μετρον. ἔςι δὲ ἐν τοῖς ὁμοίοις κυλίνδροις ἄξων πρὸς ἄξονα, (εἴτουν πλευρὰ πρὸς πλευρὰν, ἴσαι γὰρ αἱ πλευραὶ τοῖς ἄξοσιν) οὕτω διάμετρος, πρὸς διάμετρον. (ξ) αἱ ἄρα τῶν ὁμοίων κυλίνδρων ἐπιφάνειαι διπλασίονα λόγον ἔχουσιν, ἤπερ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. (ο)

Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀπ᾽ ἐναντίας κύκλου, ἴση ἐςὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἔςω κύλινδρος ὀρθὸς ὁ ΑΓ, καὶ κύκλος ὁ ΔΕΖ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ΚΖ μέση ἀνάλογον ἔςω τῆς πλευρᾶς ΑΒ, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως ΓΒ, εἴτουν ἔςω ὡς ΑΒ : ΚΖ : : ΚΖ : ΓΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, χωρὶς τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀπεναντίας κύκλου, ἴση ἐςὶ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ. σχ. 6.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συςαθήτω τρίγωνον τὸ ΗΛΜ, οὗ τὸ μὲν ὕψος ΗΛ διπλάσιον ἔςω τῆς ΑΒ πλευρᾶς, ἡ δὲ βάσις ΛΜ ἴση τῇ ΓΘΒ περιφερείᾳ τῆς τοῦ κυλίνδρου βάσεως. ὁμοίως συςαθήτω τὸ ΚΖΝ τρίγωνον, ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΚΖ ἴσην τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, βάσιν δὲ τὴν ΖΝ ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τρίγωνον ΗΛΜ, πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΖΝ λόγον ἔχει συγκείμενον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ΗΛ : ΖΚ, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει

(ξ) Κατὰ τὸν δ΄. ὁρισ. τοῦ αὐτ. (ο) Τοῦ Ἀρχιμ. ιγ΄. ἐν τῷ περὶ σφαίρ. καὶ κυλίνδρ. α΄. βιβλ.

ἔχει ΛΜ : ΖΝ. (π) ἀλλὰ τὸ ΗΛ = 2ΑΒ, (ρ) καὶ ὡς ΛΜ : ΖΝ : : $\frac{ΓΒ}{2}$: ΚΖ. (σ) αἱ γὰρ $\frac{ΓΒ}{2}$ καὶ ΚΖ ἡμιδιάμετροί εἰσι τῶν περιφερειῶν, αἷς ἴσαι εἰσὶν αἱ ΛΜ, ΖΝ. τὸ ἄρα τρίγ. ΗΛΜ, πρὸς τὸ τρίγ. ΚΖΝ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει 2ΑΒ : ΚΖ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει $\frac{ΓΒ}{2}$: ΚΖ, εἴτουν τρίγ. ΗΛΜ : τρίγ. ΚΖΝ : : 2ΑΒ. $\frac{ΓΒ}{2}$: $\overline{ΚΖ}^2$, (τ) ἤτοι τρίγ. ΗΛΜ : τρίγ. ΚΖΝ : : ΑΒ. ΓΒ : $\overline{ΚΖ}^2$. ἀλλὰ τὸ ΑΒ. ΓΒ = $\overline{ΚΖ}^2$. (υ) ἔστι γὰρ ὡς ΑΒ : ΚΖ : : ΚΖ : ΓΒ· (φ) ἄρα τὸ ΗΛΜ = ΚΖΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΗΛΜ τρίγωνον ἴσον τῇ τοῦ κυλίνδρου ΑΓ ἐπιφανείᾳ· ἴσον γὰρ παραλληλογράμμῳ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, (χ) ᾧ ἡ τοῦ κυλίνδρου ΑΓ ἐπιφάνεια ἐστὶν ἴση· (ψ) τὸ δὲ τρίγωνον ΚΖΝ ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ ΔΕΖ. (ω) ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ ΑΓ κυλίνδρου ἴση τῷ ΔΕΖ κύκλῳ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου πρὸς τὴν βάσιν λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως, εἴτουν κληθείσης τῆς μὲν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, Ε, τῆς δὲ βάσεως, Β, ἔσται ὡς Ε : Β : : ΑΒ : $\frac{ΒΓ}{4}$. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ΑΓ ἴση ἐστὶ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ· ἔστι δὲ ὁ κύκλος ΔΕΖ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΓ τετράγωνον. (α) (ἡμιδιάμετρος γὰρ ἡ τῆς ΒΓ ἡμίσεια) ὡς ἄρα Ε : Β : : $\overline{ΚΖ}^2$: $\frac{\overline{ΒΓ}^2}{4}$. ἀλλὰ $\overline{ΚΖ}^2$ =

(π) Κατὰ τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ΄. τοῦ ς΄. τῆς Γεωμ. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκ. (σ) Κατὰ τὴν συνέπ. τὴν μετὰ τὴν β΄. τοῦ ιβ΄. βιβλ. τῆς Γεωμ. (τ) Κατὰ τὸν ζ΄. ὁρισ. τοῦ ε΄. (υ) Κατὰ τὴν ιζ΄ τοῦ ς΄. (φ) Ἐξ ὑποθ. (χ) Ἐκ τῆς μα΄. τοῦ α΄. δῆλον. (ψ) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ. (ω) Κατὰ τὸ α΄. Θεώρ. τοῦ δὲ τοῦ βιβλ. (α) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ιβ΄.

$\mathrm{AB}.\ \mathrm{B\Gamma}$. (β) ὡς ἄρα $\mathrm{E} : \mathrm{B} :: \mathrm{AB}.\ \mathrm{B\Gamma}.\ \frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}^2}}{4}$. ἀλλ' ὡς $\mathrm{AB}.\ \mathrm{B\Gamma} : \frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}^2}}{4} :: \mathrm{AB} : \frac{\mathrm{B\Gamma}}{4}$ (γ) ὡς ἄρα $\mathrm{E} : \mathrm{B} :: \mathrm{AB} : \frac{\mathrm{B\Gamma}}{4}$, (δ) ὅπερ ἐστὶν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ, λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ ΑΒ πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

Β΄. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ΑΓ, τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ ΦΖ. ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΓ κυλίνδρου ἴση ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἀνάλογον τῶν ΒΓ, ΓΔ. (ε) ἔστι δὲ ἡ ΦΖ μέση ἀνάλογος τῶν ΒΓ, ΓΔ. ἴσαι γὰρ ἀλλήλαις αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΦΖ. πίν. Γ. σχ. 7.

Γ΄. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου κυλίνδρου ΑΓ τετραπλασία ἐστὶ τοῦ γεννήτορος τῆς σφαίρας κύκλου ΦΕΖ. ἐπεὶ γὰρ ἡ τοῦ κυλίνδρου ΑΓ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ ἡμιδιάμετρον ἔχοντι ἴσην τῇ ΦΖ, (ζ) εἴτουν διάμετρον διπλασίαν τῆς ΦΖ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΓ κυλίνδρου, πρὸς τὸν ΦΕΖ κύκλον λόγον ἔχει, ὃν ὁ κύκλος ὁ ἔχων διάμετρον διπλασίαν τῆς ΦΖ, πρὸς τὸν κύκλον ΦΕΖ. ἀλλ' οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. (η) ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ΑΓ, πρὸς τὸν ΦΕΖ κύκλον λόγον ἔχει, ὃν ὁ $4 : 1$. ἐὰν γὰρ τεθῇ ἡ $\mathrm{\Phi Z} = 1$, ἔσται ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΓ κυλίνδρου ἴση 2. διὸ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνά εἰσιν 1, καὶ 4.

Δ΄. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ΑΓ σὺν τῇ βάσει ΔΘΓ καὶ τῷ ἀπ' ἐναντίας κύκλῳ ΑΗΒ ἑξαπλασία ἐστὶ τοῦ τῆς σφαί-

(β) Ἐκ τῆς ὑποθ. δῆλον. (γ) Κατὰ τὴν α΄. τοῦ ς΄. (δ) Κατὰ τὴν ε΄. τοῦ ε΄. (ε) Κατὰ τὸ γ΄. Θεώρ. τοῦ δ. τοῦ βιβλ. (ζ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (η) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ιβ΄.

σφαίρας γεννήτορος κύκλου ΦΕΖ. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΓ κυλίνδρου τετραπλασία δέδεικται τοῦ ΦΕΖ κύκλου, ἑκάτερος δὲ τῶν ΔΘΓ, ΑΗΒ κύκλων ἴσος τῷ ΦΕΖ. διὸ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΓ κυλίνδρου σὺν τῇ βάσει ΔΘΓ καὶ τῷ ἀπ᾽ ἐναντίας κύκλῳ ΑΗΒ ἑξαπλασία τοῦ ΦΕΖ κύκλου.

Ε'. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΓ κυλίνδρου, τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΖΗ κυλίνδρου τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένου. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιοί εἰσιν οἱ ΑΓ, ΖΗ κύλινδροι, ὡς δῆλον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΓ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ τετράγωνον. (θ) ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΘΗ τετραγώνου. (ι) ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου κυλίνδρου ΑΓ διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΖΗ κυλίνδρου, τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένου. χ. 8.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ' (κ)

Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ (λ) πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως· ὕψος δὲ, τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

Ἔστω κῶνος ὁ ΗΑΒΓ, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγράφθω ἡ ΗΔΕΖ, ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς,

(θ) Κατὰ τὴν γ'. Συνέπ. τοῦ γ'. Λήμ. (ι) Κατὰ τὴν Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ζ'. τοῦ δ'. τῆς Γεωμ. βιβ. (κ) Τοῦ Ἀρχιμ. η'. ἐν τῷ περὶ σφαίρ. καὶ κυλίνδρ. α'. βιβλ. (λ) Ἰστέον, ὅτι ἰσοσκελὴς κῶνός ἐστιν ὁ τὴν τῆς βάσεως διάμετρον ἴσην ταῖς πλευραῖς ἔχων. ὁ αὐτὸς δὲ καὶ ὀρθός ἐστιν.

τῆς, τουτέστι τὸ ΔΕΖ πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον εἶναι. καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ ΘΚΛ ἴσην ἔχον τὴν μὲν ΘΚ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ πολυγώνου, τὴν δὲ ΛΜ κάθετον τῇ ΘΚ ἴσην τῇ ΗΑ πλευρᾷ τοῦ κώνου. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς ΗΔΕΖ πυραμίδος, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ. ϗ. 9.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ὁ τοῦ κώνου ἄξων ΗΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὁ ΗΚ ἄξων πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ΑΒΓ κύκλῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ δι᾽ αὐτοῦ ἐπίπεδα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. (μ) ἤκται δὲ δι᾽ αὐτοῦ τὸ ΗΚΑ τρίγωνον. τὸ ἄρα ΗΚΑ τρίγωνον πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΑ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τομῇ ΚΑ, (ν) πρὸς ὀρθὰς ἔσται καὶ τῷ ΗΚΑ ἐπιπέδῳ. (ξ) πρὸς ὀρθὰς ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ καὶ τῇ ΗΑ (ο) εἴτουν ἡ ΗΑ καθετός ἐστι τῇ ΔΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ μὲν ΗΒ κάθετός ἐστι τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΗΓ τῇ ΕΖ. διὸ τὸ μὲν τρίγωνον ΗΔΕ $= \frac{ΗΑ.\ ΔΕ.}{2}$ τὸ δὲ ΗΔΖ $= \frac{ΗΒ\ \ ΔΖ}{2}$ τὸ δὲ ΗΖΕ $= \frac{ΗΓ.\ ΖΕ.}{2}$ (π) ταῦτα ἄρα τὰ τρίγωνα, εἴτε ἡ τῆς πυραμίδος ΗΔΕΖ (χωρὶς τῆς βάσεως) ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ $\frac{ΗΑ.\ ΔΕ + ΗΒ.\ ΔΖ + ΗΓ.\ ΖΕ.}{2}$ ἀλλ᾽ ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἅτε δὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς κώνου πλευραί. ἄρα ἡ τῆς πυραμίδος ΗΔΕΖ ἐπι-

φ

(μ) Κατὰ τὴν ιή. τοῦ ιά. (ν) Κατὰ τὴν ιή. τοῦ γ. (ξ) Κατὰ τὴν δ′. τοῦ ιά. (ο) Κατὰ τὸν γ. ὁρισ. τοῦ ιά. (π) Κατὰ τι πρόβλ. τὸ μετὰ τὸ β′. βιβλ.

φάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐςὶ τῷ ΗΛ. $\frac{ΔΕ + ΔΖ + ΖΕ}{2}$ ἀλλ' ἡ μὲν ΗΛ $=$ ΛΜ, ἡ δὲ ΔΕ $+$ ΔΖ $+$ ΖΕ $=$ ΘΚ. (ϱ) ἡ ἄρα τῆς πυραμίδος ΗΔΕΖ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐςὶ τῷ $\frac{ΛΜ.ΘΚ}{2}$, ἤτουν τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἰσοσκελοῦς κώνου ἴση ἐςὶ τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ πλευρὰ, βάσις δὲ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης πυραμίδος, εἰς τὸν κῶνον ἀπολήγει· (σ) ἡ δὲ περίμετρος τῆς βάσεως αὐτῆς, εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου. (τ)

Β'. Αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι ἐν λόγῳ συγκειμένῳ εἰσὶν ἔκ τε τοῦ λόγου, ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ πλευραὶ αὐτῶν, καὶ ἐκ τοῦ λόγου, ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ περιφέρειαι, ἢ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων. αἱ γὰρ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ διάμετροι. (υ) ἐὰν οὖν αἱ τῶν κώνων πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, αἱ ἐπιφάνειαι εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι· ἐὰν δὲ αἱ διάμετροι ἴσαι, εἰσὶν ὡς αἱ πλευραί· ἐὰν δὲ αἱ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ὁμοίως καὶ αἱ διάμετροι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται καὶ αἱ ἐπιφάνειαι

Γ'. Ἐὰν αἱ τῶν κώνων πλευραὶ ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ ὦσι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, ἴσαι ἔσονται αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι· ἐὰν δὲ αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι ὦσιν, αἱ πλευραὶ ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ ἔσονται τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

(ϱ) Ἐξ ὑποθ. (σ) Κατὰ τὸ δ'. Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς ι'. τοῦ ιβ'. (τ) Κατὰ τὸ α'. Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς β'. τοῦ αὐτ. (υ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς β'. τοῦ αὐτ.

Δ'. Αἱ τῶν ὁμοίων κώνων ἐπιφάνειαι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, ἤτοι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. τῶν γὰρ ὁμοίων κώνων, οἱ μὲν ἄξονες ἀνάλογόν εἰσι ταῖς διαμέτροις τῶν βάσεων, (φ) αἱ δὲ πλευραὶ τοῖς ἄξοσιν. ὥστε καὶ αἱ πλευραὶ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. (χ)

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς, χωρὶς τῆς βάσεως, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου.

Ἔστω ἰσοσκελὴς κῶνος ὁ ΑΒΓ, καὶ κύκλος ὁ ΔΙΛ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ΚΛ μέση ἀνάλογον ἔστω τῆς πλευρᾶς ΑΒ, καὶ τῆς ΖΒ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἤτοι ἔστω ὡς ΑΒ : ΚΛ : : ΚΛ : ΖΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΑΒΓ ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ ΔΙΛ. Σχ. 10.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεστάτω τρίγωνον τὸ Χ, ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΘΒ, ἴσην τῇ ΑΒ, βάσιν δὲ τὴν ΒΗ ἴσην τῇ τοῦ κύκλου ΓΜΒ περιφερείᾳ. ὁμοίως συνεστάτω τρίγωνον τὸ Φ, ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΝΟ ἴσην τῇ ΚΛ, βάσιν δὲ τὴν ΟΠ ἴσην τῇ τοῦ κύκλου ΔΙΛ περιφερείᾳ.

ΔΕΙ-

(φ) Κατὰ τὸν δ'. ὁρισ. τοῦ ιβ'. (χ) Ἀρχιμ. ιδ'. τοῦ περὶ σφαίρ. καὶ κυλ. α' βιβλ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τρίγωνον Χ, πρὸς τὸ τρίγωνον Φ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΘΒ : ΝΟ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΗ : ΟΠ. (ψ) ἀλλ' ἡ μὲν ΘΒ = ΑΒ, ἡ δὲ ΝΟ = ΚΛ· (ω) ἔστι δὲ καὶ ὡς ΒΗ : ΟΠ :: ΖΒ : ΚΛ· (α) αἱ γὰρ ΒΗ, ΟΠ ἴσαι ταῖς περιφερείαις τῶν ΓΜΒ, ΔΙΛ κύκλων· (β) τὸ ἄρα Χ πρὸς τὸ Φ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ΑΒ : ΚΛ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ΖΒ : ΚΛ, ἤτουν $X : \Phi :: AB.\,ZB : \overline{K\Lambda}^2$. (γ) ἀλλ' $AB,\, ZB = \overline{K\Lambda}^2$. (δ) ἔστι γὰρ ΑΒ : ΚΛ :: ΚΛ : ΖΒ. (ε) ἄρα καὶ Χ = Φ. ἀλλὰ τὸ μὲν Χ ἴσον τῇ τοῦ κώνου ΑΒΓ ἐπιφανείᾳ, (ζ) τὸ δὲ Φ ἴσον τῷ ΔΙΛ κύκλῳ. (η) ἡ ἄρα τοῦ κώνου ΑΒΓ ἐπιφάνεια ἴση τῷ ΔΙΛ κύκλῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. (θ)

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

Ἔστω ἰσοσκελὴς κῶνος ὁ ΑΒΓ, λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ πρὸς τὴν βάσιν ΓΜΒ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ΑΒ, πρὸς τὴν ΖΒ. σχ. 10.

(ψ) Κατὰ τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ΄. τοῦ ς΄. (ω) Ἐκ τῆς κατασκ. (α) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς β΄. τοῦ ιβ΄. βιβλ. (β) Ἐκ τῆς κατασκ. (γ) Κατὰ τὸν ζ΄. ὁρισ. τοῦ ι΄. (δ) Κατὰ τὴν ιζ΄. τοῦ ς΄. (ε) Ἐξ ὑποθ. (ζ) Κατὰ τὴν α΄. Συνέπ. τοῦ προλαβ. Θεώρ. (η) Κατὰ τὸ α΄. Θεώρ. τοῦ δε τοῦ βιβλ. (θ) Τοῦ Ἀρχιμ. ιε΄. τοῦ αἱρημ. βιβλ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εὑρεθήτω μέση ἀνάλογον τῶν ΑΒ, ΖΒ, ἡ ΚΛ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΛ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΙΛ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ τοῦ κώνου ΑΒΓ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ΔΙΛ κύκλῳ, (ι) ἔχει ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ κώνου, πρὸς τὴν βάσιν ΓΜΒ λόγον, ὃν ὁ ΔΙΛ κύκλος, πρὸς τὸν ΓΜΒ κύκλον. ἀλλ' ὡς ΔΙΛ : ΓΜΒ : : $\overline{\text{ΚΛ}}^2$: $\overline{\text{ΖΒ}}^2$, (κ) ἐστὶ δὲ $\overline{\text{ΚΛ}}^2$ = ΑΒ. ΖΒ. (λ) ὡς ἄρα ΔΙΛ : ΓΜΒ : : ΑΒ. ΖΒ : $\overline{\text{ΖΒ}}^2$. ἀλλ' ὡς ΑΒ. ΖΒ : $\overline{\text{ΖΒ}}^2$: : ΑΒ : ΖΒ. (μ) ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ κώνου, πρὸς τὴν βάσιν ΖΜΒ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ ΑΒ, πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον ΖΒ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου τετραπλασία ἐστὶ τῆς τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου ἐπιφανείας. Περιγεγραμμέναι γὰρ ἐννοείσθωσαν αἱ τοῦ περιγεγραμμένου κώνου πλευραὶ ΕΔ, ΔΦ, ΦΕ (Σχ. 11) περὶ τὸν τῆς σφαίρας γεννήτορα κύκλον ΒΑΓ, ἐγγεγραμμέναι δὲ αἱ τοῦ ἐγγεγραμμένου, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ οὕτως, ὥστε τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΕΔ παράλληλον εἶναι, τὴν δὲ ΒΓ τῇ ΔΦ, τὴν δὲ ΓΑ τῇ ΦΕ. καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν ΔΕΦ, ΔΦΕ γωνιῶν διὰ τῶν ΕΛ, ΦΗ. καὶ ἔσται δὴ ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς Κ τὸ τοῦ κύκλου κέντρον. (ν) ὡσαύτως δίχα τετμήσθωσαν καὶ αἱ ΒΑΓ, ΒΓΑ γωνίαι διὰ τῶν ΑΖ, ΓΘ. καὶ ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἐστὶ τὸ κέντρον, (ξ) τὸ Κ δὲ, καὶ εἰ ἀλλ-

(ι) Κατὰ τὸ προλ. Θεώρ. (κ) Κατὰ τὴν β'. τοῦ ιβ'. (λ) Κατὰ τὴν ιζ'. τοῦ ς'. (μ) Κατὰ τὴν α'. τοῦ αὐτ. (ν) Δῆλον ἐκ τῆς δ. τοῦ δ'. (ξ) Ὅρα τὴν δ'. τοῦ δ'.

ἄλλο σημεῖόν ἐστι τὸ κέντρον. αἱ ἄρα ΑΖ, ΓΘ κατὰ τὸ αὐτὸ Κ ἀλλήλας τέμνουσι, καὶ ταῖς ΕΛ ΦΗ ταυτίζονται. ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΑΓ, ΖΑΒ, ἡ μὲν ΑΓ $=$ ΑΒ, (ο) ἡ δὲ ΑΖ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΓΑΖ $=$ ΒΑΖ, (π) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΑΖΓ $=$ ΑΖΒ, καὶ ἡ ΓΖ $=$ ΒΖ. (ρ) διὸ ἡ ΒΓ διπλασία τῆς ΓΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΦ διπλασία τῆς ΦΛ. καὶ ἐπεὶ, ὡς ΓΛ : ΓΖ :: ΛΚ : ΚΖ· (σ) ἔστι δὲ ἡ ΛΓ διπλασία τῆς ΓΖ, ἄρα καὶ ἡ ΛΚ διπλασία τῆς ΚΖ. ἀλλ' ἡ ΚΛ ἴση τῇ ΛΚ, ἄρα καὶ ἡ ΚΛ διπλασία τῆς ΚΖ. ἀλλ' ὡς ΚΛ : ΛΦ :: ΚΖ : ΖΓ. (τ) ἄρα καὶ ἡ ΛΦ διπλασία τῆς ΖΓ. ὥστε καὶ ἡ ΔΦ διπλασία τῆς ΒΓ. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΦ τετράγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου κώνου ΔΕΦ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ΒΑΓ, ὡς τὸ $\overline{\Delta\Phi}^2 : \overline{\mathrm{B}\Gamma}^2$. (υ) ἐὰν γὰρ μενούσης τῆς ΕΛ, περιενεχθῇ τὸ ΔΕΦ τρίγωνον σὺν τῷ κύκλῳ καὶ τῷ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένῳ τριγώνῳ, ἀπὸ μὲν τῶν τριγώνων ὅμοιοι κῶνοι γενήσονται, ὧν αἱ τῶν βάσεων διάμετροί εἰσιν αἱ ΔΦ, ΒΓ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου ἡ ΒΑΓ σφαῖρα. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου κώνου ΔΕΦ τετραπλασία ἐστὶ τῆς τοῦ ΒΑΓ τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Β΄. Ἡ βάσις τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου τριπλασία ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ τῆς σφαίρας γεννήτορος. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΚΓ $=$ ΚΛ, ἡ δὲ ΚΛ διπλασία τῆς ΚΖ, καὶ ἡ ΚΓ ἄρα διπλασία τῆς ΚΖ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΖ τετράγωνον τεταρτη.

(ο) Ἐξ ὑποθ. (π) Ἐκ τῆς κατασκ. (ρ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ α΄. (σ) Κατὰ τὴν γ΄. τοῦ ς΄. (τ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ς΄. (υ) Κατὰ τὴν δ΄ Συνέπ. τοῦ δ΄. Θεωρ. τοῦ δε τοῦ βιβλ.

τημόριόν ἐϛι τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ τετραγώνου, ἤγουν τὸ
μὲν $\overline{ΖΚ}^2 = 1$, τὸ δὲ $\overline{ΚΓ}^2 = 4$. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΚΓ}^2 = \overline{ΚΖ}^2$ ·
$\overline{ΖΓ}^2$, (φ) τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΓ τετράγωνον ἴσον 3
τεταρτημορίοις τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ τετραγώνου. ἀλλὰ
τὸ $\overline{ΛΦ}^2$ τετραπλάσιον τοῦ $\overline{ΖΓ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΛΦ}^2 : \overline{ΖΓ}^2 ::$
12 : 3, καὶ ὡς $\overline{ΛΦ}^2 : \overline{ΚΓ}^2 :: 12 : 4$, ἤγουν $\overline{ΛΦ}^2$
$\overline{ΚΓ}^2 :: 3 : 1$. ἀλλ' ἡ βάσις τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν
περιγεγραμμένου κώνου, πρὸς τὸν γεννήτορα κύκλον
οὕτω $\overline{ΛΦ}^2 : \overline{ΚΓ}^2$. (χ) ἄρα ἡ βάσις τοῦ κώνου, πρὸ
τὸν κύκλον τὸν γεννήτορα, οὕτω 3 : 1. ὅπερ ἐϛὶν, ὅτ
ἡ βάσις τοῦ κώνου τριπλασία ἐϛὶ τοῦ κύκλου τοῦ γε
νήτορος.

Γ'. Τὸ ὕψος τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου ἰσ
πλεύρου κώνου τριπλάσιόν ἐϛὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆ
σφαίρας. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΚΛ διπλασία ἐϛὶ τῆς ΚΖ
ὡς δέδεικται, ἔϛι δὲ ὡς ΚΛ : ΚΖ :: ΚΦ : ΚΓ, :
ὡς ΚΦ : ΚΓ :: ΚΕ : ΚΑ, (ψ) ἄρα καὶ ὡς ΚΛ
ΚΖ :: ΚΕ : ΚΑ. (ω) διὸ καὶ ἡ ΚΕ διπλασία τῆς Κ
ἡ ἄρα ΕΛ τριπλασία τῆς ΚΓ. τὸ ὕψος ἄρα τ
περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου κώνου τριπλάσιό
ἐϛι τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας.

Δ'. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμ
νου ἰσοπλεύρου κώνου ἑξαπλασία ἐϛὶ τοῦ τῆς σφαίρ
γεννήτορος κύκλου. ἡ μὲν γὰρ βάσις τοῦ κώνου πρ
τὸν γεννήτορα κύκλον λόγον ἔχει ὃν 3 : 1. (α) ἀλλ'
ἐπιφάνεια τοῦ κώνου διπλασία ἐϛὶ τῆς βάσεως α
τοῦ. (β) ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν γ
νήτορα κύκλον, ὡς 6 : 1, ἤγουν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώ
ἑξαπλασία ἐϛὶ τοῦ γεννήτορος κύκλου.

Ε

(φ) Κατὰ τὴν μζ'. τοῦ ά. (χ) Κατὰ τὴν β'. τοῦ ιβ. (ψ) Κα
τὴν δ'. τοῦ ς'. (ω) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ι. (α) Κατὰ τὴν π
ϐ'. Συνέπ. (β) Κατὰ τὸ ς'. Θεώρ. τοῦ δε τοῦ βιβλ.

ε'. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΓ ὀρθοῦ κυλίνδρου, (σχ. 12.) πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἴσην ἔχοντος ΕΖΔ κώνου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ΑΒ πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου, πρὸς τὴν $\frac{ΕΗ}{2}$, ἤτουν πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου. ἡ μὲν γὰρ τοῦ κυλίνδρου ΑΓ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ἐκ τῆς ΑΒ πλευρᾶς καὶ τῆς ΒΔΓ περιφερείας, (γ) ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗ κώνου ἴση τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ $\frac{ΕΗ}{2}$, βάσις δὲ ἡ περιφέρεια ΖΘΗ. (δ) ὡς ἄρα ἐπιφάν. τοῦ κυλίνδ. πρὸς ἐπιφάν. τοῦ κών. οὕτω ΑΒ. ΒΔΓ : $\frac{ΕΗ}{2}$. ΖΗΘ. ἀλλ' ἡ ΒΔΓ = ΖΘΗ. (ε) ὡς ἄρα ἐπιφάν. τοῦ ΑΓ, πρὸς ἐπιφαν. τοῦ ΕΖΗ :: ΑΒ : $\frac{ΕΗ}{2}$.

ΛΗΜΜΑ Δ'.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΒΑΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Δ τῆς ΒΑ ἤχθω ἡ ΔΖ παράλληλος τῇ ΑΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΑ. ΑΗ = ΒΔ. ΔΖ + ΔΑ. ΔΖ + ΔΑ. ΑΗ. πίν. Δ'. σχ. 13.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πεπληρώσθω γὰρ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΒΑ. ΑΗ ἐστὶ τὸ ΑΓ· τὸ δὲ ΒΔ. ΔΖ, τὸ ΔΚ· τὸ δὲ ΔΑ. ΔΖ, τὸ ΑΖ, ἤτουν τὸ ΖΓ· τὸ δὲ ΔΑ. ΑΗ, τὸ ΑΘ, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ΒΑ. ΑΗ = ΒΔ. ΔΖ + ΔΑ. ΔΖ + ΔΑ. ΑΗ, ἤτοι ΒΑ. ΑΗ = ΒΔ. ΔΖ + ΔΑ. $\overline{ΔΖ + ΑΗ}$.

ΘΕΩ.

(γ) Κατὰ τὸ β'. Λῆμ. τοῦ δε τοῦ βιβλ. (δ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὸ δ'. Θεώρ. τοῦ δε τοῦ βιβλ. (ε) Ἐξ ὑποθ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. (ζ)

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις.

Ἔστω κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΒΓ. καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει· καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ΔΕ. ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω ἡ ΒΗ κύκλος δέ τις ἐκκείσθω ὁ Θ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ΚΘ μέση ἀνάλογον ἔστω τῆς τε ΑΔ καὶ τῶν ΔΖ + ΑΗ: λέγω, ὅτι ὁ Θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ. χ. 14.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείσθωσαν κύκλοι, οἱ Λ, Ι, καὶ τοῦ μὲν Ι κύκλου ἐκ τοῦ κέντρου ΚΙ δυνάσθω τὸ ΒΔ. ΔΖ, εἴτουν ἔστω τὸ $\overline{\text{ΚΙ}}^2 =$ ΒΔ. ΔΖ, τοῦ δὲ Λ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ΚΛ δυνάσθω τὸ ΒΑ. ΑΗ, ἤτοι ἔστω $\overline{\text{ΚΛ}}^2 =$ ΒΑ. ΑΗ:

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΒΑ. ΑΗ = ΒΔ. ΔΖ + ΔΑ. $\overline{\text{ΑΗ} + \text{ΔΖ}}$· (η) ἔστι δὲ τὸ μὲν ΒΑ. ΑΗ $= \overline{\text{ΚΛ}}^2$, τὸ δὲ ΒΔ. ΔΖ $= \overline{\text{ΚΙ}}^2$, τὸ ΔΑ. $\overline{\text{ΑΗ} + \text{ΔΖ}} = \overline{\text{ΚΘ}}^2$. (θ) ἄρα $\overline{\text{ΚΛ}}^2 = \overline{\text{ΚΘ}}^2 + \overline{\text{ΚΙ}}^2$. καὶ ἐπ

(ζ) Τοῦ Ἀρχιμ. ιϛ'. ἐν τῷ περὶ σφαίρ. καὶ κυλίνδρ. α. βιβ.
(η) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ. (θ) Ἐξ ὑποθ.

ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλες εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων τετράγωνα, (ι) ϰ὚ ὁ Λ κύκλος ἄρα ἴσος τοῖς Θ ϰ὚ Ι. ἀλλ᾽ ὁ μὲν Λ κύκλος ἴσος τῇ τȣ͂ ΒΑΓ κώνȣ ἐπιφανείᾳ, ὁ δὲ Ι τῇ τȣ͂ ΒΔΕ. (κ) ϰ὚ ὁ Θ ἄρα κύκλος ἴσος τῇ λοιπῇ τȣ͂ κώνȣ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Η΄. (λ)

Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε ϰ὚ ἰσόπλευρον, ϰ὚ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύȣσαι τὰς πλευρὰς τȣ͂ πολυγώνȣ, αἱ ἐπιζευγνύȣσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τȣ͂ κύκλȣ διάμετρον τȣ͂τον ἔχȣσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνȣσα τὰς μίαν ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων, πρὸς τὴν πλευρὰν τȣ͂ πολυγώνȣ.

Ἔςω κύκλος ὁ ΑΓΕΗ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ. ϰ὚ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΘ, ΓΗ, ΔΖ. λέγω, ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τȣ͂ κύκλȣ διάμετρον, τὴν ΑΕ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχȣσι τῷ τῆς ΒΕ πρὸς ΒΑ. εἴτȣν ὅτι ἐςὶν ὡς ΒΘ + ΓΗ + ΔΖ : ΑΕ :: ΒΕ : ΒΑ. ℅. 15.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΘ, ΔΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΚ, ΛΘΚ ἡ μὲν ΒΚΑ γωνία ἴση τῇ ΘΚΛ, (μ) ἡ δὲ ΚΒΑ = ΚΘΛ. (ν) ϰ὚ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΚ ἴση λοιπῇ τῇ ΚΛΘ. τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΒΚ, ΛΘΚ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσί. (ξ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ἅπαν-

(ι) Κατὰ τὴν β΄. τȣ͂ ιβ΄. (κ) Κατὰ τὸ ι. Θεώρ. (λ) Τȣ͂ Ἀρχιμ. κά. τȣ͂ αὐτ. βιβλ. (μ) Κατὰ τὴν ιέ. τȣ͂ ά. (ν) Κατὰ τὴν κζ΄. τȣ͂ γ΄. (ξ) Κατὰ τὴν δ΄. τȣ͂ ς΄.

ἅπαντα τὰ τρίγωνα ΑΒΚ, ΚΘΛ, ΛΓΜ, ΜΗΝ, ΝΔΟ ΟΖΕ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσίν. ὡς ἄρα ΒΚ : ΚΑ :: ΚΘ : ΚΛ :: ΓΜ : ΜΛ :: ΜΗ : ΜΝ :: ΔΟ : ΟΝ :: ΟΖ : ΟΕ. (ο) ἄρα καὶ ὡς ΒΚ : ΚΑ :: ΒΚ + ΚΘ + ΓΜ + ΜΗ + ΔΟ + ΟΖ : ΚΑ + ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΟ + ΟΕ, (π) εἶτουν ΒΚ : ΚΑ :: ΒΘ + ΓΗ + ΔΖ : ΑΕ, ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΚΑ, ΒΕΑ, ἡ μὲν ΒΑΕ γωνία κοινή, ἡ δὲ ΑΒΚ ἴση τῇ ΒΕΑ, (ρ) ὡς ἄρα ΒΚ : ΚΑ :: ΒΕ : ΒΑ. (σ) ἄρα καὶ ὡς ΒΘ + ΓΗ + ΔΖ : ΑΕ :: ΒΕ : ΒΑ. (τ) ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ΒΘ + ΓΗ + ΔΟ : ΑΟ :: ΒΕ : ΒΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου εὐθειῶν, ὡς ἀπὸ μιᾶς, καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ὑποτεινούσης τὰς κατὰ μίαν ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων τοῦ πολυγώνου πλευρῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΒΘ + ΓΗ + ΔΖ : ΑΕ :: ΒΕ : ΒΑ, ἄρα καὶ ΒΘ + ΓΗ + ΔΖ. ΒΑ = ΑΕ. ΒΕ. (υ) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΒΘ + ΓΗ + ΔΟ : ΑΟ :: ΒΕ : ΒΑ. ἄρα καὶ ΒΘ + ΓΗ + ΔΟ. ΒΑ = ΑΟ. ΒΕ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Θ. (φ)

Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέν-

(ο) Κατὰ τὴν αὐτήν. (π) Κατὰ τὴν θ'. τοῦ ε'. (ρ) Κατὰ τὴν κζ' τοῦ γ'. (σ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς'. (τ) Κατὰ τὴν ι'. τοῦ ε'. (υ) Κατὰ τὴν ις'. τοῦ ς'. (φ) Τοῦ Ἀρχιμ. κδ'. τοῦ αὐτ. βιβλ.

κέντρȣ δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπότε τῆς πλευρᾶς τȣ͂ σχήματος, ϗ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυȣ́σαις τὰς πλευρὰς τȣ͂ πολυγώνȣ.

Ἔςω ἐν σφαίρᾳ μέγιςος κύκλος ὁ ΑΓΕΗ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρόντε καὶ ἀρτιόπλευρον. ϗ ἀπὸ τȣ͂ πολυγώνȣ τȣ͂ ἐγγεγραμμένȣ νοείσθω τὶ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφὲν σχῆμα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΘ, ΓΗ, ΔΖ. κύκλος δέ τις ἐκκείσθω ὁ Ξ. ȣ̔͂ ἡ ἐκ τȣ͂ κέντρȣ ΞΙ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΑΒ, κ. τῆς ἴσης ταῖς ΒΘ, ΓΗ, ΔΖ, ἤτȣν ἔςω $\overline{ΞΙ}^2 = ΑΒ . \overline{ΒΘ + ΓΗ + ΔΖ}$. λέγω, ὅτι ὁ κύκλος ȣ̔͂τος ἴσος ἐςὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τȣ͂ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένȣ σχήματος. χ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείσθωσαν κύκλοι οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. καὶ τȣ͂ μὲν Π ἡ ἐκ τȣ͂ κέντρȣ ΚΠ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΘ, ἤτȣν ἔςω $\overline{ΚΠ}^2 = ΑΒ . \frac{ΒΘ}{2}$· ἡ δὲ ἐκ τȣ͂ κέντρȣ τȣ͂ Ρ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΒΘ, ΓΗ, ἤτοι ἔςω $\overline{ΛΡ}^2 = ΒΓ . \frac{\overline{ΒΘ + ΓΗ}}{2}$· ἡ δὲ ἐκ τȣ͂ κέντρȣ τȣ͂ Σ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΓΗ, ΔΖ, τȣτέςι ἔςω τὸ $\overline{ΜΣ}^2 = ΓΔ . \frac{\overline{ΓΗ + ΔΖ}}{2}$· ἡ δὲ ἐκ τȣ͂ κέντρȣ τȣ͂ Τ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΔ ϗ τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ· ἤτȣν ἔςω $\overline{ΝΤ}^2 = ΕΔ . \frac{ΔΖ}{2}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ τετράγωνα $\overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΛΡ}^2 + \overline{ΜΣ}^2 + \overline{ΝΤ}^2 = \frac{ΑΒ.\ ΡΘ}{2} + \frac{ΒΓ.\ \overline{ΒΘ + ΓΗ}}{2} + \frac{ΓΔ.\ \overline{ΓΗ + ΔΖ}}{2} + \frac{ΕΔ.\ ΔΖ}{2}$. (χ) ἀλλ' αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον γὰρ τὸ πολύγωνον· (ψ) ἄρα $\overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΛΡ}^2 + \overline{ΜΣ}^2 + \overline{ΝΤ}^2 = \frac{ΑΒ.\ \overline{2ΒΘ + 2ΓΗ + 2ΔΖ}}{2}$, ἤτουν $\overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΛΡ}^2 + \overline{ΜΣ}^2 + \overline{ΝΤ}^2 = ΑΒ.\ \overline{ΒΘ + ΓΗ + ΔΖ}$. ἀλλὰ καὶ τὸ $\overline{ΞΙ}^2 = ΑΒ.\ \overline{ΒΘ + ΓΗ + ΔΖ}$. (ω) ἄρα τὸ $\overline{ΞΙ}^2 = \overline{ΚΠ}^2 + \overline{ΛΡ}^2 + \overline{ΜΣ}^2 + \overline{ΝΤ}^2$. καὶ ὁ κύκλος ἄρα Ξ ἴσος τοῖς Π, Ρ, Σ, Τ κύκλοις. ἀλλ' ὁ μὲν Π κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΘΑΒ κώνου· (α) ὁ δὲ Ρ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΒΘ, ΓΗ· ὁ δὲ Σ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΓΗ, ΔΖ, (β) καὶ ἔτι ὁ Τ ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΖΕΔ κώνου. καὶ ὁ Ξ ἄρα κύκλος ἴσος ταῖς εἰρημέναις κωνικαῖς ἐπιφανείαις, ἤτουν τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΕ, τῆς ὑποτεινούσης τὰς μίαν ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων τοῦ πολυγώνου πλευρῶν, ἡ εἰρημένη τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἴση ἔσται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ΞΙ δύναται τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΒΕ περιεχόμενον. ἐπεὶ γὰρ $\overline{ΞΙ}^2 = ΑΕ.\ ΒΕ$, τὸ δὲ $ΑΕ.\ ΒΕ = ΑΒ.\ \overline{ΒΘ + ΓΗ + ΔΖ}$, (γ) ἄρα

(χ) Ἐκ τῆς κατασκ. δῆλον. (ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Ἐξ ὑποθ. (α) Κατὰ τὸ ε. Θεώρ. (β) Κατὰ τὸ ζ. Θεώρ. (γ) Κατὰ τὸ πόρ. τοῦ η. Θεώρ.

ἄρα τὸ $\overline{\Xi I}^2 = AB.\ B\Theta + \Gamma H + \Delta Z$. ἀλλ' ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ $AB.\ \overline{B\Theta + \Gamma H + \Delta Z}$ ἴσος τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. (δ) καὶ ὁ κύκλος ἄρα, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ΑΕ. ΒΕ ἴσος τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ αἱ ἐν τῷ σφαιρικῷ τμήματι ΔΑΖ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΒΕ.

Καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ΑΕ διαμέτρου τῆς σφαίρας καὶ τῆς ΒΕ τῆς ὑποτεινούσης τὰς μίαν ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν. ἐπεὶ γὰρ τὰ εἰς τοὺς κύκλους ἐγγεγραμμένα πολύγωνα εἰς αὐτοὺς ἐναπολήγει, (ε) καὶ αἱ κωνικαὶ ἄρα ἐπιφάνειαι αἱ ἐξ αὐτῶν γινόμεναι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐναπολήγουσι τῆς σφαίρας, τῆς ἐκ τοῦ κύκλου, εἰς ὃν τὰ πολύγωνα ἐγγέγραπται γινομένης. ἀλλ' αἱ εἰρημέναι κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΒΕ, περιεχόμενον· (ζ) καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ἴση τῷ αὐτῷ κύκλῳ. ἴση δὲ ἔσται καὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ διαμέτρου τῆς σφαίρας τετράγωνον. ἐναπολήγοντος γὰρ τοῦ πολυγώνου εἰς τὸν κύκλον, ἡ ΒΕ τῆς ΑΕ ποσότητι διοίσει πάσης δοθείσης ἐλάσσονι. διὸ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΒΕ περιεχόμενον ἴσον τῷ $\overline{AE}^2$ λογίζεται. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΔΑΖ ἐπιφάνεια ἴση κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΒΕ.

δ) Κατὰ τὸ θ'. Θεώρ. (ε) Κατὰ τὸ α'. Λῆμ. τὸ μετὰ τὴν α'. πρότ. τοῦ ιβ'. βιβλ. (ζ) Κατὰ τὴν προλαβ. Συνέπ.

Γ΄. Ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΔ, ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ σφαιρικȣ̃ τμήματος ΔΑΖ ἴση ἔςαι κύκλῳ, ȣ̃ ἡ ἐκ τȣ̃ κέντρȣ ἴση τῇ ΑΔ. ἐπεὶ γὰρ ἡ τȣ̃ σφαιρικȣ̃ τμήματος ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ κύκλῳ, ȣ̃ ἡ ἐκ τȣ̃ κέντρȣ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΒΕ· (η) ἐναποληγȣσῶν δὲ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν εἰς τὴν τȣ̃ σφαιρικȣ̃ τμήματος ἐπιφάνειαν, ἡ ΒΕ τῆς ΑΕ ποσότητι διαφέρει πάσης δοθείσης ἐλάσσονι· ἴση ἄρα ἡ τȣ̃ σφαιρικȣ̃ τμήματος ἐπιφάνεια κύκλῳ, ȣ̃ ἡ ἐκ τȣ̃ κέντρȣ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΑΕ περιεχόμενον, ἤγȣν ἴση τῷ $\overline{\text{ΑΔ}}^2$. ἔςι γὰρ ΑΕ: ΑΔ :: ΑΔ: ΑΟ. (θ) διὸ ΑΕ. ΑΟ $=\overline{\text{ΑΔ}}^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι΄. (ι)

Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐςὶ τȣ̃ μεγίςȣ κύκλȣ τῶν ἐν αὐτῇ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ κύκλῳ Ξ, ȣ̃ ἡ ἐκ τȣ̃ κέντρȣ δύναται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρȣ τȣ̃ μεγίςȣ κύκλȣ τετράγωνον $\overline{\text{ΑΕ}}^2$. (κ) ἀλλ᾽ ὁ κύκλος Ξ τετραπλάσιός ἐςι τȣ̃ μεγίςȣ κύκλȣ ΑΓΕΗ· εἰσὶ γὰρ οἱ κύκλοι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· (λ) ἡ τῆς σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐςὶ τȣ̃ μεγίςȣ κύκλȣ τῶν ἐν αὐτῇ.

ΛΗΜΜΑ Ε΄.

Τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολύεδρον, εἰς αὐτὴν ἀπολήγει.

Νε-

(η) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (θ) Κατὰ τὴν α΄. Συνέπ. τῆς η΄. προτ. τȣ̃ ς΄. (ι) Τȣ̃ Ἀρχιμ. λά. τȣ̃ αὐτ. βιβλ. (κ) Κατὰ τὴν β΄. τῶν προλ. Συνέπ. (λ) Κατὰ τὴν β΄. τȣ̃ ιβ΄.

Νενοήσθω γὰρ περὶ τὴν σφαῖραν Σ (σχ. 17.) πολύεδρον περιγεγραμμένον τὸ ΑΒΓΔΕ. καὶ τετμήσθωσαν αἱ γωνίαι αὐτοῦ δι' ἐπιπέδων, τῶν ΖΗ, ΘΙ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ, ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας Σ. οὐκοῦν προκύψει πολύεδρον περὶ τὴν σφαῖραν Σ περιγεγραμμένον τὸ ΗΘΙΚΛΜΝΞΟ ἔλαττον τῆς σφαίρας διαφέρον ποσότητι, ἤπερ τὸ ΑΒΓΔΕ. ἐὰν οὖν αἱ τοῦ προκύψαντος δευτέρου πολυέδρου γωνίαι καθάπερ καὶ αἱ τοῦ πρώτου τμηθῶσι, τρίτον προκύψει πολύεδρον περὶ τὴν σφαῖραν Σ περιγεγραμμένον, καὶ διαφέρον αὐτῆς ἐλάσσονι ποσότητι ἤπερ τὸ δεύτερον. ὡσαύτως ἐὰν αἱ τοῦ τρίτου πολυέδρου γωνίαι, ὡς εἴρηται, τμηθῶσι, καὶ πάλιν αἱ τοῦ προκύπτοντος τετάρτου, καὶ ὁμοίως αἱ τοῦ πέμπτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον, προκύψει πολύεδρον περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον, καὶ διαφέρον αὐτῆς ποσότητι πάσης δοθείσης ἐλάσσονι. τὸ ἄρα περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολύεδρον εἰς αὐτὴν ἀπολήγει. (μ)

ΛΗΜΜΑ ϛ'.

Τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολύεδρον ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ τινος ὕψος ἡ ἡμιδιάμετρος τῆς σφαίρας, βάσις δὲ ἴση τῇ τοῦ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον πολύεδρον εἰς τοσαύτας διαιρεῖται πυραμίδας, ὅσαι αἱ τοῦ πολυέδρου βάσεις ὕψος τὸ αὐτὸ ἐχούσας, τὴν ἡμιδιάμετρον δηλαδὴ τῆς σφαίρας· πᾶσαι δὲ αἱ πυραμίδες

(μ) Κατὰ τὸν ϛ'. ὁρισμ. τοῦ αὐτ.

δες αὗται ἴσαι εἰσὶ πυραμίδι ὕψος ἐχούσῃ τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ ἴσην ὅλῃ τῇ τοῦ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ· ἡ πυραμὶς ἄρα ἡ ὕψος ἔχουσα τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ βάσιν ἴσην τῇ τοῦ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ ἴση ἐστὶ τῷ πολυέδρῳ. ἐπεὶ δὲ αἱ πυραμίδες αἱ ἐγγεγραμμέναι τε καὶ περιγεγραμμέναι περὶ τοὺς κώνους, εἰς αὐτοὺς ἀπολήγουσιν· (ν) ἔχουσι δὲ αἱ τοιαῦται πυραμίδες τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν τοῖς κώνοις, ὡς δῆλον· καὶ ὁ κῶνος ἄρα, οὗ τὸ μὲν ὕψος ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡ δὲ βάσις τῇ τοῦ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένου πολυέδρου ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ τῷ πολυέδρῳ.

ΛΗΜΜΑ Ζ'.

Πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ πολύεδρον τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν ἀπολήγει, (ξ) δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυέδρου εἰς τὴν τῆς σφαίρας ἀπολήγει ἐπιφάνειαν. καὶ ἐπεὶ τὸ πολύεδρον τὸ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον ἴσον ἐστὶ κώνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, βάσιν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πολυέδρου, (ο) καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ἴση ἐστὶ κώνῳ ὕψος μὲν ἔχοντι ἴσον τῇ τῆς σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ, βάσιν δὲ τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ ἴσην.

ΘΕΩ-

(ν) Κατὰ τὸ δ'. Λῆμ. τὸ μετὰ τὴν θ'. προτ. τοῦ ιβ'. βιβλ.
(ξ) Κατὰ τὸ ε'. Λῆμ. (ο) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ.