὰ τὴν μζ. τῦ α. (η) Κατὰ τὸ ι. πρόβλ. (θ) Κατὰ τὴν δ. τῦ β.

$\overline{\Delta\Gamma}^2$. ἐπεὶ δὲ $\overline{\Gamma\Delta}^2 + 2\Gamma E.\ E\Delta = \overline{E\Gamma}^2 + \overline{E\Delta}^2$, (ι) τὸ ἄρα $\overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{E\Gamma}^2 + \overline{E\Delta}^2 - 2\Gamma E.\ E\Delta$. ἄρα $\overline{B\Gamma}^2 = \overline{B\Delta}^2 + \overline{E\Gamma}^2 + \overline{E\Delta}^2 - 2\Gamma E.\ E\Delta$. τῶν ἴσων ἄρα ἀφαιρεθέντων τε καὶ προστεθέντων, ἔσεται $\overline{B\Delta}^2 = \overline{B\Gamma}^2 - \overline{E\Gamma}^2 - \overline{E\Delta}^2 + 2\Gamma E.\ E\Delta$. ἀλλὰ δέδεικται $\overline{B\Delta}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AE}^2 - \overline{E\Delta}^2 - 2AE.\ E\Delta$. ἄρα $\overline{B\Gamma}^2 - \overline{E\Gamma}^2 - \overline{E\Delta}^2 + 2\Gamma E.\ E\Delta = \overline{AB}^2 - \overline{AE}^2 - \overline{E\Delta}^2 - 2AE.\ E\Delta$. τῶν ἴσων δὲ ἀφαιρεθέντων καὶ προστεθέντων, ἔσεται $\overline{B\Gamma}^2 + 2.\ \Gamma E.\ E\Delta + 2AE.\ E\Delta = \overline{AB}^2$. ἐπεὶ δὲ ἡ ΓΕ = ΑΕ, ἄρα $\overline{B\Gamma}^2 + 4\Gamma E.\ E\Delta = \overline{AB}^2$. διὸ $4.\Gamma E.\ E\Delta = \overline{AB}^2 - \overline{B\Gamma}^2$. ἄρα τῶν ἴσων διαιρεθέντων διὰ τοῦ αὐτοῦ $4\Gamma E$, ἔσεται $E\Delta = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{B\Gamma}^2}{4\Gamma E}$, ἤτοι $E\Delta = \frac{2500 - 900}{128} = \frac{1600}{128} = 12\frac{1}{2}$

Χρῆσις τῶν προεκτεθέντων Θεωρημάτων τε καὶ Προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Δύω τόπων, τῶν Α καὶ Β, τῶν ἀπό τινος τρίτου Γ προσιτῶν εὑρεῖν τὸ ἀπόστημα ΑΒ. χ. 30.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐν ἑκάστῳ τῶν Α, Β, Γ τόπων βακτηρίαν πήξας, καὶ λεπτὰ ἐπιζεύξας σχοινία τὰ ΓΒ, ΓΑ, καὶ ὅσον οἷόντε αὐτὰ ἐντείνας, ἵνα μὴ ἐπικάμπτῃ, ἀλλ' εὐθέα ὦσι, διὰ μὲν τοῦ καλουμένου Γωνιομέτρου τὴν γωνίαν Γ, διὰ δὲ τοῦ τυχόντος μέτρου τὰ σχοινία καταμέτρησον. καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου γνωσταί εἰσιν αἱ δύω πλευραὶ ΓΒ, ΓΑ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία

(ι) Κατὰ τὴν ζ. τοῦ β.

νία ΑΓΒ, γνωστὴ ἔσαι καὶ ἡ λοιπὴ τοῦ τριγώνου πλευρὰ ΑΒ, (κ) ἥτις ἐστὶ τὸ ζητούμενον ἀπόστημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

Τοῦ προσιτοῦ πύργου ΒΓ τὸ ὕψος εὑρεῖν. χ. 31.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τόπον εὑρὼν τὸν Α πρὸς τὸ ὁρᾷν τὴν τοῦ πύργου κορυφὴν Β ἐπιτήδειον, βακτηρίαν τὴν ΑΕ πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι πῆξον. ἐπιζεύξας δὲ λεπτὸν χοινίον τὸ ΑΔ παραλλήλως τῇ ὁριζοντίῳ ΕΓ, τὸν Γωνιομέτρην τε ἐπὶ τὸ Α στήσας, διὰ τῆς διόπτρας τὸ πέρας τῆς τοῦ πύργου κορυφῆς Β ὅρα. καταμέτρησον δὲ τήν τε ΒΑΔ γωνίαν, τὴν ὑπὸ τοῦ χοινίου ΑΔ καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ φωτὸς τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος Β ἐπὶ τὸν ὀφθαλμὸν πεμπομένης περιεχομένην, ἔτι δὲ καὶ τὸ ΑΔ χοινίον. καὶ ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ γνωσαί εἰσι δύω γωνίαι, ἥτε καταμετρηθεῖσα ΒΑΔ καὶ ἡ ὀρθὴ ΑΔΒ, ἔτι δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΒΔ. (λ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΓ γνωστὴ, ὡς ἴση τῇ ΑΕ, γνωστὴ ἄρα καὶ ὅλη ἡ ΒΓ, τουτέστι τὸ ζητούμενον ὕψος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

Τὸ ἀπόστημα ΑΒ εὑρεῖν δύω τόπων τῶν Α καὶ καὶ Β, ὧν ὁ ἕτερος μόνον Α προσιτός. χ. 32.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐν τῷ τυχόντι τόπῳ Γ, ἐξ οὗ ὁρατὸς μὲν ὁ Β, προσιτὸς δὲ ὁ Α, βακτηρίαν στήσας, ὡσαύτως καὶ τῷ Α τόπῳ, καὶ λεπτὸν χοινίον τὸ ΑΓ ἐπιζεύξας καὶ ἐντείνας, καὶ ἀπὸ ἑκατέρου τῶν τόπων Α καὶ Γ, τὸν Β θεασάμενος, τὰς ΒΑΓ, ΒΓΑ γωνίας, ᾧ ἐν τῷ προλαβόντι προ-

(κ) Κατὰ τὸ θ΄. πρόβλ. (λ) Κατὰ τὸ γ΄. πρόβλ.