δες αὗται ἴσαι εἰσὶ πυραμίδι ὕψος ἐχούσῃ τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ ἴσην ὅλῃ τῇ τοῦ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ· ἡ πυραμὶς ἄρα ἡ ὕψος ἔχουσα τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ βάσιν ἴσην τῇ τοῦ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ ἴση ἐστὶ τῷ πολυέδρῳ. ἐπεὶ δὲ αἱ πυραμίδες αἱ ἐγγεγραμμέναι τε καὶ περιγεγραμμέναι περὶ τοὺς κώνους, εἰς αὐτοὺς ἀπολήγουσιν· (ν) ἔχουσι δὲ αἱ τοιαῦται πυραμίδες τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν τοῖς κώνοις, ὡς δῆλον· καὶ ὁ κῶνος ἄρα, οὗ τὸ μὲν ὕψος ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡ δὲ βάσις τῇ τοῦ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένου πολυέδρου ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ τῷ πολυέδρῳ.

ΛΗΜΜΑ Ζ'.

Πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ πολύεδρον τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν ἀπολήγει, (ξ) δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυέδρου εἰς τὴν τῆς σφαίρας ἀπολήγει ἐπιφάνειαν. καὶ ἐπεὶ τὸ πολύεδρον τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον ἴσον ἐστὶ κώνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πολυέδρου, (ο) καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ἴση ἐστὶ κώνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ τῆς σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ, βάσιν δὲ τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ ἴσην.

ΘΕΩ-

(ν) Κατὰ τὸ δ'. Λῆμ. τὸ μετὰ τὴν θ'. προτ. τοῦ ιβ'. βιβλ.
(ξ) Κατὰ τὸ ε. Λῆμ. (ο) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΑ'. (π)

Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. (ρ) ὁ κῶνος ἄρα ὁ ἔχων βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τετραπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος, καὶ βάσιν ἴσην τῷ μεγίστῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων. οἱ γὰρ ἰσοϋψεῖς κῶνοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. (σ) ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. (τ) καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Πᾶν ἄρα ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι κώνου, τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος τῷ ἡμισφαιρίῳ. τὸ μὲν γὰρ τοῦ ἡμισφαιρίου ὕψος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐστίν, ἡ δὲ βάσις ὁ μέγιστος τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων. ἐπεὶ οὖν ἡ σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ τοιούτου κώνου, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιον αὐτοῦ ἐστί.

(π) Τοῦ Ἀρχιμ. λβ'. τοῦ αὐτ. βιβλ. (ρ) Κατὰ τὸ προλ. Θεώρ. (σ) Κατὰ τὴν ιά. τοῦ ιβ'. (τ) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Ἐντεῦθεν δοθείσης τῆς ἡμιδιαμέτρε της σφαίρας, τήντε ἐπιφάνειαν καὶ αὐτὴν τὴν σφαῖραν καταμετρῆσαι πάνυ ῥάδιον. εὑρεθέντος γὰρ τε μεγίςε τῶν ἐν αὐτῇ κύκλων, (υ) τὸ τετραπλάσιον αὐτε ἴσον ἔςαι τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ. ταύτης δὲ διὰ τε τριτημορίε τῆς ἡμιδιαμέτρε πολλαπλασιαθείσης, τὸ γινόμενον τὴν σφαῖραν ἐμφαίνει, καθάπερ δὴ καὶ τὸν κῶνον τὸν αὐτῇ ἴσον. (φ)

ΣΧΟΛΙΟΝ

Ἔςω ἡ τῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος ἴση ποσὶν 6. ἡ ἄρα διάμετρος αὐτῆς ἴση 12. τῶν 7, 22, καὶ 12 ἡ τετάρτη ἀνάλογος ἡ 12. 22 διὰ τε ἡμίσεως τῆς ἡμιδιαμέτρε, εἴτεν διὰ τε 3 7 πολλαπλασιαθήτω. ἐκεν τὸ γινόμενον 12. 22. 3, τὸν μέγιςον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐμφαίνει κύκλον. 7 (χ) ἔτος τετραπλασιαθεὶς, τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν παρίςησιν, (ψ) ἴσην 12. 22. 3. 4. ἐὰν ἐν ἡ ἐπιφάνεια αὕτη διὰ τε τριτημορίε τῆς 7 ἡμιδιαμέτρε πολλαπλασιαθῇ, ἤτοι διὰ τε 2, τὸ γινόμενον 12. 22. 3. 4. 2. $=$ 6336 $=$ 905 $+ \frac{1}{7}$ ἴσον τῇ σφαίρᾳ. ὅπερ 7 δηλοῖ, ὅτι ἡ ζητεμένη σφαῖρα ἴση ἐςὶ κύβοις ποδιαίοις 905, καὶ ἔτι $\frac{1}{7}$ ποδιαίε κύβ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

(υ) Κατὰ τὸ β΄. πόρ. τὸ μετὰ τὸ β΄. Θεώρ. (φ) Κατὰ τὸ πόρ. τε Λήμ. τε μετὰ τὴν θ΄ πρότ. τε ιβ΄. βιβλ. (χ) Κατὰ τὸ αὐτ. πόρ. (ψ) Κατὰ τὸ ι. Θεώρ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. (ω)

Πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, (περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν ἐννοεῖται κύλινδρος.) ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. ὁ μὲν γὰρ εἰρημένος κύλινδρος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. (ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ τὴν αὐτὴν ἔχων βάσιν καὶ ὕψος ἴσον τῷ κώνῳ τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου. (α) ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ τὴν αὐτὴν μὲν βάσιν ἔχων τῷ κώνῳ, διπλάσιον δὲ ὕψος, ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου.) ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία. (β) δῆλον οὖν ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας.

Καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰρημένου κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται (γ) κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως· τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως· ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου τετραπλάσιός ἐστι τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ· ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. (δ) ὅλη ἄρα ἡ ἐπι-

(ω) Τοῦ Ἀρχιμ. μετὰ τὸ λβ΄. Θεώρ. τοῦ α΄ βιβλ. κάμ. (α) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ιβ. (β) ἐν τῷ ια΄ Θεωρ. (γ) Κατὰ τὸ γ. Θεώρ (δ) Κατὰ τὸ ι. Θεώρ.

ἐπιφάνεια τῦ κυλίνδρυ ἡμιολία ἐςὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

Αἱ ἐπιφάνειαι τῦ κώνυ καὶ τῦ κυλίνδρυ τῶν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένων, καὶ ἡ τῆς σφαίρας εἰσ πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ συνεχεῖ ἡμιολίῳ. ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν τῦ κώνυ ἐπιφάνεια τῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένυ ἑξαπλάσιός ἐςι τῦ μεγίςυ κύκλυ, (ε) ἡ δὲ βάσις αὐτῦ τριπλασία· (ζ) ὅλη ἄρα ἡ τῦ κώνυ ἐπιφάνεια ἐννεαπλάσιος τῦ μεγίςυ κύκλυ. ἔςι δὲ ὅλη ἡ τῦ κυλίνδρυ ἐπιφάνεια τῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένυ ἑξαπλάσιος τῦ μεγίςυ κύκλυ, (η) ἡ ἄρα τῦ κώνυ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῦ κυλίνδρυ λόγον ἔχει ὃν 9 : 6. ἀλλ' ἡ τῦ κυλίνδρυ πρὸς τὴν τῆς σφαίρας λόγον ἔχει, ὃν 6 : 4· (θ) αἱ ἄρα ἐπιφάνειαι τῦ κώνυ καὶ τῦ κυλίνδρυ τῶν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένων καὶ ἡ τῆς σφαίρας εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ συνεχεῖ ἡμιολίῳ, ἤτυν ὡς 9 : 6 : : 6 : 4.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΒ΄. (*)

Παντὶ τομεῖ σφαίρας, ἴσος ἐςὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῦ τμήματος τῆς σφαίρας τῦ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τῦ κέντρυ τῆς σφαίρας.

Δειχθήσεται τῦτο, ὡς καὶ τὸ ἐν τῷ Ζ΄ λήμματι προτεθέν.

ΘΕΩ

(ε) Κατὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τῦ ϛ΄. Θεωρ. (ζ) Κατὰ τὴν β΄. Συνέπ. τῦ αὐτ. Θεώρ. (η) Κατὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τῦ γ΄. Θεωρ. (θ) Κατὰ τὸ προλ. Πόρ. (*) Τῦ Ἀρχιμ. μβ. τῦ αὐ βιβλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΓʹ. (*)

Παντὶ τμήματι σφαίρας ἴσος ἐςὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τȣ̃ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερα, ἥτε ἐκ τȣ̃ κέντρȣ τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τȣ̃ λοιπȣ̃ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τȣ̃ λοιπȣ̃ τμήματος.

Ἔςω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιςος κύκλος, ȣ̃ διάμετρος ἡ ΒΖ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα τῷ διὰ τῆς ΚΛ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΖ. καὶ ἔςω κέντρον τὸ Γ. καὶ πεποιήσθω ὡς ΑΟ πρὸς ΒΟ, ȣ̔́τω συναμφότεραι αἱ ΒΓ, ΖΟ, πρὸς τὴν ΖΟ, εἴτȣν ὡς ΑΟ : ΒΟ : ΒΓ + ΖΟ : ΖΟ. καὶ πάλιν πεποιήσθω ὡς ΗΟ : ΖΟ : ΖΓ + ΒΟ : ΒΟ. καὶ ἀναγεγράφθωσαν κῶνοι ἀπὸ τȣ̃ κύκλȣ τȣ̃ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ, κορυφὰς ἔχοντες τὰ Α, Η σημεῖα. λέγω ὅτι ἴσος ἐςὶν ὁ μὲν ΚΑΛ κῶνος τῷ κατὰ τὸ Β τμήματι, εἴτȣν τῷ ΚΒΛ· ὁ δὲ ΚΗΛ κῶνος τῷ κατὰ τὸ Ζ, ἤτοι τῷ ΚΖΛ τμήματι. σχ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΖ, ΛΒ, ΛΓ, ΛΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΑΟ : ΒΟ :: ΒΓ + ΖΟ : ΖΟ, (ι) καὶ διαιρεθέντα ἄρα ἔςαι ὡς ΑΟ − ΒΟ : ΒΟ :: ΒΓ + ΖΟ − ΖΟ : ΖΟ, (κ) εἴτȣν ὡς ΑΒ : ΒΟ :: ΒΓ : ΖΟ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΒΟ : ΖΟ. (λ) καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ΖΟ : ΒΟ ::

(*) Τȣ̃ Ἀρχιμ. β΄. τȣ̃ β΄. βιβλ. (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν ιϛ΄. τȣ̃ ε΄. (λ) Κατὰ τὴν ζ΄. τȣ̃ αὐτ.

