τὸ ἐκ τοῦ ΓΙΡΑ μικτογράμμου ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ· Β', ὅτι τὸ ἐκ τοῦ μικτογράμμου τριγράμμου ΛΕΡ Δακτυλίδιον ἴσον τῷ ἐκ τοῦ ΓΠΙ τριγώνου Κώνῳ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβληθεῖσα ἡ ΡΠ, συμπιπτέτω τῇ Ἀντικειμένῃ Ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ $\overline{\Pi P}^2 = ZI.\,IP + \overline{\Pi I}^2$. (θ) ἀλλὰ τὸ $ZI.\,IP = \overline{\Gamma A}^2$, (ι) τὸ ἄρα $\overline{\Pi P}^2 = \overline{\Gamma A}^2 + \overline{\Pi I}^2$. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ $\overline{\Pi I}^2$. ἐκεῖν τὸ $\overline{\Pi P}^2 - \overline{\Pi I}^2 = \overline{\Gamma A}^2$, εἴτουν $\overline{\Pi E}^2$. καὶ ὁ κύκλος ἄρα οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΡ ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτοῦ τοῦ κύκλου οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΙ, ἤτοι τὸ βραχιόνιον τὸ ἐκ τῆς ΙΡ ἴσον τῷ κύκλῳ, τῷ ἡμιδιάμετρον ἔχοντι τὴν ΠΕ. (κ) ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι πᾶν βραχιόνιον τῷ ἐν τῷ στερεῷ, τῷ ἐκ τοῦ ΓΙΡΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐπ' εὐθείας αὐτῷ κύκλῳ, τῷ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, τῷ ἐκ τοῦ ΓΠΕΑ ὀρθογωνίου. ἐκεῖν καὶ τὸ στερεὸν, τὸ ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΓΙΡΑ ἴσον τῷ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ ἐκ τοῦ ΓΠΡΑ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἐκ τοῦ ΓΙΡΑ στερεῷ, καὶ τῷ ἐκ τοῦ ΓΠΙ Κώνῳ. ἀλλὰ τῷ αὐτῷ στερεῷ τῷ ἐκ τοῦ ΓΠΡΑ ἴσος ὁ ἐκ τοῦ ΓΠΕΑ Κύλινδρος σὺν τῷ ἐκ τοῦ ΛΕΡ Δακτυλιδίῳ. τὸ ἄρα ἐκ τοῦ ΓΙΡΑ στερεὸν σὺν τῷ ἐκ τοῦ ΓΠΙ Κώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ σὺν τῷ ἐκ τοῦ ΛΕΡ Δακτυλιδίῳ. δέδεικται δὲ τὸ ἐκ τοῦ ΓΙΡΑ στερεὸν ἴσον τῷ Κυλίνδρῳ. ἄρα καὶ τὸ ἐκ τοῦ ΛΕΡ Δακτυλίδιον ἴσον τῷ ἐκ τοῦ ΓΠΙ Κώνῳ.

ΠΡΟ-

(θ) Κατὰ τὴν ι. τοῦ β'. (ι) Κατὰ τὴν α. Συνέπ. τῆς ιβ'. τοῦδε τοῦ τμήμ. (κ) Ἐκ τῆς β'. τοῦ ιβ'. δῆλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ΄.

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἰσοπλεύρου Ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἀχθῇ, τῇ μὲν ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτώτων παράλληλος, τῇ δὲ ἑτέρᾳ συμβάλλουσα· ὁμοίως δὲ καὶ ἑτέρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ περιενεχθῇ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν τε καὶ τῶν Ἀσυμπτώτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον σὺν τῇ Ὑπερβολῇ περὶ ὁποτέραν τῶν Ἀσυμπτώτων ἕως ὅτου ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ ἐκ τοῦ ἀπειρομήκους χωρίου, τοῦ μεταξὺ τῆς Ἀσυμπτώτου καὶ τῆς Ὑπερβολῆς γινόμενον ἀπειρόμηκες στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ἐκ τοῦ εἰρημένου ὀρθογωνίου Κυλίνδρῳ.

Ἔστω ἰσόπλευρος (λ) Ὑπερβολὴ ἡ ΠΓ, (πίν. Κ. σχ. 1.) καὶ ἀπό τινος αὐτῆς σημείου Γ ἤχθω ἡ ΓΔ, τῇ μὲν ΑΖ Ἀσυμπτώτῳ παράλληλος, τῇ δὲ ΑΨ συμβάλλουσα. ὁμοίως δὲ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ ἤχθω ἡ ΓΕ. καὶ περιενεχθήτω περὶ τὴν ΨΑ τὸ ΓΔΑΕ ὀρθογώνιον σὺν τῇ Ὑπερβολῇ ΓΠ ἕως οὗ ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι. λέγω ὅτι τὸ ἀπειρόμηκες στερεὸν τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ

(λ) Ἰσόπλευρον δεῖ εἶναι τὴν Ὑπερβολὴν, ἵνα ὀρθὴ ᾖ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν Ἀσυμπτώτων περιεχομένη γωνία ΨΑΖ. τῆς γὰρ ἰσοπλεύρου ἴση οὔσα ἡ πλαγία πλευρὰ τῇ ὀρθίᾳ; ἴση ἑκατέρᾳ αὐτῶν ἐστὶ καὶ ἡ δευτέρα Διάμετρος. διὸ δὴ καὶ ἡ ΔΕ (Ὅρα σχ. 1. τοῦ ΙΖ. πίν.) ἴση τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ Βπ, ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ΨΑ. ἡ δὲ ΨΑ τῇ ΕΟ. ἐξ οὗ δῆλον ὅτι τὸ ΦΔΕΟ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓΟ, ΕΓΔ γωνιῶν ὀρθή.

τῦ ἀπειρομήκυς χωρίυ ΨΔΙΠ ἴσον ἐςὶ τῷ ἐκ τῦ ὀρθογωνίυ ΙΔΑΕ Κυλίνδρῳ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῦ ἐπειυχὲν σημείυ Β τῆς ΓΠ Ὑπερβολῆς ἤχθωσαν αἱ ΙΡ, ΒΛ ταῖς ΓΔ, ΓΕ παράλληλοι. ϗ ἐπεζεύχθω ἡ διαγώνιος ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΒΛ: ΓΕ:: ΑΕ : ΑΛ. (μ) ἀλλ᾽ ὡς ΑΕ : ΑΛ ὕτως ἡ περιφέρεια τῦ κύκλυ, ὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ΑΕ, (ἥτις καλείσθω χ) πρὸς τὴν περιφέρειαν τῦ κύκλυ, ὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ΑΛ. (καλείσθω δὲ αὕτη y) (ν) ὡς ἄρα ΒΛ: ΓΕ:: χ : y. τὸ ἄρα ΒΛ. y = ΓΕ. χ. (ξ) ἔςι δὲ τὸ μὲν ΒΛ. y ἡ ἐπιφάνεια τῦ Κυλίνδρυ, τῦ ἐκ τῦ ὀρθογωνίυ ΡΛ· τὸ δὲ ΓΕ. χ ἡ ἐπιφάνεια τῦ ἐκ τῦ ΔΕ. ὁμοίως ϗ τὸ ΙΛ. y ἡ ἐπιφάνεια τῦ ἐκ τῦ ΔΛ Κυλίνδρυ. (ο) ὡς ἄρα ΒΛ. y: ΙΛ. y:: ΓΕ. χ: ΙΛ. y. (π) ἀλλ᾽ ὡς μὲν ΓΕ. χ : ΙΛ. y:: χ: y, (ρ) ὡς δὲ χ: y : ΑΕ: ΑΛ, (σ) καὶ ὡς ΑΕ: ΑΛ : : ΓΕ : ΛΟ, ἤτοι ΙΛ: ΛΟ. ὡς ἄρα ΒΛ. y : ΙΛ. y:: ΙΛ: ΛΟ. ἐπεὶ δὲ τῦτο αὐτὸ δείκνυται ὅπυ περ ἂν ληφθῇ τὸ τῆς Ὑπερβολῆς σημεῖον Β, πᾶσαι ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι αἱ ἐν τῷ ςερεῷ, τῷ ἐκ τῦ χωρίυ ΨΑΕΓΠ, πρὸς πάσας τὰς ἐπιφανείας τὰς ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, τῷ ἐκ τῦ ὀρθογωνίυ ΔΕ λόγον ἔχυσιν ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν τῷ αὐτῷ ὀρθογωνίῳ ΔΕ, πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΓΕ, ἤτοι ὃν 2 : 1. καὶ τὸ ςερεὸν ἄρα τὸ ἐκ τῦ χωρίυ ΨΑΕΓΠ, πρὸς τὸν Κύλινδρον τὸν ἐκ τῦ ΔΕ:: 2, 1:

καὶ

(μ) Κατὰ την γ. Συνέπ. της ιγ. τῦ δε τῦ τμήμ: (ν) Κατὰ τὴν Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν β. τῦ ιβ. (ξ) Κατὰ τὴν ιε΄. τῦ ε΄. (ο) Κατὰ τὸ γ΄. Λῆμ. τὸ ἐν τοῖς τῦ Ἀρχιμ. Θεωρ. (π) Κατὰ τὴν α΄, τῦ ϛ (ρ) Κατὰ τὴν α΄, τῦ ϛ΄. (σ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν β΄. τῦ ιβ΄.

καὶ διαιρεθέντα, ὡς τὸ στερεὸν, τὸ ἐκ τοῦ ΨΔΓΠ χωρίου, πρὸς τὸν ἐκ τοῦ ΔΕ ὀρθογωνίου Κύλινδρον, οὕτως 1 : 1, ὅπερ ἐστὶν, ὅτι τὸ ἐκ τοῦ ΨΔΓΠ χωρίου στερεὸν ἴσον τῷ ἐκ τοῦ ΔΕ ὀρθογωνίου Κυλίνδρῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Οὕτως θαυμαστὸν τοῦτο τῆς Ὑπερβολῆς τὸ ἰδίωμα, (τ) οὐχ ἧττον ἥτινα τῶν τοῦ κύκλου συμπτωμάτων οἷον, τὸ ὅλην τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου περιφέρεσθαι, τοῦ ἐσχάτου αὐτῆς πέρατος, τοῦ ἐν τῷ κέντρῳ ἠρεμοῦντος· τὸ τὴν αὐτὴν γραμμὴν, ἤτουν τὴν περιφέρειαν καὶ κυρτὴν καὶ καμπύλην εἶναι· τὸ ὑπὸ μηδεμιᾶς εὐθείας τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ἁπτομένης περιεχομένην τέμνεσθαι. καὶ ἀναγκάζει μὲν ἡ δεῖξις πείθεσθαι, ἐναντίον δ' οὖν ὅμως δοκεῖ τῷ λόγῳ, τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπειρόμηκες στερεὸν τῷ πεπερατωμένῳ Κυλίνδρῳ. οὐ μόνον δὲ τὴν Ὑπερβολὴν, ἀλλὰ καὶ ἄλλας, διὰ τοῦ καλουμένου τῆς Ὁλοκληρίας λογισμοῦ, εὗρον οἱ Γεωμέτραι καμπύλας, ἐν αἷς τὸ μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τῶν Ἀσυμπτώτων περιεχόμενον ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινόμενον χωρίον, ἴσον ἐστὶ χωρίῳ πεπερατωμένῳ, καὶ τὸ ἐκ τοῦ τοιούτου ἀπείρου στερεὸν ἴσον στερεῷ πεπερασμένῳ. κἀντεῦθεν δὲ ἐξελέγχονται οἱ ἄπιστοι, οἱ τῶν θείων τῆς πίστεως Μυστηρίων ὀλιγωροῦντες, διὰ τὸ δοκεῖν ἐναντιοῦσθαι τῷ λόγῳ, διὰ τὸν ὑπὲρ κατάληψιν αὐτῶν λόγον. ἰδοὺ γὰρ ἔνια, ἐναντία μὲν δοκοῦντα τῷ λόγῳ, διὰ δὲ τῆς ἀπταίστου ἀποδεικνύμενα γεωμετρικῆς ἐπιστήμης.

Περὶ

(τ) Τούτου εὑρετὴς ὁ ἐκ Φαβέντζης Τορικέλλιος, ὁ τοῦ Γαλιλαίου ἀκροατὴς, ὁ κατὰ τὸ 1647. ἔτος τὸν βίον ἐκμετρήσας.

Περὶ τῆς ἐν τοῖς Ὀπτικοῖς χρήσεως τῆς Ὑπερβολῆς.

Α΄ Κάτοπτρα ἐκ μετάλλε Ὑπερβολῆς ἔχοντα εἶδος κατασκευάζεσιν, ἐν οἷς πᾶσαι αἱ ἐκ λαμπάδος, ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν Ἑςιῶν τεθείσης, ἐκπεμπόμεναι ἀκτῖνες, καὶ τῷ κυρτῷ τῆς Ὑπερβολῆς προσπίπτεσαι, ἔτως ἀνακλῶνται, ὥςε μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένας, ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν Ἑςιῶν ἀλλήλαις συμβάλλειν. οἷον ἡ παρὰ τῆς ἐν τῇ Υ Ἑςίᾳ (πίν. Ι΄. χ. 2.) λαμπάδος πεμπομένη ἀκτὶς ΥΜ, καὶ τῷ κυρτῷ τῆς Ὑπερβολῆς ΑΜ προσπίπτεσα, ἔτως ἀνακλᾶται τὴν ΜΩ φερομένη φορὰν, ὥςε ἐκβληθεῖσαν τὴν ΜΩ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη κατὰ τὴν ἑτέραν τῶν Ἑςιῶν Φ συμπίπτειν: ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία τῆς πτώσεως ΥΜΒ ἴση ἐςὶ τῇ τῆς ἀνακλάσεως ΩΜϛ, ὡς ἡ πεῖρα δείκνυσι· γίνονται δὲ αὗται ἀλλήλαις ἴσαι, ἐὰν ἡ ΩΜ ἐπὶ τὰ ἕτερα ἐκβληθεῖσα μέρη, κατὰ τὸ Φ συμπέσῃ· ἴσης γὰρ ἔσης τῆς ΦΜΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΥΜΒ, (υ) ΩΜϛ, (φ) ἴση ἐςὶ καὶ ἡ ΥΜΒ τῇ ΩΜϛ· ἡ ἄρα ἀνακλαθεῖσα ΜΩ ἐκβαλλομένη, διὰ τε Φ ἥκει. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐὰν ἡ λαμπὰς ἐπὶ τε Φ τεθῇ, πᾶσαι αἱ τῷ κοίλῳ τε ὑπερβολοειδες κατόπτρε προσπίπτεσαι, μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβληθεῖσαι, κατὰ τὴν ἑτέραν τῶν Ἑςιῶν Υ ἀλλήλαις συμπίπτεσιν. οἷον ἡ ΦΜ μετὰ τὴν ἀνάκλασιν τὴν ΜΖ φορὰν φέρεται· ἥτις ἐπὶ τὰ ἕτερα ἐκβληθεῖσα μέρη, διὰ τε Υ ἥκει. ἔτω μὲν γὰρ ἡ κατὰ πτῶσιν γωνία ΦΜΒ τῇ κατὰ ἀνάκλασιν ΖΜϛ

Ξ ἴση

(υ) Κατὰ τὴν ή. τε β΄. τμήμ. (φ) Κατὰ τὴν ιά. τε α΄.

ἴση γίνεται. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΥΜΒ = ΦΜΒ, ἡ αὐτὴ δὲ ΥΜΒ = ΖΜϚ, καὶ ἡ ΦΜΒ ἄρα ἴση τῇ ΖΜϚ. ἐὰν ἓν ἐπὶ θατέρας τῶν Ἐ'ϛιῶν λαμπὰς τεθῇ, ἐπὶ τῆς ἑτέρας τὸ ἑαυτῆς ὀφθήσεται εἴδωλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰϛέον, ὅτι αἱ τοιαῦται Ἑ'ϛίαι, **Φανταϛικαὶ** εὐλόγως καλῦνται. ὐδὲ γὰρ πραγματικῶς εἰς τὰ ἕτερα μέρη εἰσίασιν αἱ ἀνακλασθεῖσαι Φωτιϛικαὶ ἀκτῖνες, ὐδὲ ἀλλήλαις πραγματικῶς συμβάλλυσι. κατασκευάζονται δὲ ὑέλιναι Φακαὶ Ὑπερβολῆς εἶδος ἔχυσαι, πᾶσαι δὲ αἱ πρὸς αὐτὰς προσπίπτυσαι τῦ Φωτὸς ἀκτῖνες παράλληλοι τῇ Διαμέτρῳ, δι' αὐτῶν διίυσαι, ἀληθῶς τε καὶ πραγματικῶς κατὰ τὴν ἑτέραν τῶν Ἑϛιῶν συμβάλλυσιν ἀλλήλαις. ὅπως δὲ αἱ τοιαῦται Φιλοτεχνῦνται Φακαὶ, καὶ δι' αὐτῶν αἱ ἀκτῖνες διίυσαι ἀλλήλαις συμπίπτυσι, ῥητέον.

Β'. Ἐὰν μὲν ἡ ἀπὸ θατέρυ εἰς ἕτερον σῶμα εἰσιῦσα ἀκτὶς, οἷον ἡ ἀπὸ τῆς ὑέλυ εἰς τὸν ἀέρα, ἢ τῦμπαλιν, πρὸς ὀρθὰς προσβάλλῃ τῇ τῦ σώματος ἐπιφανείᾳ, ὥσπερ ἡ ΛΜ τῇ ΑΜ, (πίν. ΙΑ'. χ. ι.) ἄθλαϛος διίησι τὴν ἐπ' εὐθείας Φερομένη Φορὰν, καθάπερ ἡ ΛΜΟ· ἐὰν δὲ πλαγίως, θλᾶται ἐν τῷ διιέναι, ἑτέραν Φερομένη Φορὰν, οἷον τὴν ΜΥ.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τῦ τῆς ἐπιφανείας σημείυ Μ, καθ' ὃ ἡ μὴ πρὸς ὀρθὰς ΛΜ ἀκτὶς προσβάλλει, ἀχθῇ ἡ ΕΜΡ κάθετος ἤτοι τῇ ἐπιφανείᾳ ΑΜ, ἐὰν ἐπίπεδος αὕτη ᾖ, ἢ τῇ ἐφαπτομένῃ αὐτῆς ΜΖ, ἐὰν καμπύλη, ἡ μὲν ΛΜΕ, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς προσπιπτύσης ΛΜ, καὶ τῆς καθέτυ ΕΜΡ, **Γωνία πτώσεως** λέγεται· ἡ δὲ ΥΜΡ ἡ ὑπὸ τῆς θλασθείσης ΥΜ, καὶ τῆς αὐτῆς καθέτυ ΜΡ περιεχομένη, **Γωνία θλάσεως.**

Δ'.

Δ'. Ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς πτώσεως, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θλάσεως ὁ αὐτός ἐστι, κἂν ὁποιαοῦν ᾖ ἡ τῆς ἀκτῖνος πτῶσις, ἡ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ. ἔστι δὲ ὁ λόγος οὗτος, τῆς μὲν ἀπὸ τοῦ ἀέρος εἰς τὴν ὕελον εἰσερχομένης ἀκτῖνος, ὁ λόγος ὃν ἔχει ὁ 3 : 2, εἴτουν $\frac{3}{2}$: 1· τῆς δὲ ἀπὸ τῆς ὑέλου εἰς τὸν ἀέρα, ὁ λόγος ὃν ἔχει ὁ 2 : 3, ἤτοι $\frac{2}{3}$: 1. τούτων δὲ πάντων ἡ πεῖρα διδάσκαλος.

Ε'. Ἐὰν ἡ προσπεσοῦσα ἀκτὶς ΛΜ συμβάλλῃ μετὰ τὴν θλάσιν τῇ τῆς Ὑπερβολῆς Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Υ, ὡς ἡ ΜΥ, ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τῆς πτώσεως Μ ἡ ΜΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΛΜ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Ε συμπίπτουσα, τὸ ἡμίτονον τῆς πτώσεως ΛΜΕ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς θλάσεως ΥΜΡ λόγον ἔχει, ὃν ἡ θλασθεῖσα ΥΜ, πρὸς τὴν ΥΕ τὴν ἀπολαμβανομένην ἀπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῷ Υ σημείῳ. ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΛΜΕ = ΜΕΥ, (χ) ἡ δὲ ΥΜΡ τὸ αὐτὸ ἔχει ἡμίτονον, ὅπερ καὶ ἡ ΥΜΕ, (ψ) τὸ ἄρα ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς πτώσεως ΕΜΛ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θλάσεως ΥΜΡ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας ΜΕΥ, πρὸς τὸ τῆς ΥΜΕ. ἀλλὰ τὸ τῆς ΜΕΥ ἡμίτονον, πρὸς τὸ τῆς ΥΜΕ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΥΜ πρὸς τὴν ΥΕ. (ω) τὸ ἄρα ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς πτώσεως ΛΜΕ, πρὸς τὸ τῆς θλάσεως ΥΜΡ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΥΜ: ΥΕ. ἐὰν οὖν ἡ ΛΜ ἀκτὶς ἀπὸ τῆς ὑέλου εἰς τὸν ἀέρα εἰσέλθῃ, ἔσται ὡς ΥΜ: ΥΕ :: 2 : 3. (α)

(χ) Κατὰ τὴν κθ'. τοῦ α'. (ψ) Κατὰ τὸν β'. ὁρισμ. τῆς Τριγωνομετρ. (ω) Κατὰ τὸ δ'. Θεώρ. τῆς Τριγωνομετρ. (α) Ἐκ τῶν ἀνωτέρ. εἰρημ. δῆλ.

ϛʹ. Ἐὰν ἄρα Ὑπερβολὴ γραφῇ, ἧς ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν λόγον ἔχει, ὃν ὁ 2 : $2 + \frac{1}{2}$, ἀπὸ δὲ τυχόντος σημείου, τοῦ Μ τεταγμένως ἀχθῇ ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἡ ΜΗ, καὶ περιενεχθῇ περὶ τὴν ΑΗ, ἕως οὗ ἀποκατασαθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ ΑΜΗ χωρίον, ἡ καθ' ὁμοίωσιν τοῦ ἐξ αὐτοῦ γινομένου σερεοῦ τορνευθεῖσα ὑελίνη Φακὴ, ἡ ζητουμένη ἔσαι· πρὸς ἣν δήθεν πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες τῷ Ἄξονι παράλληλοι, μετὰ τὴν ἐν τῷ ἀέρι θλάσιν, κατά τι σημεῖον τὸ Υ, ἀλλήλαις συμπεσοῦνται. κείσθω γὰρ τὸ Φ τὴν ἑτέραν εἶναι τῶν Ἑσιῶν. καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΑ : ΥΦ :: ΥΦ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ὀρθίας, (β) ἔσαι δὴ ὡς 2: ΥΦ :: ΥΦ : $4 + \frac{1}{2}$. τὸ ἄρα $\overline{\text{ΥΦ}}^2 = 9$. (γ) ἡ ἄρα ΥΦ = 3. οὐκοῦν ὡς ΨΑ: ΥΦ :: 2: 3. ἀλλ' ὡς ΨΑ: ΥΦ :: ΥΜ: ΥΕ. (δ) ὡς ἄρα ΥΜ: ΥΕ :: 2: 3. ἐξ οὗ δῆλον τὸ προκείμενον.

ΤΜΗ-

(β) Κατὰ τῆς ιδ. Συνέπ. τῆς θʹ. τοῦ βʹ. τμήμ. (γ) Κατὰ τὴν ιζ. τοῦ αʹ. (δ) Κατὰ τὴν δʹ. Συνεπ. τῆς θʹ. τοῦ βʹ. τμήμ.

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ

Περὶ τῶν τῆς Ἐλλείψεως συμπτωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'. (α)

Ἐὰν ἐν Ἐλλείψει εὐθεῖαι ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον, ἔςαι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ὡς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς.

Ἔςω Ἔλλειψις ἡ ΖΝΜΨ, καὶ τετάχθωσεν ἐπὶ τὴν ΝΨ Διάμετρον αἱ ΖΦ, ΕΠ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνά εἰσιν ὡς τὰ ὀρθογώνια ΝΦ. ΦΨ, ΝΠ. ΠΨ, εἴτουν ὅτι ἐςὶν, ὡς $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: ΝΦ. ΦΨ : ΝΠ. ΠΨ$. πίν. Β. χ. 5.

Ὅρα τὴν τῆς πρώτης προτάσεως τοῦ προλαβόντος τμήματος δεῖξιν. εἰπὼν δὲ ἔκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει, πρόσθες τάδε ἀντὶ τῶν ἐκεῖ ἑξῆς· ἡ ΔΦ : ΠΗ, ἤτοι ἡ ΝΦ : ΝΠ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΦΒ : ΡΠ, εἴτουν ἡ ΨΦ : ΨΠ. ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2$ λόγον ἔχει συγκεί-

(α) Μέρος ἐςὶ τῆς κά. τοῦ α'. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

κείμενον ἔκτε τȣ̃ λόγȣ ὃν ἔχει ἡ ΝΦ : ΝΠ, καὶ ἐκ τȣ̃ ὃν ἔχει ἡ ΦΨ : ΠΨ. ὡς ἄρα $\overline{Z\Phi}^2 : \overline{E\Pi}^2 :: N\Phi . \Phi\Psi : N\Pi . \Pi\Psi$. (β)

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐὰν ὀρθία τῆς Ἐλλείψεως πλευρὰ ᾖ ἡ ΝΡ, ἤτοι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τȣ̃ ΝΦ. ΦΨ, τȣ̃ $\overline{Z\Phi}^2$, ϗ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΝΨ, (γ) ἔσεται καὶ πᾶν ἕτερον ὀρθογώνιον, οἷον τὸ ΝΠ. ΠΨ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ΕΠ τετράγωνον, ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΨΝ, πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΡ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΝΦ. ΦΨ : ΝΠ. ΠΨ : $\overline{Z\Phi}^2 : \overline{E\Pi}^2$, ϗ ἐναλλὰξ ὡς ΝΦ. ΦΨ : $\overline{Z\Phi}^2$ :: ΝΠ. ΠΨ : $\overline{E\Pi}^2$, ἔςι δὲ ὡς ΝΦ. ΦΨ : $\overline{Z\Phi}^2$: : ΝΨ : ΝΡ, ἄρα ΝΠ. ΠΨ : $\overline{E\Pi}^2$: : ΝΨ : ΝΡ.

Β'. Τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΡ ἴσης τῇ πλαγίᾳ ΨΝ ȣ̎σης, ἡ Ἔλλειψις εἰς κύκλον μεταβάλλεται. τὸ γὰρ $\overline{Z\Phi}^2$ ἴσον ἔσεται τῷ ΝΦ. ΦΨ. διὸ ἡ ΨΖΝΜ κύκλος ἐςί. (δ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐν Ἐλλείψει τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένης ϗ τῆς τετάρτης ἀναλόγȣ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, καὶ τȣ̃ λοιπȣ̃ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τμήματος, περιεχομένῳ.

Ἔςω

(β) Μεγίςην ἔχει τὰ τῆς Ὑπερβολῆς πάθη τοῖς τῆς Ἐλλείψεως τὴν ὁμοιότητα. διὸ δὴ ϗ ὁ Ἀπολλώνιος συνημμένας προτίθησι τάς τε προτάσεις καὶ τὰς ἀποδείξεις. σαφηνείας δὲ χάριν αἱ μὲν προτάσεις διῄρηνται, τὰς δὲ δείξεις ζητητέον ἐν τοῖς περὶ τῆς Ὑπερβολῆς, μικρόν τι ἐνίοτε τῶν ἀποδείξεων μεταβαλλομένων.
(γ) Ὅρα τὸν κα'. ὁρισμ. (δ) Ἐκ τῆς γ', καὶ δ'. Συνεπ. τῆς η'. τȣ̃ ς'. δῆλον.

Ἔςω Ἔλλειψις ἡ ΥΝΜΨ, ἧς Διάμετρος μὲν ἡ ΨΝ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμένη ἡ ΜΚ, Ἀποτετμημένη δὲ ἡ ΝΚ, λοιπὸν δὲ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τμῆμα ἡ ΨΚ, ὀρθία δὲ ἡ ΝΛ. λέγω, ὅτι τὸ $\overline{\text{ΜΚ}}^2$ ἴσον ἐςὶν ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΝΚ, ϗ τῆς τετάρτης ἀναλόγȣ τῶν ΨΝ, ΝΛ, ΨΚ περιεχομένῳ. πίν. Κ. σχ. 2.

Ἔχεις τὴν δεῖξιν ἐν τῇ δευτέρᾳ τȣ̃ προλαβόντος τμήματος προτάσει.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΜΚ τετράγωνον ἔλαττόν ἐςι τȣ̃ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΚ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΛ περιεχομένȣ ὀρθογωνίȣ, τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτετμημένης ΝΚ ϗ τῆς τετάρτης ἀναλόγȣ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, τῆς ὀρθίας ΝΛ, καὶ τῆς ῥηθείσης Ἀποτετμημένης ΝΚ. πρὸς ὀρθὰς γὰρ ἔςω τῇ ΨΝ ἡ ΝΛ, ϗ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβληθείσης τῆς ΚΓ, ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Λ καὶ Γ σημείων αἱ ΛΛ, ΓΖ τῇ ΨΝ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΝ : ΝΛ :: ΖΓ : ΖΛ, (ε) εἴτȣν ὡς ΨΝ : ΝΛ :: ΝΚ : ΖΛ, ἡ ἄρα ΖΛ τετάρτη ἀνάλογός ἐςι τῆς πλαγίας πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, ϗ τῆς ἀποτετμημένης ΝΚ. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{\text{ΜΚ}}^2 = \text{ΝΚ. ΚΓ}$, (ϛ) ἤτοι τῷ ΝΓ· τὸ δὲ $\text{ΝΓ} = \text{ΝΗ} - \text{ΖΗ}$· τὸ ἄρα $\overline{\text{ΜΚ}}^2 = \text{ΝΗ} - \text{ΖΗ}$, τȣτέςι τὸ $\overline{\text{ΜΚ}}^2 = \text{ΝΚ. ΝΛ} - \text{ΝΚ. ΖΛ}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{\text{ΙΠ}}^2 = \text{ΝΠ. ΝΛ} - \text{ΝΠ. ΔΛ}$.

Β΄. Τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἄρα ΜΚ, ΙΠ τετράγωνα ἴσα εἰσὶν ὀρθογωνίοις τοῖς ΝΓ, ΝΒ, παρὰ τὴν ὀρθίαν πλευρὰν ΝΛ παραβεβλημένοις, καὶ ἐλλείπȣσιν ὀρθογωνίοις τοῖς ΖΗ, ΔΦ ὁμοίοις καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΝΛ τῷ ὑπὸ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΛ καὶ

(ε) Κατὰ τὴν δ΄. τȣ̃ ϛ΄. (ϛ) Κατὰ τὴν προκειμ. πρότ.

ϗ τῆς πλαγίας περιεχομένῳ. κἀκτούτου τυχὸν τὴν προσηγορίαν εἴληφε τὸ σχῆμα.

Γ΄. Ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΝΓ, ΝΒ, ἔσεται τὸ μὲν $\overline{\text{ΜΚ}}^2$ διπλάσιον τοῦ ΝΚΓ τριγώνου, τὸ δὲ $\overline{\text{ΙΠ}}^2$ τοῦ ΝΠΒ.

Δ΄. Δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, (πίν. Κ΄. σχ. 3.) ϗ τῆς ὀρθίας ΝΑ, ἔνεστι συνεχῆ πορίσασθαι σημεῖα, δι᾽ ὧν γραφήσεται ἡ Ἔλλειψις. ἔστω γὰρ ἡ ΝΑ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΨΝ, ϗ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ἐπιζευχθείσης ΨΑ σημεῖά τινα τὰ Δ, Φ, καὶ ἄλλα ἐφεξῆς. καὶ ἤχθωσαν ἀπ᾽ αὐτῶν αἱ ΔΜ, ΦΟ, τῇ ΑΝ παράλληλοι. καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΒΓ = ΒΝ, ἡ δὲ ΖΗ = ΖΝ. καὶ ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῶν ΔΓ, ΦΗ ἡμικύκλια τὴν ΨΝ κατὰ τὰ Κ, Ι σημεῖα τέμνοντα. εἰλήφθω δὲ ἡ μὲν ΒΕ = ΒΚ, ἡ δὲ ΖΛ = ΖΙ. λέγω, ὅτι διὰ τῶν σημείων Ε, Λ, καὶ τῶν ἐφεξῆς ὁμοίως ποριθέντων Ἔλλειψις ἥξει, ἧς πλαγία μὲν πλευρὰ ἡ ΨΝ, ὀρθία δὲ ἡ ΝΑ. Ὅρα τὴν δεῖξιν τῆς Δ΄. Συνεπ. τῆς Β. προτ. τοῦ προλαβ. Τμήμ. ἀντὶ δὲ τοῦ, τῆς ΨΒ τῆς συγκειμένης, κτ. εἰπὲ, τῆς ΨΒ τῆς Ἀποτετμημένης.

Ε΄. Ἔνεστι δὲ καὶ διὰ κινήσεως Κανόνων τὰ αὐτὰ τῆς Ἐλλείψεως πορίσασθαι σημεῖα. (σχ. 4.) Ὅρα τὰ ἐν τῇ Ε΄. Συνεπ. τῆς προειρημ. προτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

Ἐὰν ἧτε πλαγία πλευρὰ τῆς Ἐλλείψεως καὶ ἡ ὀρθία δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν διχοτομιῶν διαχθῇ τις εὐθεῖα Τεταγμένην τινὰ τέμνουσα, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης τετράγωνον διπλάσιον τοῦ τετραπλεύ-

ρου

ϱ8 τ8 ὑπ αὐτῆς τε καὶ τῆς διαχθείσης πεϱατ8μέν8.

Τετμήσθω δίχα ἥτε πλαγία πλευρὰ ΨΝ, καὶ ἡ ὀρθία ΝΑ κατὰ Γ, Ε σημεῖα, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΓΕ, τεμνέτω τὴν ἐκβληθεῖσαν Τεταγμένην ΒΚ κατὰ τὸ Δ. λέγω, ὅτι τὸ $\overline{\text{ΒΚ}}^2$ διπλάσιόν ἐςι τ8 ΕΝΚΔ τετραπλεύρ8. σχ. 5.

Ἐπίζευξον τὰς ΨΑ, ΝΡ, καὶ ὅρα τὴν δεῖξιν τῆς Γ. προτ. τ8 προλαβ. Τμήμ. καὶ τὴν μετ' αὐτὴν Σημείωσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄. (η)

Ἀπὸ τ8 δοθέντος σημεί8 τῆς δοθείσης Ἐλλείψεως εὐθεῖαν ἁπτομένην ἀγαγεῖν.

Ὅρα τὰ ἐν τῇ Δ΄. προτ. τ8 προλαβ. τμήμ. εἰρημένα, ἀντὶ δὲ τ8 εἰπεῖν, ἐν τῇ κατασκευῇ, εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΠΨ (πίν. ΚΑ΄. σχ. 1.) εἰπὲ, εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΨΠ ἐκβληθείσης. ὅτι δὲ ἡ εὑρεθεῖσα τρίτη ἀνάλογος τῶν ΖΠ, ΠΜ, εἴτ8ν ἡ ΠΤ μείζων ἐςὶ τ8 λοιπ8 τῆς πλαγίας πλευρᾶς τμήματος ΠΑ, δείξεις 8̓τως· εἰ γὰρ μὴ μείζων, ἔςω ἐλάσσων, ὡς ἡ ΠΤ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΤ. καὶ ἐπεὶ ὡς ΖΠ : ΠΜ : : ΠΜ : ΠΤ, τὸ ἄρα $\overline{\text{ΠΜ}}^2 =$ ΖΠ. ΠΤ. (θ) ἔςι δὲ τὸ ΖΠ. ΠΤ διπλάσιον τ8 ΖΠΤ τριγών8, (ι) καὶ τὸ $\overline{\text{ΠΜ}}^2$ ἄρα διπλάσιον τ8 ΖΠΤ. ἀλλὰ τὸ $\overline{\text{ΠΜ}}^2$ διπλάσιον καὶ τ8 τετραπλεύρ8 ΖΠΑΡ. (κ) τὸ ἄρα ΖΠΤ $=$ ΖΠΑΡ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. 8̓κ ἄρα ἡ ΠΤ ἐλάσσων τῆς ΠΑ.

(η) Ἡ λγ΄. ἐςὶ τ8 α΄. βιβλ. τ8 Ἀπολλων. (θ) Κατὰ τὴν ιϛ΄. τ8 ϛ΄. (ι) Κατὰ τὴν μα΄. τ8 α΄. (κ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Ἐντεῦθεν πολλὰς πορίζόμεθα μεθόδους τοῦ ἐφαπτομένην ἄγειν ἀπὸ τοῦ δοθέντος τῆς Ἐλλείψεως σημείου. ἔχεις δὲ αὐτὰς ἐν ταῖς Συνεπείαις τῆς εἰρημένης Δ'. προτ. ὧν ἡ Α' οὐδεμιᾶς προσθήκης χρήζει, ἢ ἀφαιρέσεως.

Ἐν δὲ τῇ Β'. ἀντὶ τοῦ εἰπεῖν τῇ Διευθετούσῃ ΨΝ ἐκβληθείσῃ, εἰπὲ τῇ Διευθετούσῃ ΨΝ ἐπιζευχθείσῃ.

Ἡ δὲ Γ'. ἀναλλοίωτος διαμενέτω.

Ἐν δὲ τῇ Δ. εἰπὼν, ὡς ΠΓ : ΠΑ :: ΓΑ : ΑΤ, πρόσθες, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΠΑ : ΠΓ :: ΑΤ : ΓΑ, καὶ συντεθέντα, ὡς ΓΑ : ΠΓ :: ΓΤ : ΓΑ. τὸ ἄρα $\overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 =$ ΠΓ. ΓΤ. ἀντὶ δὲ τοῦ εἰπεῖν, τῆς ΠΓ τῆς ἐκ τοῦ ἡμίσεως ΓΑ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ἀποτετμημένης ΑΠ συγκειμένης, εἰπὲ τῆς τετμημένης ΠΓ τῆς ἀπολαμβανομένης ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ καὶ τῆς τεταγμένης ΜΠ.

Ἐν δὲ τῇ Ε'. ἀντὶ τοῦ εἰπεῖν, ἐὰν ἄρα ἑκάτερον τούτων· εἰπὲ, ἐὰν ἀπὸ τούτων κοινὸν ἀφέλῃς τὸ $\overline{\Gamma\Pi}^2$, κτ.

Ἡ δὲ Ϛ'. μεταβολῆς οὐ δεῖται.

Ἐν δὲ τῇ Ζ'. μετὰ τὸ εἰπεῖν, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΜΨ, πρόσθες, ἥτις ἐκβληθεῖσα, συμπέσῃ τῇ ΑΩ κατὰ τὸ Ω.

Ἐν δὲ τῇ Η'. προκείσθω δεῖξαι, ὅτι ὡς ΨΤ : ΤΑ :: ΨΠ : ΠΑ. μετὰ δὲ τὴν ἐκεῖ τούτου δεῖξιν πρόσθες καὶ ταῦτα· Ὅσον μὲν ἡ ΠΜ τῷ κέντρῳ Γ προσπελάζει, τοσοῦτον ἡ ΓΠ ἐλαττοῦται· ἐπειδὰν δ' ἔγγιστα ἐγγίσῃ, πάσης δοθείσης ποσότητος ἐλάσσων γίνεται. διὸ ὡς οὐδὲν ἐκλαμβάνεται τῇ ΓΑ παραβαλλομένη. καὶ ἐπεὶ ὡς ΓΠ : ΓΑ ::

ΓΑ : : ΓΑ : ΓΤ, (λ) ϰ̀ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΤ συγκρινομένη, ὡς ὀδὲν λογίζεται. ἐπεὶ δὲ ἡ ΓΑ μέγεθός ἐστιν ὡρισμένον, ἄπειρον ἄρα ἡ ΓΤ. διὸ δὴ παράλληλος αὐτῇ γίνεται ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ. ϰ̀ ἐπεὶ τὸ $\overline{ΓΑ}^2 = ΓΠ . ΓΤ$, ἔσεται ἡ $ΓΤ = \frac{\overline{ΓΑ}^2}{ΓΠ}$. (μ) ἐὰν ὖν ἡ ΓΠ = ο, ἔσαι ἡ $ΓΤ = \frac{\overline{ΓΑ}^2}{0}$. ἐκ τότε δῆλον, ὅτι πᾶν ὡρισμένον μέγεθος διὰ τῦ μηδενικῦ σημείυ διαιρόμενον, ἄπειρον ἐμφαίνει μέγεθος· ϰ̀ ὅτι τὸ 0 πρός τι ὡρισμένον μέγεθος λόγον ἔχει, ὃν τὸ αὐτὸ ὡρισμένον μέγεθος πρός τι ἄπειρον. τὸ δὲ μηδὲν ὀκ ἀπολύτως νοητέον, ἀλλὰ σχετικῶς, ὡς πρός τι μέγεθος ἀναφερόμενον.

Τὴν δὲ Θ′. ἐν ᾗ πρόκειται δεῖξαι, ὅτι ὡς ΨΒ : ΑΧ : : ΨΠ : ΠΑ, δείξεις ὅτως· ὡς ΨΤ : ΤΑ : : ΨΒ : ΑΧ. (ν) ἀλλ' ἡ ΑΧ = ΧΩ. (ξ) ὡς ἄρα ΨΤ : ΤΑ : : ΨΒ : ΧΩ. ἀλλ' ὡς ΨΒ : ΧΩ : : ΨΜ : ΜΩ, καὶ ὡς ΨΜ : ΜΩ : : ΨΠ : ΠΑ, ἄρα ὡς ΨΒ : ΑΧ : : ΨΠ : ΠΑ. (ο)

Ἐν δὲ τῇ Ι′. εἰπών, συμπίπτῃ τῇ ΨΚ, πρόσθες, τῇ ἀπὸ τῦ πέρατος Ψ ἀχθείσῃ ταῖς Τεταγμέναις παραλλήλῳ.

Ἡ δὲ ΙΑ′, ὡς ἔχει, ὅτως ἀναγνωσθήτω.

ΘΕΩΡΗΜΑ. (π)

Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς Ἐλλείψεως ΗΑΒ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης αὐτῆς ΓΑ, ἑτέρα εὐθεῖα ὀ παρεμπεσεῖται. σχ. 2.

Ἔχεις

(λ) Κατὰ τὴν προλ. γ′. Συνέπ. (μ) Κατὰ τὸ η′. ἀξίωμ. τῦ ι′. βιβλ. (ν) Κατὰ τὴν γ′. τῦ ς′. (ξ) Κατὰ τὴν προλ. ζ′. Συνέπ. (ο) Κατὰ τὴν ι′ τῦ ι′. (π) Μέρος ἐστὶ τῆς λβ′. τῦ α′. βιβλ. τῦ Ἀπολλων.

Ἔχεις τὴν δεῖξιν ἐν τῷ Θεωρήματι τῷ μετὰ τὴν προδιαληφθεῖσαν Δ΄. πρότ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄. (ϱ)

Ἐὰν ἐν Ἐλλείψει εὐθεῖα ἀχθῇ, ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ κέντρου συμπίπτουσα τῇ τομῇ, δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον· αἱ δὲ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς συμπτώσεως ἀχθεῖσαι ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς, καὶ τῇ Διαμέτρῳ συμπίπτουσαι ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ παράλληλοι ἔσονται.

Ἡ δεῖξις ἡ αὐτή ἐστι τῇ τῆς Ε΄. προτ. τοῦ προλαβ. τμήμ. κ. 3.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Ἡ διὰ τοῦ κέντρου Γ ταῖς Τεταγμέναις ΖΝ, ΜΘ ἀγομένη παράλληλος ΒΔ δίχα τέμνει πάσας τὰς τῇ ἀρχικῇ Διαμέτρῳ ΗΤ ἀγομένας παραλλήλους ΖΜ, ΟΙ ἐντὸς τῆς τομῆς. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμά εἰσι τὰ ΠΕ, ΓΖ, ἔστιν ἄρα ἡ μὲν ΓΠ=ΕΜ, ἡ δὲ ΓΦ=ΕΖ. (σ) ἀλλ᾽ ἡ ΓΠ=ΓΦ. (τ) ἄρα καὶ ἡ ΜΕ=ΕΖ. ἡ ἄρα ΖΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΟΙ καὶ πᾶσα παράλληλος τῇ ΗΤ ἐντὸς τῆς τομῆς ὑπὸ τῆς ΒΔ δίχα τέμνεται.

Β΄. Ἡ εἰρημένη ΒΔ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τε πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ, καὶ τῆς ὀρθίας ΑΥ. ἔστι μὲν γὰρ ὡς ΨΓ.

(ϱ) Τὸ α΄. μέρ. ἡ λ΄. ἐστὶ τοῦ αὐτ. βιβλ. (σ) Κατὰ τὴν λδ΄. τοῦ α΄. (τ) Ὅρα τὴν δεῖξ. τῆς Προκειμ. προτ.

ΨΓ. ΓΑ : $\overline{ΓΒ}^2$ :: ΨΑ : ΑΥ, (υ) εἴτουν ὡς $\overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΒ}^2$ :: ΨΑ : ΑΥ· ἔστι γὰρ ΨΓ. ΓΑ $=$ $\overline{ΓΑ}^2$· καὶ ὡς μὲν $\overline{ΓΑ}^2$: $\overline{ΓΒ}^2$ :: $\overline{ΨΑ}^2$: $\overline{ΒΔ}^2$, ὡς δὲ ΨΑ : ΑΥ :: $\overline{ΨΑ}^2$: ΨΑ. ΑΥ, (φ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΨΑ}^2$: $\overline{ΒΔ}^2$ :: $\overline{ΨΑ}^2$: ΨΑ. ΑΥ. (χ) τὸ ἄρα $\overline{ΒΔ}^2$ $=$ ΨΑ. ΑΥ. (ψ) οὐκοῦν ὡς ΨΑ : ΒΔ :: ΒΔ : ΑΥ. (ω) ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΔ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ καὶ τῆς ὀρθίας ΑΥ ὡς δέδεικται, δίχα τε τέμνεται κατὰ τὸ Γ, (α) καὶ παράλληλός ἐστι ταῖς ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν Διάμετρον τεταγμέναις, (β) δευτέρα ἄρα Διάμετρός ἐστι, (γ) δίχα τέμνουσα τὰς ὑπ' αὐτὴν Τεταγμένας ΖΜ, ΟΙ.

Γ'. Ἡ ΒΛ ἡ τρίτη ἀνάλογος τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΔ καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ ἡ ὀρθία πλευρά ἐστιν ὡς πρὸς τὴν ΓΔ. καὶ ὥσπερ τὸ ΨΑ. ΑΥ $=$ $\overline{ΒΔ}^2$, οὕτω καὶ τὸ ΒΔ. ΒΛ $=$ $\overline{ΨΑ}^2$.

Δ'. Τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τὴν ΒΔ τεταγμένων λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς ΒΔ, εἴτουν ἐστὶν ὡς $\overline{ΖΕ}^2$: $\overline{ΟϚ}^2$ :: ΒΕ. ΕΔ : ΒϚ. ϚΔ. ἔστι μὲν γὰρ ὡς $\overline{ΒΓ}^2$: $\overline{ΖΦ}^2$ :: ΑΓ. ΓΨ : ΑΦ. ΦΨ, (δ) ἤτοι ὡς $\overline{ΒΓ}^2$: $\overline{ΕΓ}^2$ :: $\overline{ΨΓ}^2$: ΑΦ. ΦΨ. καὶ κατὰ ἀναστροφήν, ὡς $\overline{ΒΓ}^2$: $\overline{ΒΓ}^2 - \overline{ΕΓ}^2$ :: $\overline{ΨΓ}^2$: $\overline{ΨΓ}^2$ − ΑΦ. ΦΨ. ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{ΒΓ}^2 - \overline{ΕΓ}^2$ $=$ ΒΕ. ΕΔ, τὸ δὲ $\overline{ΨΓ}^2$ − ΑΦ. ΦΨ $=$ $\overline{ΓΦ}^2$ $=$ $\overline{ΖΕ}^2$. (ε) ὡς ἄρα $\overline{ΒΓ}^2$: ΒΕ. ΕΔ :: $\overline{ΨΓ}^2$: $\overline{ΖΕ}^2$. καὶ ἐναλλάξ, ὡς $\overline{ΨΓ}^2$: $\overline{ΒΓ}^2$ :: $\overline{ΖΕ}^2$: ΒΕ. ΕΔ. διὰ

(υ) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς α'. τοῦ δε τμήμ. (φ) Κατὰ τὴν α'. τοῦ ϛ'. (χ) Κατὰ τὴν ι'. τοῦ ε'. (ψ) Κατὰ τὴν κ'. τοῦ ε'. (ω) Κατὰ τὴν ιζ'. τοῦ ϛ'. (α) Κατὰ τὸν ζ'. ὁρισμ. (β) Ὅρα τὴν προλ. Συνέπ. (γ) Κατὰ τὸν κδ'. ὁρισ. (δ) Κατὰ τὴν α'. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ε) Κατὰ τὴν ι'. τοῦ β', καὶ τὴν λδ'. τοῦ α'.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς $\overline{\Psi\Gamma}^2$: $\overline{\mathrm{B}\Gamma}^2$ :: $\overline{\mathrm{O}\varsigma}^2$: ΒϚ. ϚΔ. διὸ δὴ καὶ ὡς $\overline{\mathrm{ZE}}^2$: ΒΕ. ΕΔ :: $\overline{\mathrm{O}\varsigma}^2$: ΒϚ. ϚΔ. (ζ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς $\overline{\mathrm{ZE}}^2$: $\overline{\mathrm{O}\varsigma}^2$ :: ΒΕ. ΕΔ : ΒϚ. ϚΔ.

Ε'. Τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ΖΕ τετράγωνον πρὸς τὸ ΒΕ. ΕΔ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὀρθία ΒΛ πρὸς τὴν δευτέραν Διάμετρον ΒΔ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΒΔ : ΑΨ :: ΑΨ : ΒΛ, (η) ἄρα καὶ ὡς $\overline{\mathrm{B}\Delta}^2$: $\overline{\mathrm{A}\Psi}^2$ :: ΒΔ : ΒΛ. (θ) ἔστι δὲ ὡς $\overline{\mathrm{B}\Delta}^2$: $\overline{\mathrm{A}\Psi}^2$ :: $\overline{\mathrm{B}\Gamma}^2$: $\overline{\Gamma\Psi}^2$. ἐκεῖν καὶ ὡς $\overline{\mathrm{B}\Gamma}^2$: $\overline{\Gamma\Psi}^2$ :: ΒΔ : ΒΛ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς $\overline{\Gamma\Psi}^2$: $\overline{\mathrm{B}\Gamma}^2$ :: ΒΛ : ΒΔ. ἀλλ' ὡς $\overline{\Gamma\Psi}^2$: $\overline{\mathrm{B}\Gamma}^2$ :: $\overline{\mathrm{ZE}}^2$: ΒΕ. ΕΔ. (ι) ἄρα καὶ ὡς $\overline{\mathrm{ZE}}^2$: ΒΕ. ΕΔ :: ΒΛ : ΒΔ. (κ)

ΛΗΜΜΑ. (λ)

Ἐὰν Ἐλλείψεως τῆς ΨΓΑϚ εὐθεῖα ἐπιψαύουσα ἡ ΜΤ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Τ συμπίπτῃ, καὶ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ καταχθῇ εὐθεῖα ἡ ΜΠ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον, τῇ δὲ ΜΠ διὰ τῆς κορυφῆς παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΑΔ, τῇ μὲν ἐφαπτομένῃ ΜΤ κατὰ τὸ Ο, τῇ δὲ ϚΜ τῇ διὰ τοῦ κέντρου Γ καὶ τῆς ἀφῆς Μ κατὰ τὸ Δ συμβάλλουσα· ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς, οἷον τοῦ Φ, δύω ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΦΗ, ΦΓ, ἡ μὲν τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ, ἡ δὲ τῇ Τεταγμέ-

---

(ζ) Κατὰ τὴν ί τοῦ έ (η) Κατὰ τὴν προλ. γ'. Συνέπ. (θ) Κατὰ τὸ β'. Πόρισ. τὸ μετὰ τὴν ή. τοῦ έ. (ι) Ὅρα τὴν προλ. Συνέπ. (κ) Κατὰ τὴν ί. τοῦ ί. (λ) Ἡ μγ'. πρότ. ἐστὶ τοῦ α'. Βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

μένη ΜΠ παράλληλος, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ΦΗΥ ἴσον ἔσται τῷ τετραπλεύρῳ ΒΔΛΥ τῷ ὑπὸ τῆς ϛΜ, τῆς διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἀφῆς ἀποτεμνομένῳ. χ. 4.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τρίγ. ΜΓΠ : τρίγ. ΔΓΑ : : $\overline{\Gamma\Pi}^2 : \overline{\Gamma A}^2$. (μ) ἐπεὶ δὲ ὡς ΓΠ : ΓΑ : : ΓΑ : ΓΤ, (ν) ἔσται καὶ ὡς $\overline{\Gamma\Pi}^2 : \overline{\Gamma A}^2$: : ΓΠ : ΓΤ· (ξ) ἔστι δὲ ὡς ΓΠ : ΓΤ : : ΜΓΠ : ΜΓΤ· (ο) ὡς ἄρα ΜΓΠ : ΔΓΑ : : ΜΓΠ : ΜΓΤ. (π) τὸ ἄρα ΔΓΑ $=$ ΜΓΤ. (ρ) κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΜΓΠ. τὸ ἄρα ΜΤΠ τρίγωνον ἴσον τῷ ΜΔΑΠ τετραπλεύρῳ. ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{\Phi T}^2 : \overline{M\Pi}^2$: : ΑΥ. ΥΨ. ΑΠ. ΠΨ· (σ) ἔστι δὲ τὸ μὲν ΑΥ. ΥΨ $= \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma T}^2$, τὸ δὲ ΑΠ. ΠΨ $= \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Pi}^2$. (τ) ὡς ἄρα $\overline{\Phi T}^2 : \overline{M\Pi}^2$: : $\overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma T}^2 : \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Pi}^2$. ἀλλ' ὡς $\overline{\Phi T}^2 : \overline{M\Pi}^2$: : ΦΗΥ : ΜΤΠ. (υ) ὡς ἄρα ΦΗΥ : ΜΤΠ : : $\overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma T}^2 : \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Pi}^2$. (φ) καὶ ἐπεὶ ὡς $\overline{\Gamma A}^2 : \overline{\Gamma T}^2$: : ΓΔΑ : ΓΒΥ, (χ) καὶ διαιρεθέντα ὡς $\overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma T}^2 : \overline{\Gamma T}^2$: : ΓΔΑ − ΓΒΥ : ΓΒΥ, ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ἔσται ὡς $\overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma T}^2$: ΓΔΑ − ΓΒΥ : : $\overline{\Gamma T}^2$: ΓΒΥ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐστὶ, καὶ ὡς $\overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Pi}^2$: ΓΔΑ − ΓΜΠ : : $\overline{\Gamma\Pi}^2$: ΓΜΠ. ἔστι δὲ ὡς $\overline{\Gamma\Pi}^2$: ΓΜΠ : : $\overline{\Gamma T}^2$: ΓΒΥ, (ψ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma T}^2$: ΓΔΑ − ΓΒΥ : : $\overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Pi}^2$: ΓΔΑ − ΓΜΠ, (ω) καὶ ἐναλλὰξ ὡς $\overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma T}^2 : \overline{\Gamma A}^2 - \overline{\Gamma\Pi}^2$: : ΓΔΑ − ΓΒΥ : ΓΔΑ − ΓΜΠ. ἄρα

καὶ

(μ) Κατὰ τὴν ιθ΄. τοῦ ς΄. (ν) Κατὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τῆς δ΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ξ) Κατὰ τὸ β΄. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν η΄. τοῦ ε΄. (ο) Κατὰ τὴν α΄. τοῦ ς΄ (π) Κατὰ τὴν ε΄. τοῦ ε΄. (ρ) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ε΄. (σ) Κατὰ τὴν α΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (τ) Ἐκ τῆς ε΄. τοῦ β΄. δῆλ. (υ) Κατὰ τὴν ιθ΄. τοῦ ς΄. (φ) Κατὰ τὴν ἀρημ. ε΄. (χ) Κατὰ τὴν ιθ΄. τοῦ τοῦ ς΄. (ψ) Κατὰ τὴν ἀντ. (ω) Κατὰ τὴν ἀρημ. ε΄.

καὶ ὡς ΦΗΥ : ΜΤΠ :: ΓΔΑ—ΓΒΥ :: ΓΔΑ—ΓΜΠ. (α) ἀλλὰ τὸ μὲν ΓΔΑ—ΓΒΥ = ΒΔΑΥ, τὸ δὲ ΓΔΑ-ΓΜΠ = ΜΔΑΠ. ὡς ἄρα ΦΗΥ : ΜΤΠ :: ΒΔΑΥ : ΜΔΑΠ. ἀλλὰ τὸ ΜΤΠ ἴσον δέδεικται τῷ ΜΔΑΠ. ἄρα καὶ τὸ ΦΗΥ = ΒΔΑΥ. (β)

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἐὰν μεταξὺ τῶν Μ καὶ Α σημείων ληφθῇ τι ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύω εὐθεῖαι ἀχθῶσιν αἱ ΙΡ, ΦΗ, ἡ μὲν τῇ Τεταγμένῃ ΜΠ, ἡ δὲ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παράλληλος, ἔσεται τὸ ὑπ' αὐτῶν περατούμενον τετράπλευρον ΡΚΗΓ ἴσον τῷ ΓΜΤ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΚΗΙ = ΑΙΡΔ, (γ) προσκείσθω ἑκάτερον τῷ ΓΡΙ τριγώνῳ, οὐκοῦν ἔσεται τὸ ΔΓΑ = ΡΚΗΓ. ἀλλὰ τὸ ΔΓΑ = ΓΜΤ. ἄρα καὶ τὸ ΡΚΗΓ = ΓΜΤ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ. (δ)

Ἐὰν Ἐλλείψεως εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ Διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ ταὐτὰ τῆς τομῆς, δίχα τεμεῖται τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν διχοτομουμένων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἕξουσι πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τοῖς πέρασι τῆς διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς ἀχθείσης.

Ἐπι

(α) Κατὰ τὴν αὐτ. (β) Κατὰ τὴν β'. τοῦ ε'. (γ) Κατὰ τὸ αὐτ. κάμ. Λῆμ. (δ) Τὸ μὲν α'. μέρ. ἡ μζ' ἐστὶ τοῦ α'. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων. τὸ δὲ β'. ὅμοιον τῇ ν'. τοῦ αὐτοῦ.