ΒΟ : : ΒΓ : ΑΒ. (μ) ἄρα καὶ ὡς ΟΖ. ΒΟ : $\overline{\text{ΒΟ}}^2$: : ΒΓ : ΑΒ. (ν) ἀλλ' ΟΖ. ΒΟ $=$ $\overline{\text{ΚΟ}}^2$. (ξ) ἄρα ὡς $\overline{\text{ΚΟ}}^2$: $\overline{\text{ΒΟ}}^2$: : ΒΓ : ΑΒ. καὶ ἀνάπαλιν δὲ ὡς $\overline{\text{ΒΟ}}^2$: $\overline{\text{ΚΟ}}^2$: : ΑΒ : ΒΓ. καὶ συντεθέντα δὲ $\overline{\text{ΒΟ}}^2 + \overline{\text{ΚΟ}}^2$: $\overline{\text{ΚΟ}}^2$: : ΑΒ $+$ ΒΓ : ΒΓ. ἀλλὰ $\overline{\text{ΒΟ}}^2 + \overline{\text{ΚΟ}}^2 = \overline{\text{ΚΒ}}^2$, (ο) καὶ ΑΒ $+$ ΒΓ $=$ ΑΓ. ἄρα ὡς $\overline{\text{ΚΒ}}^2$: $\overline{\text{ΚΟ}}^2$: : ΑΓ : : ΒΓ. ἄρα ὁ κῶνος, ὁ ὕψος μὲν ἔχων τὴν ΒΓ, βάσιν δὲ τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΚΒ, ἴσος τῷ κώνῳ, τῷ ὕψος μὲν ἔχοντι τὴν ΑΓ, βάσιν δὲ τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΚΟ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ τὰ ὕψη ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. (π) ἀλλ' ὁ κῶνος, ὁ ὕψος μὲν ἔχων τὴν ΒΓ, βάσιν δὲ τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση τῇ ΚΒ, ἴσος τῷ ΓΚΒΛ τομεῖ. (ρ) ὁ ἄρα ΓΚΒΛ τομεὺς ἴσος κώνῳ τῷ ὕψος μὲν ἔχοντι τὴν ΑΓ, βάσιν δὲ κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΚΟ. κοινὸς προσκείσθω ὁ ΚΓΛ κῶνος. ὁ κῶνος ἄρα ὁ ὕψος μὲν ἔχων συναμφοτέρας τὰς ΑΓ, ΓΟ, εἴτουν τὴν ΑΟ, βάσιν δὲ κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΚΟ, ἤτοι ὁ κῶνος ΚΑΛ ἴσος τῷ σφαιρικῷ τμήματι ΚΒΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ὁ κῶνος ΚΗΛ ἴσος τῷ σφαιρικῷ τμήματι ΚΖΛ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΚΒΛ, πρὸς τὸ ΚΖΛ τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΗΟ. τὸ μὲν γὰρ ΚΒΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΑΛ κώνῳ, τὸ δὲ ΚΖΛ τῷ ΚΗΛ. ἀλλ' ὁ ΚΑΛ κῶνος, πρὸς τὸν ΚΗΛ κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ, πρὸς τὴν ΗΟ. (σ) ἄρα καὶ τὸ ΚΒΛ τμῆμα, πρὸς τὸ ΚΖΛ τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΗΟ.

ΠΟ-

(μ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς αὐτ. (ν) Κατὰ τὴν α'. τοῦ ϛ'. (ξ) Κατὰ τὴν β' Συνέπ. τῆς η', τοῦ ϛ'. (ο) Κατὰ τὴν μζ'. τοῦ α'. (π) Κατὰ τὴν ιε'. τοῦ ιβ'. (ρ) Κατά τε τὸ προλ. Θεώρ. καὶ τὴν γ'. Συνέπ. τοῦ θ'. Θεωρ. (σ) Κατὰ τὴν ιδ'. τοῦ ιβ'.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Τὸ ΚΒΛ τμῆμα, πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ΚΒΛ κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΒΟ. τὸ γὰρ ΚΒΛ τμῆμα, πρὸς τὸν ΚΒΛ κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ὁ ΚΑΛ κῶνος, πρὸς τὸν ΚΒΛ κῶνον. ἀλλ' ὁ ΚΑΛ κῶνος, πρὸς τὸν ΚΒΛ κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΒΟ. (τ) ἄρα καὶ τὸ τμῆμα ΚΒΛ, πρὸς τὸν κῶνον ΚΒΑ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΕΟ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΛ τμῆμα, πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΗΟ πρὸς τὴν ΖΟ.

ΤΕΛΟΣ
ΤΩΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ.

ΤΡΙ-

(τ) Κατὰ τὴν αὐτ.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Τριγωνομετρία ἐπίπεδος ἐστὶν ἐπιστημονικὴ μέθοδος τοῦ τὸ μέτρον τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τῶν εὐθυγράμμων εὑρίσκειν τριγώνων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦτό ἐστι, τριῶν μὲν δοθεισῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, τὸ τῶν γωνιῶν εὑρίσκειν μέτρον· δύω δὲ καὶ μιᾶς τῶν γωνιῶν, τὴν λοιπὴν πλευρὰν καὶ τὰς δύω γωνίας· μιᾶς δὲ καὶ τῶν δύω γωνιῶν, τὰς λοιπὰς δύω πλευρὰς καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν. ἐπειδὰν δὲ μόνον αἱ τρεῖς δεδομέναι ὦσι γωνίαι, τότε τὸν λόγον ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ πλευραὶ εὑρίσκομεν, οὐ μὴν δὲ καὶ τὸ τούτων μέτρον.

Β'. Ἡ ΕΔ, ἡ ἀπό τινος σημείου Ε τῆς τοῦ ἡμικυκλίου περιφερείας ΒΕΖΑ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ ὀρθὸν ἡμίτονόν ἐστι τοῦ τε τόξου ΒΕ καὶ τοῦ ΕΖΑ τοῦ ἀναπληρώματος αὐτοῦ πρὸς τὴν τοῦ ἡμι-

ἡμικυκλίου περιφέρειαν. ἐπιζευχθείσης δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὸ σημεῖον Ε τῆς ΚΕ, ἡ αὐτὴ ΕΔ ὀρθὸν ἡμίτονόν ἐστι τῆς τε ΕΚΒ γωνίας, τῆς ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΕΒ καταμετρουμένης, καὶ τοῦ ἀναπληρώματος αὐτῆς πρὸς τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας, εἴτουν τῆς ΕΚΑ γωνίας τῆς καταμετρουμένης ὑπὸ τοῦ ΕΖΑ τόξου. πίν. Α΄. χ. 1.

Γ΄. Ἡ μὲν ΕΘ ἡ ἀπὸ τῆς τοῦ σημείου Ε περιφερείας πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ΖΓ, ὀρθὸν οὖσα ἡμίτονον τοῦτε ΕΖ τόξου, τοῦ ὄντος παραπληρώματος τοῦ τόξου ΕΒ πρὸς τὸ τοῦ κύκλου τεταρτημόριον, καὶ τῆς ΕΚΖ γωνίας, (α) ἥτις ἐστὶ παραπλήρωμα τῆς ΕΚΒ πρὸς μίαν ὀρθήν, **Συνημίτονον** λέγεται τοῦτε τόξου ΕΒ καὶ τῆς γωνίας ΕΚΒ· ἡ δὲ ΒΔ, ἡ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου Β καὶ τῆς τόμης Δ, τῆς ἀπὸ τῆς καθέτου ΕΔ γινομένης, ἀπολαμβανομένη, **Πλάγιον ἡμίτονον**, ἢ **Παρημίτονον** τοῦ τε τόξου ΕΒ καὶ τῆς ΕΚΒ γωνίας.

Δ΄. Ἡ τοῦ κύκλου ἡμιδιάμετρος ΚΒ, ἢ ΚΖ, **Ὁλόκληρον ἡμίτονον**, ἢ **Ὁλοημίτονον** καλεῖται, ἅτε δὴ ὀρθὸν οὖσα ἡμίτονον τοῦ τε τεταρτημορίου ΒΕΖ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τῆς ὑπ᾽ αὐτοῦ καταμετρουμένης ὀρθῆς γωνίας ΖΚΒ. (β)

Ε΄. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ τῆς διαμέτρου πέρατος Β ἁπτομένη ἀχθῇ τοῦ κύκλου ἡ ΒΛ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπί τι σημεῖον Ε τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐπιζευχθεῖσα ΚΕ προαχθῇ ἕως οὗ τὴν ἁπτομένην τέμῃ κατὰ τὸ Η, ἡ μὲν ΒΗ, ἡ ἀπὸ τοῦ τῆς διαμέτρου πέρατος καὶ τῆς εἰρημένης τομῆς Η ἀπολαμβανομένη, τοῦ-

(α) Κατὰ τὸν πρόλαβ. ὁρισμ. (β) Κατὰ τὸν αὐτὸν ὁρισμ.

τοῦτε τόξου ΒΕ καὶ τῆς ὑπ᾽ αὐτοῦ καταμετρουμένης γωνίας ΒΚΕ, Ἐφαπτομένη λέγεται· ἡ δὲ ΚΗ, ἡ ὑπὸ τοῦ κέντρου Κ καὶ τῆς διατομῆς Η περατουμένη, Τέμνουσα τοῦ αὐτοῦ τόξου καὶ τῆς αὐτῆς γωνίας.

ς΄. Ἡ μὲν ΖΙ ἐφαπτομένη οὖσα τοῦ τόξου ΖΕ, τοῦ παραπληρώματος τοῦ ΕΒ τόξου πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, Συνεφαπτομένη καλεῖται τοῦ ΕΒ τόξου· Ἡ δὲ ΚΙ, ἥτις ἐστὶν ἡ τέμνουσα τοῦ τόξου ΖΕ, Συνδιατέμνουσα λέγεται τοῦ αὐτοῦ τόξου ΕΒ.

Ζ΄. Ἡ δύω σημεῖα, τὰ Α, Γ, παντὸς τόξου ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα ΑΓ, χορδὴ καλεῖται. σχ. 2.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὸ τὰ Ἡμίτονα, τὰς Ἐφαπτομένας, καὶ τὰς Τεμνούσας εὑρεῖν δι᾽ ἀριθμῶν ἐμφαινομένας οὐδὲν ἕτερόν ἐστιν, εἰμὴ τὸν λόγον, ἤτοι τὸν ἀληθῆ, ἢ τὸν τοῦ ἀληθοῦς ἐγγύτατον, ὃν ταῦτα ἔχουσι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου ἡμιδιάμετρον, ἐπιδηλῶσαι. διάτοι τοῦτο ἐννοηθείσης τῆς ἡμιδιαμέτρου εἰς 100000, ἢ 1000000 διῃρημένης μέρη, εὑρίσκομεν ὁπόσα τούτων περιέχει ἕκαστον τῶν Ἡμιτόνων, καὶ Ἐφαπτομένων, καὶ Τεμνουσῶν. τοσοῦτον δὲ ἀκριβέστερα τὰ εὑρισκόμενα, ὡς ἐκ τῶν κατωτέρω ῥηθησομένων δῆλον, ὅσον ἂν εἰς πλείονα μέρη διῃρημένη νοηθῇ ἡ ἡμιδιάμετρος. Πρῶτοι δὲ τῶν Ἡμιτόνων εὑρεταὶ ὁ Ἵππαρχος, (γ) καὶ ὁ Μενέλεως. (δ) τὰ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν εὑρεθέντα συνέ-

(γ) Ὁ ἐπὶ Πτολεμαίου τοῦ Φιλομήτορος ἀκμάσας, ἄτων ἔτει πρὸ Χριστοῦ 129. διαφόρους δὲ περὶ Ἄστρων παρατηρήσεις συνέγραψεν ὁ Ἵππαρχος, ἔτι δὲ καὶ τὸ εἰς τὸν Ἄρατον ὑπόμνημα, τὸ ὑπὸ τοῦ Πετάβιου ἐκλατινισθὲν, καὶ τύποις ἐκδοθέν. (δ) Ὁ ἐπὶ Τραϊανοῦ ὁ τρία περὶ Σφαίρας συνθέμενος βιβλία, ὑπὸ τοῦ Μερσεννίου ἐκδοθέντα.

νέτεμέ τε καὶ ἀπήρτισε Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος, (ε) ἐπὶ τὸ τελεώτερον δὲ προήγαγεν ὁ Ῥεγιομοντάνος, καὶ μετ' αὐτὸν ἄλλοι, πίνακας κατασκευάσαντες, τὰ Ἡμίτονα, τὰς Ἐφαπτομένας καὶ τὰς Τεμνούσας περιέχοντας, δι' ἀριθμῶν ἐμφαινομένας, οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ τοὺς τούτων λογαρίθμους. τούτων δὲ τῶν πινάκων ἀκριβέστερος ὁ τοῦ Οὐλάκ, ἅτε δὴ τὴν τοῦ κύκλου ἡμιδιάμετρον εἰς μέρη 10000000 διῃρημένην ἐκλαβόντος, καὶ οὕτω τὸν ἑαυτοῦ κατασκευάσαντος πίνακα. τὸ μὲν οὖν ἕκαστον τῶν Ἡμιτόνων καὶ τῶν Ἐφαπτομένων καὶ τεμνουσῶν εὑρεῖν, πάντη περιττὸν, πινάκων προκειμένων τῶν ταῦτα περιεχόντων· τὸ δὲ εἰδέναι τῷ τρόπῳ εὕρηνται, πάνυγε χρήσιμον. διὸ δὴ τὰ ἑξῆς προκείσθω Θεωρήματά τε καὶ Προβλήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

Τὸ ἥμισυ τῆς ὁποιασοῦν χορδῆς ΑΓ, τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ τῆς χορδῆς τόξου ΑΒΓ, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ὑπὸ τῆς χορδῆς ὑποτεινομένης, καὶ ἐν τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου οὔσης ΑΚΓ γωνίας. σχ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἡ ΚΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ συνεχὲς ἕως οὗ τῷ τόξῳ συμπέσῃ κατὰ τὸ Β.

(ε) Ὁ ἐκ Πηλουσίου, ὁ ἐπικληθεὶς θειότατος καὶ σοφώτατος, ὁ ἐπὶ Ἁδριανοῦ ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ τὸ ἀπὸ Χριστοῦ 138. ἔτος ἀκμάσας, καὶ πολλὰ φιλοπονήσας ἀστρονομικὰ βιβλία. Ὅρα τὸ Γαλλικ. Λεξ. τὸ ἐν Ἀμστερδ. κατὰ τὸ 1770. ἔτος ἐκδοθέν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΚΒ δίχα τέμνει τήν τε ΓΑ κατὰ τὸ Δ, (ζ) καὶ τὸ τόξον ΑΓ κατὰ τὸ Β, (η) ϗ τὴν ΑΚΓ γωνίαν. (θ) ἡ ΓΔ ἄρα τὸ ἥμισυ ἐϛὶ τῆς ΓΑ χορδῆς. ἀλλ' ἡ ΓΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐϛι τȣ̃ τε τόξȣ ΓΒ ϗ τῆς γωνίας ΓΚΒ. (ι) τὸ ἥμισυ ἄρα τῆς ΑΓ χορδῆς τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐϛι τȣ̃ τε ἡμίσεως τȣ̃ τόξȣ ΑΒΓ, ϗ τȣ̃ ἡμίσεως τῆς ΑΚΓ γωνίας, εἴτȣν τῆς ΒΚΓ. ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τȣ̃ 45° μοιρῶν τόξȣ εὑρεῖν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἔϛω τὸ ΓΕΒ τεταρτημόριον κύκλȣ περιφερείας, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. ϗ ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ Κ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ ἡ ΚΔ, ϗ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῷ τόξῳ κατὰ τὸ Ε, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΓ. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΓΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐϛι τȣ̃ τῶν 45° μοιρῶν τόξȣ. ὅπερ ἴσον ἐϛὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ΚΓ τετραγώνȣ. χ. 3.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΒΕΓ τεταρτημόριον κύκλȣ περιφερείας ἐϛίν, (κ) εἴτȣν μοίραις ἴσον 90°, (λ) ἡ δὲ ΚΕ δίχα τέμνει τὸ ΒΕΓ τόξον, (μ) δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ΓΕ τόξον ἴσον ἐϛὶ μοίραις 45°. ὁμοίως καὶ ἡ ὑπ' αὐτȣ̃ καταμετρȣμένη γωνία ΕΚΓ, τȣτέϛιν ἴση ἡμισείᾳ ὀρθῆς. ἀλλ' ἡ ΓΔ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐϛι τȣ̃ τόξȣ ΓΕ, (ν) ἡ ἄρα ΓΔ τὸ

(ζ) Κατὰ τὴν γ'. τȣ̃ γ'. (η) Κατὰ τὴν λ'. τȣ̃ αὐτȣ̃. (θ) Δῆλον ἐκ τῆς η'. τȣ̃ α'. (ι) Κατὰ τὸν β'. ὁρισμ. (κ) Ἐκ τῆς κατασκ. (λ) Πᾶσα γὰρ κύκλȣ περιφέρεια εἰς μοίρας διαιρεῖται 360. (μ) Κατὰ τὴν λ'. τȣ̃ γ'. (ν) Κατὰ τὸν β'. ὁρισμ.

τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστι τοῦ 45° μοιρῶν τόξου. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΔΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ΔΚΓ ἡμίσεια ὀρθῆς δέδεικται, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ΔΓΚ. (ξ) ἴση ἄρα ἡ ΔΚΓ τῇ ΔΓΚ. διὸ καὶ ἡ ΔΚ $=$ ΔΓ. (ο) ἀλλὰ $\overline{ΚΓ}^2 = \overline{ΚΔ}^2 + \overline{ΓΔ}^2$. (π) ἄρα $\overline{ΚΓ}^2 = 2\overline{ΓΔ}^2$. ἄρα $\overline{ΓΔ}^2 = \frac{\overline{ΚΓ}^2}{2}$. ἄρα $ΓΔ = \sqrt{\frac{\overline{ΚΓ}^2}{2}}$, (τὸ $\sqrt{\ }$ σημεῖον τετραγωνικὴν ἐμφαίνει ῥίζαν.) ἴση δηλαδὴ ἡ ΓΔ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ ἡμίσεως τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΓ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Νοείσθω ἡ ΚΓ τετμημένη εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις 10000000. τὸ ἄρα $\overline{ΚΓ}^2 = 100000000000000$. ἀλλὰ $\overline{ΓΔ}^2 = \frac{\overline{ΚΓ}^2}{2}$, ὡς δέδεικται. ἄρα $\overline{ΓΔ}^2 = \frac{100000000000000}{2}$, ἤτοι $\overline{ΓΔ}^2 = 50000000000000$. ἄρα $ΓΔ \doteq 7071068$. ἔστι δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος οὐχ ἡ ἀληθής, ἀλλ' ἡ ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 50000000000000. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἀριθμὸς 50000000000000 οὐκ ἔστι τετράγωνος, διὰ τοῦτο τὴν ἐπ' ἀκριβὲς τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν ἀμήχανον. διὰ τοῦτο δὲ ἐν τῇ προλαβούσῃ σημειώσει εἴρηται, ὅτι εἰς ὅσῳ πλείονα μέρη τετμημένη νοεῖται ἡ ἡμιδιάμετρος, τοσούτῳ ἀκριβέστερα τὰ Ἡμίτονα εὑρίσκεται. ὁμοίαις γὰρ μεθόδοις, εἴτουν ταῖς τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν ἐξαγωγαῖς, τὰ πλεῖστα τῶν Ἡμιτόνων δι' ἀριθμῶν εὑρίσκεται καὶ ἐμφαίνεται, ὡς γνωστῆς δηλονότι καὶ δεδομένης τῆς ἡμιδιαμέτρου λογιζομένης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τοῦ 60° μοιρῶν τόξου εὑρεῖν.

(ξ) Κατὰ τὴν θ'. Συνέπ. τῆς λβ'. τοῦ α'. (ο) Κατὰ τὴν ς'. τοῦ α'. (π) Κατὰ τὴν μζ'. τοῦ α'.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἔςω τὸ ΔΖΒ 60° μοιρῶν τόξον. κ̀ ἀπὸ μὲν τȣ̃ κέντρȣ Κ ἐπὶ τὰ Β, Δ σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΔ· ἀπὸ δὲ τȣ̃ Δ ἐπὶ τὸ Β ἡ ΔΒ. κ̀ ἤχθω ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ Δ ἡ ΔΕ κάθετος τῇ ΒΚ. ἔςαι δὴ ἐν ἡ ΕΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τȣ̃ 60° μοιρῶν τόξȣ. ὅπερ ἴσον ἐςὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τȣ̃ τετραγώνȣ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ΚΔ, κ̀ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ΕΚ.

χ. 4.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΕΔ τὸ ὀρθὸν Ἡμιτονόν ἐςι τȣ̃ ΔΖΒ τόξȣ. (ρ) ἀλλὰ τὸ ΔΖΒ ἴσον μοίραις 60°. (σ) τὸ ΕΔ ἄρα τὸ Ἡμιτονόν ἐςι τȣ̃ 60° μοιρῶν τόξȣ. ἐπεὶ δὲ ΚΔ $=$ ΚΒ, κ̀ γωνία ἄρα ἡ ΚΔΒ $=$ ΚΒΔ. (τ) ἀλλ' ἡ ΔΚΒ ἴση 60° μοίραις, ὡς ὑπὸ τȣ̃ 60° μοιρῶν τόξȣ ΔΖΒ καταμετρȣμένη. ἄρα κ̀ ἑκατέρα τῶν ΚΔΒ, ΚΒΔ ἴση μοίραις 60°. (υ) ἄρα κ̀ ἡ ΔΚΒ $=$ ΔΒΚ. ἄρα καὶ ἡ ΒΕ $=$ ΕΚ. (φ) ἄρα ἡ ΕΚ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ΚΒ. κ̀ ἐπεὶ $\overline{\text{ΚΔ}}^2 = \overline{\text{ΕΔ}}^2 + \overline{\text{ΕΚ}}^2$. ἄρα ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῶν ἴσων τȣ̃ $\overline{\text{ΕΚ}}^2$, ἔσεται $\overline{\text{ΕΔ}}^2 = \overline{\text{ΚΔ}}^2 - \overline{\text{ΕΚ}}^2$. ἄρα $\text{ΕΔ} = \sqrt{\overline{\text{ΚΔ}}^2 - \overline{\text{ΕΚ}}^2}$. τὸ Ἡμίτονον δηλαδὴ τȣ̃ 60° μοιρῶν τόξȣ ἴσον τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τȣ̃ τετραγώνȣ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ΚΔ καὶ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς ΕΚ. ἐπεὶ δὲ ἡ ἡμιδιάμετρος γνωςή, κ̀ τὸ εἰρημένον ὀρθὸν Ἡμίτονον γνωςὸν ἔςαι.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν κύκλȣ ἡμιδιάμετρος ἡ ΚΔ δίχα τμηθῇ κατὰ τὸ Ε, ἀχθῇ δὲ αὐτῇ ἀπὸ τȣ̃ Κ κέν-

(ρ) Κατὰ τὸν β'. ὁρισμ. (σ) Ἐκ τῆς κατασκ. (τ) Κατὰ τὴν ε. τȣ̃ α'. (υ) Ἐκ τῆς λβ. τȣ̃ α'. δῆλον. (φ) Ἐκ τῆς ϛ'. τȣ̃ α'. δῆλον.

κέντρȣ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΓ, ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς ΕΓ, ληφθῇ τῇ ΕΓ ἴση ἡ ΕΘ, ἡ ἀπὸ τȣ̃ Θ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθεῖσα ΘΓ, πλευρὰ ἔςαι κανονικȣ̃ πενταγώνȣ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἐγγραφθησομένȣ. χ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΘΓ. (χ) ϗ ἀχθείσης ἀπὸ τȣ̃ Β τῆς ΒΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΔ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΘ, ΒΚ, ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ ΑΒΚ τριγώνῳ ἤχθη ἡ ΒΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΚ, (ψ) ἄρα $\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 - 2AK.KH$. (ω) ἀλλ' $\overline{AB}^2 = \overline{\Theta\Gamma}^2$. (α) ἄρα $\overline{\Theta\Gamma}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 - 2AK.KH$. ἀλλὰ $\overline{\Theta\Gamma}^2 = \overline{\Theta K} + \overline{K\Gamma}^2$. (β) ἄρα $\overline{\Theta K}^2 + \overline{K\Gamma}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 - 2AK.KH$. ἀλλὰ $\overline{KB}^2 = \overline{K\Gamma}^2$. τῶν ἴσων ἄρα ἀφαιρεθέντων ; ἔσεται $\overline{\Theta K}^2 = \overline{AK}^2 - 2AK.KH$. ἐπεὶ δὲ ἡ ΑΚ ὡς ἔτυχε τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ἄρα $\overline{AK}^2 = AK.K\Theta + AK.A\Theta$. (γ) ἀλλ' $AK.A\Theta = \overline{\Theta K}^2$, ὡς κατωτέρω δειχθήσεται. ἄρα $\overline{AK}^2 = AK.K\Theta + \overline{\Theta K}^2$. τῶν ἴσων δὲ ἑκατέρωθεν ἀφαιρεθέντων, ἔσεται $\overline{AK}^2 - AK.K\Theta = \overline{\Theta K}^2$. ἀλλὰ $\overline{\Theta K}^2 = \overline{AK}^2 - 2AK.KH$, ὡς δέδεικται. ἄρα $\overline{AK}^2 - AK.K\Theta = \overline{AK}^2 - 2AK.KH$. ἀφαιρεθέντων δὲ τῶν ἴσων, ἔςαι $-AK.K\Theta = -2AK.KH$, ἤτοι $AK.K\Theta = 2AK.KH$. ἄρα 2ΑΚ : ΑΚ :: ΚΘ : ΚΗ. (δ) ἀλλὰ 2ΑΚ διπλασία τῆς ΑΚ. ϗ ἡ ΚΘ ἄρα διπλασία τῆς ΚΗ. διὸ ἡ ΚΗ = ΗΘ. ἐν τοῖς τριγώνοις ȣ̃ν ΒΗΚ, ΒΗΘ αἱ μὲν ΚΗ, ΗΒ

(χ) Κατὰ τὴν ά. τȣ̃ δ'. (ψ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ω) Κατὰ τὴν ιγ'. τȣ̃ β'. (α) Ἐκ τῆς κατασκ. δῆλον. (β) Κατὰ τὴν μζ'. τȣ̃ α'. (γ) Κατὰ τὴν β'. τȣ̃ β'. (δ) Κατὰ τὴν ιε'. τȣ̃ ε'.

ΗΒ ἴσαι ταῖς, ΘΗ, ΗΒ, αἱ δὲ πρὸς τῷ Η γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις. (ε) ἄρα καὶ ἡ ΒΘ = ΒΚ. ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ ΘΒΚ τρίγωνον, καὶ γωνία ἡ ΒΘΚ = ΒΚΘ. (ζ) ἐπεὶ δὲ ὡς ΔΘ : ΔΚ :: ΔΚ : ΘΚ, (κατωτέρω δειχθήσεται) ἄρα καὶ ΔΘ : ΘΒ :: ΘΒ : ΘΚ. δέδεικται γὰρ ἡ ΘΒ = ΒΚ = ΔΚ. ὅμοια ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΘΚ, ΒΘΔ. (η) ἰσοσκελὲς ἄρα καὶ τὸ ΒΘΔ τρίγωνον. γωνία ἄρα ἡ ΔΒΘ = ΔΘΒ. (θ) ἀλλ' ἡ ΒΚΘ διπλασία τῆς ΒΔΘ. (ι) ἄρα καὶ ἡ ΒΘΔ διπλασία τῆς ΒΔΘ. τὸ ἄρα ΔΒΘ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. ἑκατέρα ἄρα τούτων ἴση μοίραις 72°, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ ΒΔΘ 36°. αἱ τρεῖς γὰρ ὁμοῦ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, εἴτουν μοίραις 180°. ἄρα καὶ ἡ ΒΚΑ = 72° μοίραις. δέδεικται γὰρ διπλασία τῆς ΒΔΘ. τὸ ΑΖΒ ἄρα τόξον πεμπτημόριόν ἐστι τῆς ὅλης τοῦ κύκλου περιφερείας. ἡ ΑΒ ἄρα, πλευρά ἐστι κανονικοῦ πενταγώνου εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἐγγραφθησομένου. ὃ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ ἡ ΚΑ κατὰ τὸ Θ τέτμηται, ὥστε εἶναι ΑΚ. ΑΘ = $\overline{ΚΘ}^2$, δειχθήσεται οὕτω· κείσθω τὴν ΚΓ δεῖν τμηθῆναι ὥστε εἶναι ΚΓ. ΓΟ = $\overline{ΚΟ}^2$. ἤχθη οὖν πρὸς τὴν ΚΓ κάθετος ἡ ΚΔ, ἥτις δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε. ἐπέζευκται δὲ ἡ ΕΓ, καὶ ἐλήφθη τῇ ΕΓ ἴση ἡ ΕΘ. ἐὰν οὖν ληφθῇ ἡ ΚΟ ἴση τῇ ΚΘ, δῆλον ὅτι ἡ ΚΓ τέτμηται κατὰ τὸ Ο, τῷ ἐπιταχθέντι τρόπῳ. (κ) ἀλλ' ἡ ΚΓ = ΚΑ. καὶ ἡ ΚΑ ἄρα τέτμηται, ὥστε εἶναι ΑΚ. ΑΘ = $\overline{ΘΚ}^2$. ὅτι δὲ καὶ ἡ ΔΘ κατὰ τὸν αὐτὸν τέτμηται λόγον κατὰ τὸ Κ, ὥστε εἶναι ΔΘ. ΘΚ = $\overline{ΔΚ}^2$, δείξεις οὕτως· ἡ ΔΚ εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΚΘ. ἄρα ΔΘ.

ΘΚ

(ε) Ἐκ τῆς κατασκ. (ζ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ α. (η) Κατὰ τὴν ς. τοῦ ς. (θ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ α. (ι) Κατὰ τὴν κ. τοῦ γ. (κ) Κατὰ τὴν ιε. τοῦ β.

ΘΚ $+ \overline{KE}^2 = \overline{E\Theta}^2$. (λ) ἀλλ' $\overline{E\Theta}^2 = \overline{E\Gamma}^2$. (μ) ἄρα $\overline{E\Gamma}^2 = \Delta\Theta.\ \Theta K + \overline{KE}^2$. ἀλλ' $\overline{E\Gamma}^2 = \overline{\Gamma K}^2 + \overline{KE}^2$. (ν) ἄρα $\overline{\Gamma K}^2 + \overline{KE}^2 = \Delta\Theta.\ \Theta K + \overline{KE}^2$. τῶν ἴσων δὲ ἀφαιρεθέντων, ἔςαι $\overline{\Gamma K}^2 = \Delta\Theta.\ \Theta K$. ἀλλὰ $\overline{\Gamma K}^2 = \overline{K\Delta}^2$. ἄρα $\overline{K\Delta}^2 = \Delta\Theta.\ \Theta K$. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι ὡς ΔΘ : ΔΚ :: ΔΚ : ΘΚ. (ξ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὸ Ἡμίτονον τοῦ 36° μοιρῶν τόξου εὑρεῖν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ τοῦ ἡμικυκλίου ΑΒΓΔ ἀνιςάσθω ἡ ΚΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΑΔ. καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΔ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθείσης τῆς ΕΓ, εἰλήφθω ἡ ΕΗ = ΕΓ. καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΓ, ἐφηρμόσθω εἰς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἡ ΑΒ = ΗΓ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἤχθω ἡ ΚΘ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΑ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ι. λέγω ὅτι ἡ ΒΘ τὸ ζητούμενον Ἡμίτονόν ἐςιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΚΓ. σχ. 6.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν Τοῖς τριγώνοις ΒΚΘ, ΑΚΘ αἱ μὲν πρὸς τῷ Θ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις, (ο) ἡ δὲ ΚΒΘ = ΚΑΒ, (π) ἡ δὲ ΚΘ κοινή. ἄρα καὶ ἡ ΒΚΘ, ἤτοι ἡ ΒΚΙ ἴση τῇ ΘΚΑ, εἴτουν τῇ ΙΚΑ. (ρ) ἔςι δὲ ὅλη ἡ ΒΚΑ ἴση μοίραις 72°. (ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ πλευρά ἐςι πενταγώνου κανονικοῦ, εἰς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐφηρμοσμένη, (σ) τὸ ΑΙΒ τόξον πεμπτημόριον τῆς ὅλης περιφερείας ἐςίν.) ἡ ἄρα ΒΚΙ

(λ) Κατὰ τὴν ϛ'. τοῦ β'. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. δῆλον. (ν) Κατὰ τὴν μζ'. τοῦ α'. (ξ) Κατὰ τὴν ιϛ'. τοῦ ϛ'. (ο) Ἐκ τῆς κατασκ. (π) Κατὰ τὴν ϛ'. τοῦ α'. (ρ) Κατὰ τὴν κϛ'. τοῦ α'. (σ) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ.