Δ'. Δῆλον δὲ, ὅτι καὶ ἑκάτερον τῶ ΩΛ. ΛΧ, Χι. ιΩ ἴσον τεταρτημορίῳ τῦ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρε τῆς Δευτεραίας ΓΡ τετραγώνε, εἴτεν τῷ $\overline{\text{ΤΙ}}^2$. (ν) ϗ ὅτι πλὴν δύω Ἀσυμπτώτων, Ἀσύμπτωτοι ἄλλαι ἐ συναχθήσονται. (ξ)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰςέον, ὅτι τὰς τῶν Ὑπερβολῶν καὶ τῶν ἄλλων καμπύλων Ἀσυμπτώτες, ὡς ἐφαπτομένας ἐκλαμβάνεσιν οἱ Γεωμέτραι κατὰ σημεῖα ἀπείροις ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀφεςηκότα ἀποςήμασιν. ὅτι δὲ ἐ πόῤῥω τῆς ἀληθείας ἀπέχει ἡ ἔννοια, δεικνύεσιν ἔτως· ἐφαπτέσθω τῆς Ὑπερβολῆς ἡ μὲν ΜΤ (πίν. Η'. χ. 2.) κατὰ τὸ Μ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Τ συμβάλλεσα, ἡ δὲ ΑΩ κατὰ κορυφήν. ϗ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ τετάχθω μὲν ἡ ΜΠ, ἐπεζεύχθω δὲ ἐπὶ τὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρας Ψ ἡ ΜΨ, ϗ ἤχθω ἥτε ὀρθία πλευρὰ ΝΑ, καὶ ἡ δευτέρα Διάμετρος Ξϛ. ἐκεν ὡς ΓΠ: ΓΑ : : ΓΑ : ΓΤ. (ο) διὸ δὴ τῦ Μ σημείε ἐπ' ἄπειρον τῆς κορυφῆς Α ἀφιςαμένε, ἐπ' ἄπειρόν τε αὐξεμένης τῆς ΓΠ, διὰ τὴν ἀναλογίαν ἐξ ἀνάγκης ἡ ΓΤ ἐπ' ἄπειρον ἐλαττεται, καὶ τὸ σημεῖον Τ μικρῦ δεῖν τῷ Γ ταυτίζεται. τὴν ἄρα ΤΜ ὡς ἀπὸ τῦ Γ διηγμένην ἐκλαμβάνειν ἔξεςιν. ἐπεὶ δὲ ὡς ΨΠ. ΠΑ : $\overline{\text{ΜΠ}}^2$: : ΨΑ : ΝΑ, (π) καὶ ὡς ΨΑ : ΝΑ : : $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{Ξϛ}}^2$, (ρ) ἔςι γὰρ ὡς ΨΑ : Ξϛ : : Ξϛ : ΝΑ, (σ) ὡς ἄρα ΨΠ. ΠΑ : $\overline{\text{ΜΠ}}^2$: : $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{Ξϛ}}^2$, εἴτεν ὡς ΨΠ. ΠΑ : $\overline{\text{ΜΠ}}^2$: :

(ν) Ἐκ τῶν ἀρημ. ἐν τῇ προλ. α'. Συνεπ. (ξ) Ὅρα τὴν γ'. Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (ο) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς δ'. προτ. τῦ δε τῦ τμήμ. (π) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α'. τῦ δε τῦ τμήμ. (ρ) Κατὰ τὸ β'. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν η'. τῦ ϛ'. (σ) Κατὰ τὸν κδ'. ὁρισ.

$\overline{ΓΛ}^2 : \overline{ΓΞ}^2$. τοῦ δὲ Μ ἐπ' ἄπειρον τῆς Α κορυφῆς ἀφισταμένου, ἡ ΨΛ ἀπειράκις ἐλάσσων τῆς ΠΑ γίνεται. διὸ δὴ τὸ ΨΠ. ΠΑ, ὡς ἴσον τῷ $\overline{ΓΠ}^2$ ἐκλαμβάνεται. οὐκοῦν ἔσαι ὡς $\overline{ΓΠ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: \overline{ΓΛ}^2 : \overline{ΓΞ}^2$. ἐπεὶ δὲ ὡς ἐκ τοῦ Γ διηγμένη ἡ ΤΜ ἐκλαμβάνεται, ἔςιν ἄρα ὡς $\overline{ΓΠ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: \overline{ΓΛ}^2 : \overline{ΑΧ}^2$. (τ) ἡ ἄρα ΑΧ $=$ ΓΞ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΤΜ ὡς ἐκ τοῦ Γ διηγμένη ἐκλαμβάνεται, καὶ ἡ ΑΧ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς Δευτέρας Διαμέτρου ϚΞ, ἤτουν τῇ ΓΞ γίνεται, δῆλον ἄρα ὅτι τὴν ΤΜ, ὡς Ἀσύμπτωτον ἐκλαμβάνειν ἔξεσι. (υ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒʹ. (φ)

Ἐὰν ἐν Ἀντικειμέναις ἀχθῇ τις εὐθεῖα, τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν περιεχουσῶν τὰς τομὰς, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν καὶ τῆς τομῆς ἴσον ἐςὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἠγμένης Διαμέτρου παρὰ τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν· καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν τομῶν πρὸς ταῖς Ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

Ἔςωσαν Ἀντικείμεναι αἱ ΑΛ, ΨΝ, (πίν. ΙϚʹ. χ. 1.) ὧν κέντρον μὲν τὸ Γ, Ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΕ, ΓΔ. καὶ ἤχθω τὶς εὐθεῖα ἡ ΝΛ, τέμνουσα ἑκατέραν τῶν ΕΓ, ΓΖ τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν ΕΓΖ τῶν ΔΓΕ, ΖΓΦ,

(τ) Κατά τε τὴν δʹ. τοῦ ϛʹ, καὶ τὸ ζʹ. Θεώρ. τῶν μετὰ τὸ ιʹ.
(υ) Ἐκ τῆς ιʹ. τοῦ δὲ τοῦ τμήμ. δῆλον. (φ) Τὸ μὲν αʹ. μέρ. ἡ ιαʹ. ἐςί, τὸ δὲ βʹ. ἡ ιϛʹ. τοῦ βʹ. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

ζΓΦ γωνιῶν, τῶν περιεχουσῶν τὰς τομὰς ΑΛ, ΨΝ. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ἡ ΨΛ Διάμετρος παράλληλος τῇ ΝΛ. λέγω Α΄, ὅτι τὸ ΖΛ. ΛϚ = ΓΛ^2, Β΄, ὅτι ἡ ΝΖ = ΛϚ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω κατὰ κορυφὴν Λ ἐφαπτομένη ἡ ΔΛΕ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἀπὸ τοῦ Λ ἡ ΗΛΜ, ταῖς Ἀσυμπτώταις συμπίπτουσαι κατὰ τὰ Δ, Ε, Η, Μ σημεῖα.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Τὸ ΖΛ. ΛϚ πρὸς τὸ ΗΛ. ΛΜ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΖΛ : ΗΛ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΛϚ : ΛΜ. (χ) ἀλλ' ὡς μὲν ΖΛ : ΗΛ :: ΓΛ : ΛΔ, εἴτουν οὕτω ΓΛ : ΛΕ, (ἡ γὰρ ΛΔ = ΛΕ. (ψ)) ὡς δὲ ΛϚ : ΛΜ :: ΓΛ : ΛΕ. (ω) ὡς ἄρα ΖΛ. ΛϚ : ΗΛ. ΛΜ :: $\text{ΓΛ}^2 : \text{ΛΕ}^2$. (α) ἀλλὰ τὸ ΗΛ. ΛΜ = ΛΕ^2. (β) ἄρα καὶ τὸ ΖΛ. ΛϚ = ΓΛ^2. (γ) διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ϚΝ. ΝΖ = ΓΛ^2.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Τὸ ΖΛ. ΛϚ = ϚΝ. ΝΖ· ἑκάτερον γὰρ ἴσον τῷ ΓΛ^2. (δ) ὡς ἄρα ΖΛ : ΝΖ :: ϚΝ : ΛϚ, (ε) καὶ συντεθέντα, ὡς ΛΝ : ΝΖ :: ΛΝ : ΛϚ. ἡ ἄρα ΝΖ = ΛϚ. (ζ)

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Ἐάν τις εὐθεῖα ἡ νλ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ΝΛ, ἔσονται καὶ τὰ ὀρθογώνια ζλ. λς, ςν. νζ, ἴσα ἀλλήλοις. ἑκάτερον γὰρ τῷ ΓΛ^2 ἴσον δειχθήσεται. (η)

Β΄.

(χ) Κατὰ τὴν κγ΄. τοῦ ς΄. (ψ) Κατὰ τὴν ι΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ω) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ς΄. (α) Κατὰ τὸν ζ΄. ὁρισμ. τοῦ ε΄. (β) Ὅρα τὴν α΄. Συνέπ. τῆς ι΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (γ) Κατὰ τὴν κ΄. τοῦ ε΄. (δ) Κατὰ τὸ α΄. μέρ. (ε) Κατὰ τὴν ις΄. τοῦ ε΄. (ζ) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ε΄. (η) Ὅρα τὴν δεῖξ. τῆς Προκειμ. προτ.

Β΄. Καὶ τὰ ὀρθογώνια δὲ ΝϚ. ϚΛ, ΛΖ. ΖΝ, νϛ. ϛλ, λζ. ζν ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΝΖ=ΛϚ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ΖϚ, ἔσεται ἡ ΝϚ = ΖΛ. διὰ δὴ καὶ ΝϚ. ϚΛ=ΖΛ. ΛϚ. ἀλλὰ τὸ ΖΛ. ΛϚ=$\overline{ΓΛ}^2$. (θ) ἄρα καὶ τὸ ΝϚ. ϚΛ=$\overline{ΓΛ}^2$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάτερον τῶν νϛ. ϛλ, λζ. ζν ἴσον τῷ $\overline{ΓΛ}^2$. δῆλον ἄρα τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄. (ι)

Ἐὰν ἐπὶ τὰς Ἀσυμπτώτους ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς δύω εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐν τυχούσαις γωνίαις, καὶ ταύταις παράλληλοι ἀχθῶσιν ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσαι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν αἷς αἱ παράλληλοι ἤχθησαν.

Ἔςω Ὑπερβολὴ, ἧς Ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΔ, ΓΖ. καὶ εἰλήφθω τὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ Λ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΓΔ, ΓΖ κατήχθωσαν αἱ ΛΦ, ΛΒ. εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἕτερον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ρ, καὶ διὰ τοῦ Ρ ταῖς ΛΦ, ΛΒ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΡΕ, ΡΚ. λέγω, ὅτι τὸ ΛΦ. ΛΒ=ΡΕ. ΡΚ. πίν. ΙΖ΄. σχ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΛΡ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω ταῖς Ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Ζ, Δ σημεῖα.

ΔΕΙ-

(θ) Κατὰ τὸ α΄. μέρ. τῆς προκειμ. προτ. (ι) Ἡ ιβ΄. ἐστὶ τῆς β΄. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΔΡ = ΖΛ. (κ) κοινὴ προσκείσθω ἡ ΡΛ. ἡ ἄρα ΔΛ = ΖΡ. ὡς ἄρα ΖΡ : ΖΛ :: ΔΛ : ΔΡ. (λ) ἀλλ' ὡς μὲν ΖΡ : ΖΛ :: ΡΚ : ΛΒ, ὡς δὲ ΔΛ : ΔΡ :: ΛΦ : ΡΕ. (μ) ὡς ἄρα ΡΚ : ΛΒ :: ΛΦ : ΡΕ. (ν) τὸ ἄρα ΛΦ. ΛΒ = ΡΕ. ΡΚ. (ξ)

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐὰν τῶν εἰρημένων σημείων τὸ ἕτερον, οἷον τὸ ι, ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης ληφθῇ τομῆς, ἀχθῶσι δὲ ἀπ' αὐτȣ̃ ταῖς ΡΕ, ΡΚ παράλληλοι αἱ ιφ, ιβ, ἔσεται καὶ τὸ ιφ. ιβ = ΡΕ. ΡΚ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ιζ = Ρδ, (ο) κοινῆς προσκειμένης τῆς ζδ, ἔσεται ιδ = Ρζ. διὸ ὡς ιδ : Ρδ : : Ρζ. ιζ. (π) ἀλλ' ὡς μὲν ιδ : Ρδ : : ιφ : ΕΡ, ὡς δὲ Ρζ : ιζ : : ΡΚ : ιβ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ιφ : ΕΡ : : ΡΚ : ιβ. (σ) τὸ ἄρα ιφ. ιβ = ΕΡ. ΡΚ. (τ)

Β'. Ἐὰν δὲ αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Λ, Ρ (σχ. 3.) ἀχθεῖσαι ΛΦ, ΛΒ ȣ̓ μόνον ταῖς ΡΕ, ΡΚ ὦσι παράλληλοι, ἀλλὰ καὶ ταῖς Ἀσυμπτώτοις ΓΒ, ΓΕ, ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται τὰ ΛΦΓΒ, ΡΕΓΚ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα παραλληλόγραμμα. ἔςι γὰρ ὡς ΛΒ : ΡΚ : : ΡΕ : ΛΦ, (υ) εἴτȣν ὡς ΓΦ : ΓΕ : : ΓΚ : ΓΒ. τὸ ἄρα ΛΦΓΒ = ΡΕΓΚ. (φ)

Γ'. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ Γ ἐπὶ τὰ σημεῖα Λ, Ρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΛ, ΓΡ, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα

(κ) Κατὰ τὴν ιά. τȣ̃ δε τȣ̃ τμήμ. (λ) Κατὰ τὴν β' τȣ̃ ε. (μ) Κατὰ τὴν γ'. τȣ̃ ς'. (ν) Κατὰ τὴν ι. τȣ̃ ε. (ξ) Κατὰ τὴν ις'. τȣ̃ ς'. (ο) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (π) Κατὰ τὴν β'. τȣ̃ ε. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τȣ̃ ς'. (σ) Κατὰ τὴν ἀριθμ ε. (τ) Κατὰ τὴν ις'. τȣ̃ ς'. (υ) Κατὰ τὴν προκειμ. πρότ. (φ) Κατὰ τὴν ιδ'. τȣ̃ ς'.

μενα τρίγωνα ΓΑΦ, ΓΒΛ, ΓΡΚ, ΓΡΕ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. (χ)

Δ'. Ἐὰν δὲ αἱ ἀπὸ τῶν Λ καὶ Ρ ἀχθεῖσαι πρὸς ὀρθὰς ὦσι ταῖς Ἀσυμπτώτοις, λόγον ἕξουσι πρὸς ἀλλήλας τὸν ἀντιπεπονθότα τῶν ἑαυτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἀποστημάτων. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΛΒ : ΡΚ :: ΡΕ : ΛΦ, εἴτουν ὡς ΛΒ : ΡΚ :: ΓΚ : ΓΒ· ἔστι δὲ ἡ μὲν ΓΚ τὸ τῆς ΚΡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἀπόστημα, ἡ δὲ ΓΒ τὸ τῆς ΒΛ· (ψ) αἱ ἄρα ΛΒ, ΡΚ ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἑαυτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἀποστημάτων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ΡΕ : ΛΦ :: ΓΦ : ΓΕ.

Ε'. Ἐὰν ἀπὸ τῶν Λ καὶ Ρ σημείων ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς ἀχθῶσιν αἱ ΝΜ, ΠΨ ταῖς Ἀσυμπτώτοις συμβάλλουσαι, τὰ ὑπ' αὐτῶν τε καὶ τῶν Ἀσυμπτώτων γινόμενα τρίγωνα ΝΓΜ, ΠΓΨ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΝΛ : ΛΜ :: ΝΒ : ΒΓ, (ω) ἔστι δὲ ἡ ΝΛ = ΛΜ, (α) ἄρα καὶ ἡ ΝΒ = ΒΓ. τὸ ἄρα ΝΛΒ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΛΒ. (β) ἀλλὰ τὸ ΓΛΒ = ΓΛΦ. (γ) τὰ τρία ἄρα τρίγωνα ΝΛΒ, ΓΛΒ, ΓΛΦ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΝΜ : ΝΛ :: ΜΓ : ΛΒ, (δ) ἔστι δὲ ἡ ΝΜ διπλασία τῆς ΝΛ, (ε) ἄρα καὶ ἡ ΜΓ διπλασία τῆς ΛΒ, εἴτουν τῆς ΓΦ· οὐκοῦν τὸ ΓΛΦ = ΜΛΦ. τὰ ἄρα ΝΛΒ, ΓΛΒ, ΓΛΦ, ΜΛΦ ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. τὸ ἄρα ΝΓΜ τετραπλάσιον τοῦ ΓΛΦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται τὸ ΠΓΨ τέ-

(χ) Ἐκ τῆς λδ'. τοῦ α'. δῆλον. (ψ) Ὅρα τὸν η'. ὁρισμ. τοῦ α'. (ω) Κατὰ τὴν β'. τοῦ ς'. (α) Κατὰ τὴν α'. Συνέπ. τῆς κα' τοῦ δε τοῦ τμήμ. (β) Κατὰ τὴν λη' τοῦ α'. (γ) Κατὰ τὴν λδ'. τοῦ α'. (δ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς' (ε) Ἐκ τῆς ἀρημ. Συνεπ. δῆλ.

τετραπλάσιον τȣ̃ ΓΡΚ. ἔςι δὲ τὸ ΓΛΦ = ΓΡΚ. (ζ) διὸ καὶ τὸ ΝΓΜ = ΠΓΨ.

ΛΗΜΜΑ. (η)

Τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναὶ εἰσιν αἱ Ἀσύμπτωτοι.

Ἔςωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι αἱ ΑΡ, ΨΛ, ΒΖ, ΔΗ, ὧν διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΨΛ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Γ. λέγω, ὅτι κοιναὶ αὐτῶν εἰσὶν αἱ Ἀσύμπτωτοι. πίν. ΙΗ. σχ. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν διὰ τῶν Λ, Ψ, Β, Δ σημείων ἀλλήλαις συμπίπτȣσαι κατὰ τὰ Ι, Κ, Ο, Μ σημεῖα· καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπὶ τὸ κέντρον Γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΙΓ, ΟΓ, ΚΓ, ΜΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΙΚΟΜ παραλληλόγραμμόν ἐςιν. (θ) ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν ΒΔ παράλληλος τῇ ΚΙ, (ι) ἡ δὲ ΨΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΟΚ, ΜΙ, (κ) ἄρα ἡ μὲν ΛΓ = ΚΒ, ἡ δὲ ΓΨ τῇ ΜΔ. ἀλλ᾽ ἡ ΛΓ = ΓΨ. ἄρα καὶ ἡ ΚΒ = ΜΔ. τῶν τριγώνων ȣ̃ν ΚΒΓ, ΜΓΔ ἡ μὲν πλευρὰ ΓΒ = ΓΔ, ἡ δὲ ΒΚ = ΜΔ, καὶ γωνία ἡ ΓΒΚ = ΓΔΜ. (λ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΒΓΚ = ΜΓΔ. (μ) ἀλλ᾽ ἡ ΒΓΚ σὺν τῇ ΚΓΔ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (ν) ἄρα καὶ ἡ ΜΓΔ σὺν τῇ ΚΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ΚΓ, ΜΓ ἐπ᾽ εὐθείας εἰσί. (ξ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ

(ζ) Κατὰ τὴν προλ. γ΄. Συνέπ. (η) Ἡ ιζ΄. ἐςὶ τȣ̃ β΄. βιβλ. τȣ̃ Ἀπολλων. (θ) Ἐκ τῆς δ΄. τȣ̃ δε τȣ̃ τμήμ. δῆλ. (ι) Κατὰ τὸν κδ΄. ὁρισμ. (κ) Κατὰ τὴν δ΄. τȣ̃ δε τμήμ. (λ) Κατὰ τὴν κθ΄. τȣ̃ α΄. (μ) Κατὰ τὴν δ΄. τȣ̃ α΄. (ν) Κατὰ τὴν ιγ΄. τȣ̃ α΄. (ξ) Κατὰ ιδ΄. τȣ̃ α΄.

ἡ ΙΓ ἐπ' εὐθείας ἐϛὶ τῇ ΟΓ. ἔϛι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΙ, ΟΜ, ἴση τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ ΒΔ, (ο) αἱ ἄρα ΜΓΚ, ΟΓΙ Ἀσύμπτωτοί εἰσι τῶν ΛΡ, ΨΛ τομῶν. διὰ τα αὐτὰ δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῶν ΒΖ, ΔΗ τομῶν αἱ αὐταί εἰσιν Ἀσύμπτωτοι. κοιναὶ ἄρα τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων τομῶν εἰσὶν Ἀσύμπτωτοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δὴ φανερὸν, ὅτι ἐὰν διὰ τῶν περάτων Λ, Ρ, Η, Ζ δύω ἑτέρων συζυγῶν Διαμέτρων, τῶν ΛΡ, ΗΖ ἐφαπτόμεναι ἀχθῶσι τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων τομῶν αἱ ΠϚ, ΦΝ, ΝΠ, ϚΦ, ἐπὶ ταῖς Ἀσυμπτώτοις ἀλλήλαις συμπεσοῦνται. εἰ γὰρ μὴ, αἱ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν ἐπὶ τὸ κέντρον Γ ἐπιζευχθεῖσαι εὐθεῖαι Ἀσύμπτωτοι ἔσονται, ὅπερ ἀδύνατον. (π)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

Τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων τομῶν, τῶν ἀπὸ τῶν περάτων τῶν συζυγῶν Διαμέτρων ἀχθεισῶν γινόμενα παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, φημὶ ὅτι τὸ ΜΟΚΙ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐϛὶ τῷ ϚΠΝΦ παραλληλογράμμῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΜΓΙ τρίγωνον ἴσον τῷ ΠΓϚ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΙΓΚ=ΓΠΝ. (ρ) ἄρα καὶ τὸ ΜΙΚ=ΝΠϚ. διὸ δὴ καὶ τὸ ΜΟΚΙ=ϚΠΝΦ. (σ)

ΣΤ·

(ο) Κατὰ τὴν λδ΄. τοῦ α΄. (π) Κατά τε τὸ προκείμ. Λῆμ, καὶ τὴν γ΄. Συνέπ. τῆς ι΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ρ) Κατὰ τὴν ε΄. Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (σ) Ἐκ τῆς λδ΄. τοῦ α΄. δῆλ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Αἱ τὰ πέρατα Ψ, Β, Λ, Δ, ϗ Λ, Ζ, Ρ, Η τῶν συζυγῶν διαμέτρων ἐπιζευγνῦσαι εὐθεῖαι ΨΒ, ΛΔ, ΛΖ, ΡΗ παράλληλοί εἰσι τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτώτων ΜΚ. ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΜΨ = ΨΟ, ἡ δὲ ΚΒ = ΒΟ, (τ) ὡς ἄρα ΜΨ : ΨΟ :: ΚΒ : ΒΟ. παράλληλος ἄρα τῇ ΜΚ ἡ ΨΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ϗ ἑκάστη τῶν ΛΔ, ΛΖ, ΡΗ τῇ ΜΚ παράλληλος.

Β΄. Ἐὰν ἄρα πάντα τὰ τῶν εἰρημένων Διαμέτρων πέρατα δι' εὐθειῶν ἐπιζευχθῶσι, τὰ ὑπ' αὐτῶν γινόμενα παραλληλόγραμμα ΨΒΛΔ, ΛΖΡΗ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. ϗ γὰρ τὰ ἡμίση εἰσὶ τῶν ἴσων ΜΟΚΙ, ϚΠΝΦ.

Γ΄. Αἱ τῶν παραλληλογράμμων ΨΟΒΓ, ΛϚΖΓ διαγώνιοι ΒΨ, ΖΛ δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς Ἀσυμπτώτου ΓϚ, ἡ μὲν κατὰ τὸ Υ, ἡ δὲ κατὰ τὸ Θ. ἐπεὶ γὰρ αἱ μὲν ΒΨ, ΓΟ διαγώνιοί εἰσι τοῦ ΓΨΟΒ παραλληλογράμμου, αἱ δὲ ΖΛ, ΓϚ τοῦ ΓΛϚΖ, δῆλον ἄρα ὅτι δίχα τέμνονται κατὰ τὰ Υ, Θ σημεῖα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

Ἐὰν τῇ αὐτῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ δύω γραφῶσιν Ὑπερβολαὶ, ὧν ἡ ὀρθία οὐχ ἡ αὐτὴ, τὰ ὑπ' αὐτῶν, τῆς τεταγμένης, ϗ τῆς Διαμέτρου περιεχόμενα χωρία λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὃν ἡ ὀρθία τῆς ἑτέρας πρὸς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύω ὀρθιῶν πλευρῶν.

Πλαγίᾳ μὲν πλευρᾷ τῇ ΨΝ, ὀρθίᾳ δὲ τῇ ΝΑ γεγράφθω Ὑπερβολὴ ἡ ΝΖ· πλαγίᾳ δὲ τῇ αὐτῇ ϗ

(τ) Κατὰ τὴν α΄. Συνέπ. τῆς ια΄. τοῦ δε΄ τοῦ τμήμ.

ὀρθίᾳ τῇ ΝΕ, γεγράφθω ἡ ΝΟ. καὶ ἀπό τινος τῆς τομῆς σημείου Ζ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΨΚ κατήχθω ἡ ΖΚ, μέση δὲ ἀνάλογον τῶν ΝΑ, ΝΕ ἔστω ἡ ΝΧ. λέγω δὴ ὅτι τὸ χωρίον ΝΖΚ, πρὸς τὸ χωρίον ΝΟΚ λόγον ἔχει ὃν ἡ ΝΑ : ΜΧ. πίν. Η΄. σχ. 1.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς $\overline{ZK}^2 \cdot$ ΨΚ. ΚΝ :: ΝΑ : ΝΨ. καὶ ὡς ΨΚ. ΚΝ : $\overline{OK}^2$ :: ΝΨ : ΝΕ. (υ) ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς $\overline{ZK}^2 \cdot \overline{OK}^2$ :: ΝΑ : ΝΕ. ἔτι δὲ ὡς ΝΑ : ΝΕ :: $\overline{NA}^2 : \overline{NX}^2 \cdot$ (φ) καὶ γὰρ ὡς ΝΑ : ΝΧ :: ΝΧ : ΝΕ· (χ) ὡς ἄρα $\overline{ZK}^2 : \overline{OK}^2 :: \overline{NA}^2 : \overline{NX}^2$. (ψ) διὸ δὴ καὶ ὡς ΖΚ : ΟΚ :: ΝΑ : ΝΧ. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ΠΛ : ϛΛ, καὶ ὡς πᾶσα τοιαύτη εὐθεῖα ἐν τῷ ΝΖΚ χωρίῳ οὖσα, πρὸς πᾶσαν τὴν ἐν τῷ ΝΟΚ λόγον ἔχει ὃν ΝΑ : ΝΧ. καὶ τὸ χωρίον ἄρα ΝΖΚ, πρὸς τὸ χωρίον ΝΟΚ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΝΑ : ΝΧ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, καὶ τῆς ὀρθίας ΝΑ, καὶ τοῦ λόγου, ὃν πρὸς ἄλληλα ἔχουσι δύω τῶν εἰρημένων χωρίων, γραφήσεται Ὑπερβολή, ἧς πλαγία μὲν πλευρὰ ἡ αὐτὴ ΨΝ, ὀρθία δὲ ἑτέρα. ἔστω γὰρ ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὸ ΝΖΚ : ΝΟΚ ἴσος ᾧ ἔχει ἡ ΝΑ : ΝΧ. καὶ γεγονέτω ὡς ΝΑ : ΝΧ :: ΝΧ : ΝΕ. ἡ οὖν πλαγίᾳ μὲν πλευρᾷ τῇ ΨΝ, ὀρθίᾳ δὲ τῇ ΝΕ γραφομένη Ὑπερβολὴ ΝϛΟ, (α) ἡ ζητουμένη ἔσται.

ΠΡΟ-

(υ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α΄ τοῦ δε τοῦ τμήμ. (φ) Κατὰ τὸ β΄. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν η΄. τοῦ ε΄. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν ε΄. τοῦ ε΄. (ω) Κατὰ τὸ ζ΄. τῶν μετὰ τὸ ε΄. Θεωρ. (α) Ὅρα τὴν δ΄. Συνέπ. τῆς β΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚʹ.

Ἐὰν ἀπὸ ὁποτερασοῦν τῶν Ἀσυμπτώτων ληφθῶσι πρὸς τῷ κέντρῳ εὐθεῖαι συνεχῶς ἀνάλογον, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῶν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτώτων ἀχθῶσι παράλληλοι, τὰ ὑπ' αὐτῶν τε καὶ τῆς τομῆς ἀπολαμβανόμενα ἐκτὸς χωρία ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἔστωσαν αἱ ΓΔ, ΓΛ Ἀσύμπτωτοι τῆς ΜΚΗ Ὑπερβολῆς, ἧς κέντρον τὸ Γ. καὶ εἰλήφθωσαν ἀπὸ ὁποτερασοῦν, οἷον τῆς ΓΔ εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ συνεχῶς ἀνάλογον. καὶ ἀπὸ τῶν περάτων Α, Β, Δ ἤχθωσαν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτώτων ΓΛ παράλληλοι αἱ ΑΜ, ΒΚ, ΔΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΜΚΒ χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΚΗΔ. πίν. ΙΗ. σχ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶν Η, Κ, Μ σημείων ἤχθωσαν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτώτων ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΕ, ΚΙ, ΜΛ τῇ ἑτέρᾳ Ἀσυμπτώτῳ ΓΛ συμβάλλουσαι. καὶ πληρωθέντος τοῦ ΓΛΝΔ παραλληλογράμμου, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΦ, ΦΚ, ΚΝ, ΓΜ, ΓΗ, ΜΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ παραλληλόγραμμα ΓΛΜΑ, ΓΙΚΒ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, (β) καὶ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν Γ. ὡς ἄρα ΓΛ : ΓΙ : : ΓΒ : ΓΑ. (γ) ἔστι δὲ ὡς ΓΒ : ΓΑ : : ΓΔ : ΓΒ, (δ) ἄρα καὶ ὡς ΓΛ : ΓΙ : : ΓΔ : ΓΒ. (ε) τὰ ἄρα παραλ-

(β) Κατὰ τὴν βʹ. Συνέπ. τῆς ιγʹ. τοῦ δὲ τοῦ τμήμ. (γ) Κατὰ τὴν ιδʹ. τοῦ ϛʹ. (δ) Ἐκ τῆς ὑποθ. δῆλον. (ε) Κατὰ ιεʹ τοῦ εʹ.

παραλληλόγραμμα ΓΛΝΔ, ΓΙΚΒ περὶ τὴν αὐτὴν εἰσὶ διάμετρον, τὴν ΓΚΝ. πάλιν ἐπειδὴ τὰ ΓΛΜΑ, ΓΕΗΔ παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, (ζ) καὶ κοινὴν ἔχει γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ΓΛ : ΓΕ :: ΓΔ : ΓΑ. τὰ ἄρα ΓΛΝΔ, ΓΕΦΑ παραλληλόγραμμα περὶ τὴν αὐτὴν εἰσὶ διάμετρον, τὴν ΓΦΝ. ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΓΦ, ΦΚ, ΚΝ. ἡ ἄρα ΜΗ καὶ πᾶσαι αἱ παράλληλοι αὐτῇ εὐθεῖαι, αἱ ὑπὸ τῆς τομῆς ΜΚΗ περατούμεναι, δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς ΓΝ. (η) ἐκοῦν τὸ μὲν τρίγωνον ΜΓΠ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΗΓΠ, τὸ δὲ μικτόγραμμον ΜΚΠ ἴσον τῷ μικτογράμμῳ ΗΚΠ. ἀφηρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΜΓΠ τὸ ΜΚΠ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΗΓΠ τὸ ΗΚΠ. καὶ λοιπὸν ἄρα μικτόγραμμον τὸ ΓΚΜ ἴσον λοιπῷ τῷ ΓΚΗ. ἐπεὶ δὲ καὶ τρίγωνον τὸ ΓΚΒ ἴσον τριγώνῳ τῷ ΓΗΔ, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΟΒ τριγώνου, ἔσεται τὸ ΓΚΟ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΟΗΔ τετραπλεύρῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ μικτόγραμμον ΚΟΗ, τὸ ἄρα ΓΚΗ μικτόγραμμον ἴσον τῷ ΒΚΗΔ χωρίῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΚΜ μικτόγραμμον ἴσον τῷ ΑΜΚΒ χωρίῳ. ἐπεὶ δὲ τὸ ΓΚΗ = ΓΚΜ, ὡς δέδεικται, καὶ τὸ χωρίον ἄρα ΑΜΚΒ ἴσον τῷ ΒΚΗΔ χωρίῳ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Τοῦ δοθέντος ὑπερβολικοῦ χωρίου ΙΑΒΜ (πίν. ΙΖ. σχ. 4.) τὸ ἀπειροπλάσιον εὑρεῖν ἕξεσι. κείσθω γὰρ δεῖν εὑρεῖν τὸ τούτου τετραπλάσιον. προαχθήτω δὴ ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΒ κατὰ τὸ συνεχὲς διὰ τριῶν ὅρων, τῶν ΓΛ, ΓΔ, ΓΗ, ὥστε εἶναι ὡς ΓΑ : ΓΒ :: ΓΒ : ΓΛ :: ΓΛ : ΓΔ :: ΓΔ : ΓΗ. καὶ

(ζ) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τῆς ιγ'. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (η) Κατὰ τὴν λδ'. τοῦ α'.

ϗ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Λ, Δ, Η σημείων τῇ Ἀσυμπτώτῳ ΓΕ παράλληλοι, αἱ ΛΚ, ΔΝ, ΗΟ, ϗ ἐπεὶ τὰ ΙΑΒΜ, ΜΒΛΚ, ΚΛΔΝ, ΝΔΗΟ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, (θ) δῆλον ὅτι τὸ ΙΑΗΟ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΙΑΒΜ. ἐπεὶ δὲ ὁ λόγος τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΓΒ ἐπ' ἄπειρον προαχθῆναι δύναται, ἡ δὲ ΓΥ ϗ ἡ τομὴ ΚΟ ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, οὐ συμπίπτουσι, δῆλον ἄρα ὅτι ϗ τὸ ἀπειροπλάσιον τοῦ ΙΑΒΜ χωρίου εὑρεθήσεται μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς Ἀσυμπτώτου.

Β'. Ἐὰν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Ἀσυμπτώτων ΓΥ ληφθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ, ΓΗ διακεκριμένον ἔχουσαι λόγον, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΑΙ, ΒΜ, ΔΝ, ΗΟ τῇ ΓΕ παράλληλοι, τὰ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενα ὑπερβολικὰ χωρία ΙΑΒΜ, ΝΔΗΟ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. γεγονέτω γὰρ ὡς ΓΒ: ΓΛ:: ΓΛ: ΓΔ. οὐκοῦν τὸ $\overline{\Gamma\Lambda}^2 = \Gamma\mathrm{B}.\Gamma\Delta$. (ι) ἀλλὰ τὸ $\Gamma\mathrm{B}.\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{A}.\Gamma\mathrm{H}$. (κ) τὸ ἄρα $\overline{\Gamma\Lambda}^2 = \Gamma\mathrm{A}.\Gamma\mathrm{H}$. ὡς ἄρα ΓΑ: ΓΛ:: ΓΛ: ΓΗ. (λ) οὐκοῦν τὸ μὲν ΙΑΛΚ=ΚΛΗΟ, τὸ δὲ ΜΒΛΚ=ΚΛΔΝ. (μ) ἄρα καὶ τὸ ΙΑΒΜ=ΝΔΗΟ.

Γ. Τὸ ἓν δοθὲν ὑπερβολικὸν μικτόγραμμον χωρίον, οἷον τὸ ΙΑΗΟ διὰ μὲν μιᾶς μέσης ἀναλόγου τῶν ΓΑ, ΓΗ, οἷον τῆς ΓΛ, εἰς δύω ἴσα μέρη τέμνεται· διὰ δὲ δύω, εἰς τρία· διὰ δὲ τριῶν, εἰς τέσσαρα· διὰ δὲ τεσσάρων, εἰς πέντε, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Δ'. Ἐπιζευχθεισῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἐπὶ τὰ σημεῖα Ι, Μ, Κ, Ν, Ο τῶν ΓΙ, ΓΜ, ΓΚ, ΓΝ, ΓΟ, τὰ αὐτὰ ἕξουσιν ἰδιώματα τοῖς εἰρημένοις ὑπερβολικοῖς χωρίοις ϗ

(θ) Κατὰ τὴν προκαμ. πρότ. (ι) Κατὰ τὴν ιζ΄. τοῦ ς΄. (κ) Ἐκ τῆς ὑποθ. δῆλ. (λ) Κατὰ τὴν ἀντ. ιζ΄. (μ) Κατὰ τὴν προκαμ. πρότ.

καὶ οἱ ὑπερβολικοὶ τομεῖς ΙΓΜ, ΜΓΚ, ΚΓΝ, ΝΓΘ ἴσοι γάρ εἰσιν ἐκείνοις. (ν)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἄγνωστον τοῖς Ἀρχαίοις τοῦτο τῆς Ὑπερβολῆς τὸ ἰδίωμα. (ξ) ἐξ αὐτοῦ δὲ δῆλον, ὅτι ἡ Ὑπερβολή, περὶ ἧς διαλαμβάνει ὁ Ἀπολλώνιος, ἡ καλουμένη **Λογαριθμική** ἐστιν, ἐν ᾗ δῆθεν ἥτε συνεχὴς Γεωμετρικὴ Σειρὰ συνίσταται καὶ ἡ Ἀριθμητική. ἐὰν γὰρ ἐν τῇ Ἀσυμπτώτῳ ΓΥ εὐθεῖαι ληφθῶσιν αἱ ΓΑ, ΓΒ, ΓΛ, ΓΔ, καὶ ἄλλαι ἐφεξῆς λόγον συνεχῆ ἐλάσσονος ἀνισότητος ἔχουσαι, τὰ ὑπ' αὐτῶν τεμνόμενα ὑπερβολικὰ χωρία ΙΑΒΜ, ΙΑΛΚ, ΙΑΔΝ, καὶ τὰ ἐξῆς λόγον ἀριθμητικὸν ἕξουσι πρὸς ἄλληλα. οἷον, τῆς ΓΑ ὡς μονάδος ληφθείσης, τῶν δὲ ΓΒ, ΓΛ, ΓΔ, ΓΗ, καὶ ἐξῆς ἄλλων ἀριθμοὺς ἐμφαινουσῶν τούσδε· 10, 100, 1000, 10000, καὶ ἐφεξῆς ἄλλων κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἔσεται τοῦ μὲν 10 λογάριθμος τὸ ΙΑΒΜ χωρίον, εἴτουν τὸ 1· τοῦ δε 100, τὸ ΙΑΛΚ, ἤτοι τὸ 2· τοῦ δε 1000, τὸ ΙΑΔΝ, τουτέστι τὸ 3· τοῦ δε 10000, τὸ ΙΑΗΟ, δηλονότι τὸ 4, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. τῆς δε μονάδος ὁ λογάριθμός ἐστι τὸ 0. καὶ γὰρ οὐδὲν χωρίον ὑπὸ τῆς ΓΑ τέμνεται, τῆς ὡς μονάδος ληφθείσης. ὥστε ἐὰν τὸ ΙΑΒΜ χωρίον ἐπικληθῇ μ, ἔσεται ἡ Σειρὰ τῶν Λογαρίθμων τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν, ἥδε· 0, μ, 2μ, 3μ, 4μ, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΠΡΟ-

(ν) Ὅρα τὴν τῆς προκειμ. προτ. δεῖξ. (ξ) Εὑρετὴς τούτε ὁ Ἰησουΐτης Γρηγόριος. διαλαμβάνει δὲ περὶ αὐτοῦ ἐν τῷ ἑαυτοῦ συντάγματι τῷ καλουμένῳ, opus Geometricum quadraturae circuli, et sectionum Coni, καὶ ἐκδοθέντι ἐν Ἀντουερπίᾳ ἔτει 1647.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖʹ.

Ἐὰν Ὑπερβολῆς ἡ πλαγία πλευρὰ τετραπλασία ᾖ τῆς ὀρθίας, καὶ πρὸς τῇ κορυφῇ καὶ τῷ Ἄξονι αὐτῆς Παραβολὴ γραφῇ, ἧς ἡ ὀρθία ἴση τῷ ἡμίσει τῆς εἰρημένης πλαγίας· ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἀνασταθῇ τις εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος αὐτῆς σημείου αὐτῇ τῇ πλαγίᾳ παράλληλος ἀχθῇ τῇτε Ὑπερβολῇ καὶ τῇ Παραβολῇ συμβάλλουσα, τὸ ὑπ᾽ αὐτῆς τεμνόμενον ὑπερβολικὸν χωρίον ἴσον ἔσαι ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς τῆς Παραβολῆς καὶ εὐθείας ἴσης τῇ Παραβολῇ, τῇ ὑπὸ τῆς εἰρημένης παραλλήλου πρὸς τῇ κορυφῇ ἀπολαμβανομένῃ περιεχομένῳ.

Ἔσω Ὑπερβολὴ ἡ ΝΜ, ἧς ἡ πλαγία πλευρὰ ΨΝ τετραπλασία τῆς ὀρθῆς ΨΛ. (πίν. ΙΘʹ χ. 1.) καὶ πρὸς τῇ κορυφῇ Ν καὶ τῷ Ἄξονι ΨΠ Παραβολὴ γεγράφθω ἡ ΝΒ, ἧς ἡ ὀρθία πλευρὰ ἡμίσεια τῆς ΨΝ, εἴτουν ἴση τῇ ΓΝ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΨΝ ἡ ΓΤ. καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος αὐτῆς σημείου Δ ἤχθω ἡ ΔΒ τῇ ΨΝ παράλληλος, τῇ μὲν Ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Μ, τῇ δὲ Παραβολῇ κατὰ τὸ Β συμβάλλουσα. λέγω, ὅτι τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον ΓΔΜΝ ἴσον ἐσὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΓΝ καὶ εὐθείας ἴσης τῇ Παραβολῇ ΝΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΚΑ-

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετάχθωσαν ἀπὸ τῶν Μ καὶ Β σημείων ἐπὶ τὸν ΨΠ Ἄξονα αἱ ΜΧ, ΒΑ. καὶ ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Β τῆς ἐφαπτομένης ΒΖ τῆς Παραβολῆς ΝΒ, ἤχθω αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΠ, ἥτις κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβεβλήσθω. καὶ ληφθείσης τῆς ΠΚ ἴσης τῇ ΕΠ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἡ ΚΡ παράλληλος τῇ ΨΠ, τῇ ΒΑ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ρ συμβάλλουσα. καὶ εἰλήφθω μέρος τῆς Παραβολῆς τὸ ΒΙ πάσης δοθείσης καμπύλης ἔλαττον. καὶ ἀπὸ τοῦ Ι ἤχθω ἡ ΕΙΘ τῇ ΔΒ παράλληλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΒΚ : ΒΠ :: ΒΡ : ΒΑ, καὶ ὡς ΒΚ : ΒΠ :: ΚΡ : ΠΑ (ο) ἔστι δὲ ἡ ΒΚ διπλασία τῆς ΒΠ, (π) ἄρα καὶ ἡ ΒΡ διπλασία τῆς ΒΑ, καὶ ἡ ΚΡ τῆς ΠΑ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὀρθία πλευρὰ τῆς Παραβολῆς, ἤτουν ἡ ΓΝ διπλασία τῆς ΠΑ. (ρ) ἄρα ἡ ΚΡ $=$ ΓΝ. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{\text{ΒΚ}}^2 = \overline{\text{ΒΡ}}^2 + \overline{\text{ΚΡ}}^2$, (σ) ἔστιν ἄρα τὸ $\text{ΒΚ}^2 = 4\overline{\text{ΒΑ}}^2 + \overline{\text{ΓΝ}}^2$, ἤτουν τὸ $\overline{\text{ΒΚ}}^2 = 4\overline{\text{ΜΧ}}^2 + \overline{\text{ΓΝ}}^2$. καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΧ. ΧΝ : ΜΧ^2 :: ΨΝ : ΨΛ, (τ) ἔστι δὲ ἡ ΨΝ τετραπλασία τῆς ΨΛ, (υ) ἄρα καὶ τὸ ΨΧ. ΧΝ τετραπλάσιον τοῦ $\overline{\text{ΜΧ}}^2$. τὸ ἄρα $\overline{\text{ΒΚ}}^2 =$ ΨΧ. ΧΝ $+ \overline{\text{ΓΝ}}^2$. ἀλλὰ τὸ ΨΧ. ΧΝ $+ \overline{\text{ΓΝ}}^2 = \overline{\text{ΓΧ}}^2$. (φ) τὸ ἄρα $\overline{\text{ΒΚ}}^2 = \overline{\text{ΓΧ}}^2$. οὐκοῦν ἡ ΒΚ $=$ ΓΧ, ἤτουν ἡ ΒΚ $=$ ΔΜ. ἔστι δὲ ὡς ΒΚ : ΚΡ :: ΒΙ : ΒΗ, (χ) (ὅμοιον γὰρ τὸ ΒΙΗ τῷ ΒΗΘ, (ψ) τὸ δὲ ΒΗΘ τῷ ΒΡΚ.) διὸ δὴ καὶ ὡς ΔΜ : ΓΝ ::

(ο) Κατὰ τὴν δ. τοῦ ϛ′ (π) Ἐκ τῆς Κατασκ. (ρ) Κατὰ τὴν δ. Συνέπ. τῆς δ′. προτ. τοῦ ά. τμήμ. (σ) Κατὰ τὴν μζ′ τοῦ ά. (τ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς ά. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (υ) Ἐξ ὑποθ. (φ) Κατὰ τὴν ϛ′. τοῦ β′. (χ) Κατὰ τὴν δ′. τοῦ ϛ′. (ψ) Κατὰ τὴν η. τοῦ ϛ′. ἡ γὰρ ΒΙ καμπύλη πάσης δοθείσης ἐλάσσων οὖσα, ὡς εὐθεῖα ἐκλαμβάνεται. πᾶσα γὰρ καμπύλη οἷον πολύγωνόν ἐστιν, ἀπείρους μὲν τῷ ἀριθμῷ, ἐλαχίστας δὲ τῷ μεγέθει πλευρὰς ἔχον· ὧν ἑκάστη ἐκβληθεῖσα, ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης γίνεται.

ΓΝ :: ΒΙ : ΒΗ, ἤτοι ὡς ΔΜ : ΓΝ :: ΒΙ : ΜΙ. τὸ ἄρα ΔΜ. ΜΙ = ΓΝ. ΒΙ. ἔστι δὲ τὸ ΔΜ. ΜΙ τὸ ὀρθογώνιον ΔΜΙΕ, ὅπερ ὡς ἴσον τῷ ΔΜμΕ χωρίῳ ἐκλαμβάνεται, ὀλιγωρεμένε τῦ ΜμΙ τριγωνιδίε διὰ τὴν σμικρότητα. τῆς γὰρ ΒΙ ἐλάσσονος ἔσης πάσης δοθείσης καμπύλης, τὰ Μ, μ,Ι σημεῖα ἐγγύτατά εἰσιν ἀλλήλων. ἐκῦν τὸ ΔΜμΕ ὑπερβολικὸν χωρίον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ ΓΝ. ΒΙ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται, ὅτι ἕκαστον τοιῦτον ὑπερβολικὸν χωρίον τῶν ὑπὸ τῦ ΔΜΝΓ χωρίε περιεχομένων ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΓΝ ϗ μέρες τῆς Παραβολῆς ΝΒ ὁμοίε τῷ ΒΙ. καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον ΓΔΜΝ ἴσον ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΓΝ, εἴτεν τῆς ὀρθίας πλευρᾶς τῆς Παραβολῆς, ϗ εὐθείας ἴσης τῇ ΝΒ Παραβολῇ περιεχομένῳ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Ἐκ τέτε δῆλον, ὅτι ἐκ εὐθυνθήσεται ἡ Παραβολὴ, εἴτεν ἐκ εὑρεθήσεται εὐθεῖα ἴση αὐτῇ, ἐὰν μὴ τετραγωνισθῇ τὸ εἰρημένον ὑπερβολικὸν χωρίον.

Β΄. Ἐὰν ἡ Ὑπερβολὴ ἰσόπλευρος ᾖ, ἤτοι ἐὰν ἡ ΨΝ = ΨΛ, καὶ τῇ αὐτῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ ΨΛ, ἢ ΨΝ γραφῇ ἡ Παραβολὴ ΝΒ, ἔσεται τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον ΓΔΜΝ ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῦ ἡμίσεως τῆς ὀρθίας, εἴτεν τῆς ΓΝ, καὶ εὐθείας ἴσης τῇ Παραβολῇ ΝΒ περιεχομένῳ. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{B\Pi}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{A\Pi}^2$, (ω) ἔστι δὲ τὸ $\overline{BA}^2 = \overline{MX}^2$, τὸ δὲ $\overline{MX}^2 = \Psi X.\ XN$, (α) τὸ δὲ $\overline{A\Pi}^2 = \overline{\Gamma N}^4$, (β) τὸ ἄρα $\overline{B\Pi}^2 = \Psi X.\ XN + \overline{\Gamma N}^2 = \overline{\Gamma X}^2 = \overline{\Delta M}^2$. διὸ

(ω) Κατὰ τὴν μζ΄. τῦ α΄. (α) Ἐκ τῆς Συνεπ. τῆς α΄. τῦ δε τῦ τμήμ. δῆλον. (β) Κατὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τῆς δ΄. τῦ α΄. τμήμ.

δὴ ἡ ΒΠ = ΔΜ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΒΠ : ΠΑ :: ΒΙ : ΒΗ, (γ) ἔσαι δὴ καὶ ὡς ΔΜ : ΙΝ :: ΒΙ : ΜΙ. ὁκῶν τὸ ΔΜ. ΜΙ = ΓΝ. ΒΙ. δῆλον ἄρα ἐκ τῶν εἰρημένων, (ε) ὅτι τὸ ὑπερβολικὸν χωρίον ΓΔΜΝ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῆ ἡμίσεως τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, εἴτων τῆς ΓΝ, καὶ εὐθείας ἴσης τῇ ΝΒ Παραβολῇ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Ἐὰν Ὑπερβολῆς ἡ κατὰ κορυφὴν ἁπτομένη τῇ Ἀσυμπτώτῳ συμπίπτῃ, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως εὐθεῖα ἀχθῇ τῷ Ἄξονι παράλληλος, ταχθῇ δέ τις εὐθεῖα τήν τε ἀχθεῖσαν παράλληλον καὶ τὴν Ὑπερβολὴν καὶ τὴν Ἀσύμπτωτον τέμνουσα, καὶ περιενεχθῇ περὶ τὸν Ἄξονα τὸ ὑπὸ τῆς Ἀσυμπτώτου περατούμενον τετράπλευρον σὺν τῷ τριγώνῳ καὶ τῇ Ὑπερβολῇ καὶ τῷ ὀρθογωνίῳ, τοῖς ὑπ' αὐτοῦ περιεχομένοις, ἕως οὗ ἀποκατασαθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ μὲν ἐκ τῆς Ὑπερβολῆς γινομένη Κωνοῖς ἴση ἔσαι τῷ δακτυλιδίῳ τῷ ἐκ τοῦ τριγώνου γινομένῳ· τὸ δὲ σερεὸν τὸ ἐκ τοῦ χωρίου τοῦ μεταξὺ τῆς Ὑπερβολῆς καὶ τῆς Ἀσυμπτώτου ἴσον τῷ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου κυλίνδρῳ.

Ἐφαπ-

(γ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς'.

Ἐφαπτέσθω τῆς Ὑπερβολῆς ΑΡ ἡ ΑΔ, (Σχ. 2.) καὶ συμβαλλέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Δ ἡ ΔΙ Ἀσύμπτωτος. καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθω τῷ Ἄξονι ΑΠ παράλληλος ἡ ΔΗ. καὶ τετάχθω τὶς εὐθεῖα ἡ ΠΡΙ τέμνουσα τήν τε ΔΗ καὶ τὴν ΑΡ καὶ τὴν ΔΙ. καὶ περιενεχθήτω τὸ τετράπλευρον ΑΠΙΔ περὶ τὸν ΑΠ Ἄξονα σὺν τῷ ΔΗΙ τριγώνῳ καὶ τῇ ΑΡ Ὑπερβολῇ καὶ τῷ ΑΠΗΔ ὀρθογωνίῳ. λέγω Α′, ὅτι ἡ ἐκ τῆς ΑΡ Ὑπερβολῆς γινομένη Κωνοῒς ἴση ἐστὶ τῷ Δακτυλιδίῳ τῷ ἐκ τοῦ ΔΗΙ τριγώνου. Β′, ὅτι τὸ στερεὸν τὸ ἐκ τοῦ μικτογράμμου χωρίου ΑΔΙΡ ἴσον τῷ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΠΗΔ Κυλίνδρῳ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΙΠ ἐπὶ τὰ ἕτερα τῆς Ὑπερβολῆς μέρη.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α′.

Τὸ $\overline{\Pi I}^2 = \overline{\Pi P}^2 +$ ΦΙ. ΙΡ. (δ) ἀλλὰ τὸ ΦΙ. ΙΡ $=$ $\overline{A\Delta}^2$, (ε) τὸ δὲ $\overline{A\Delta}^2 = \overline{\Pi H}^2$. (ζ) τὸ ἄρα $\overline{\Pi I}^2 = \overline{\Pi P}^2 + \overline{\Pi H}^2$. ἀφῃρήσθω κοινὸν τὸ $\overline{\Pi H}^2$. οὐκοῦν τὸ $\overline{\Pi I}^2 - \overline{\Pi H}^2 = \overline{\Pi P}^2$. καὶ ὁ κύκλος ἄρα οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΙ, ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτοῦ τοῦ κύκλου, τοῦ ἡμιδιάμετρον ἔχοντος τὴν ΠΗ, ἤτουν τὸ βραχιόνιον τὸ ἐκ τῆς ΗΙ εὐθείας γινόμενον, ἴσον τῷ κύκλῳ οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΡ. (η) ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι πᾶς κύκλος ὁ ἐν τῇ Κωνοειδεῖ τῇ ἐκ τῆς ΑΡ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐπ' εὐθείας αὐτῷ βραχιονίῳ τῷ ἐν τῷ Δακτυλιδίῳ, τῷ ἐκ τοῦ ΔΗΙ τριγώνου. διὸ δὴ καὶ ἡ Κωνοῒς ἡ ἐκ τῆς ΑΡ ἴση τῷ ἐκ τοῦ ΔΗΙ Δακτυλιδίῳ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β′.

Τὸ στερεὸν τὸ ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΑΠΙΔ ἴσον ἐστὶ τῇ ἐκ τῆς ΑΡ Κωνοειδεῖ καὶ τῷ στερεῷ τῷ ἐκ τοῦ μικτογράμ-

μου

(δ) Κατὰ τὴν ϛ′. τοῦ β′. (ε) Ὅρα τὴν α′. Συνέπ. τῆς ι′. τοῦ δευτ. τοῦ τμήμ. (ζ) Ἐκ τῆς λδ′. τοῦ α′. δῆλ. (η) Ἐκ τῆς ϛ′. τοῦ ιβ′. δῆλ.

μυ ΑΔΙΡ. ἔστι δὲ τὸ αὐτὸ στερεὸν τὸ ἐκ τῦ τετραπλεύρυ ἴσον τῷ τε Κυλίνδρῳ τῷ ἐκ τῦ ΑΠΗΔ ὀρθογωνίυ, καὶ τῷ δακτυλιδίῳ τῷ ἐκ τῦ ΔΗΙ τριγώνυ. ἡ ἄρα ἐκ τῆς ΑΡ Κωνοῒς σὺν τῷ ἐκ τῦ μικτογράμμυ στερεῷ ἴσα εἰσὶ τῷ Κυλίνδρῳ καὶ τῷ Δακτυλιδίῳ. δέδεικται δὲ ἡ Κωνοῒς ἴση τῷ Δακτυλιδίῳ, καὶ τὸ στερεὸν ἄρα τὸ ἐκ τῦ μικτογράμμυ ΑΔΙΡ ἴσον τῷ ἐκ τῦ ὀρθογωνίυ ΑΠΗΔ Κυλίνδρῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘʹ

Τῶν αὐτῶν κειμένων, εὐθείας τινὸς ἀχθείσης τῷ τῆς Ὑπερβολῆς Ἄξονι παραλλήλυ, τὴν δευτέραν Διάμετρον, καὶ τὴν Ἀσύμπτωτον, καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν ἁπτομένην, καὶ τὴν Ὑπερβολὴν τεμνύσης, καὶ τῦ ὑπ᾽ αὐτῆς τεμνομένυ μικτογράμμυ τετραπλεύρυ σὺν τοῖς ὑπ᾽ αὐτῦ περιεχομένοις σχήμασι περὶ τὴν δευτέραν περιενεχθέντος Διάμετρον, τὸ μὲν στερεὸν τὸ ἐκ τῦ μικτογράμμυ ἴσον ἔσαι τῷ ἐκ τῦ ὀρθογωνίυ Κυλίνδρῳ, τὸ δὲ ἐκ τῦ μικτογράμμυ τριγράμμυ Δακτυλίδιον ἴσον τῷ ἐκ τῦ τριγώνυ Κώνῳ.

Διήχθω τῷ τῆς Ὑπερβολῆς Ἄξονι παράλληλος ἡ ΠΡ, (σχ. 3.) τὴν δευτέραν Διάμετρον ΓΠ, καὶ τὴν Ἀσύμπτωτον ΓΙ, καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν ἁπτομένην ΑΕ, καὶ τὴν Ὑπερβολὴν ΑΡ τέμνυσα, καὶ περιενεχθήτω περὶ τὴν ΓΠ τὸ μικτόγραμμον τετράπλευρον ΓΠΡΑ σὺν τοῖς ὑπ᾽ αὐτῦ περιεχομένοις σχήμασιν, ἕως ὗ ἀποκατασαθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι. λέγω Αʹ, ὅτι τὸ στερεὸν, τὸ τὸ ἐκ τȣ ΓΙΡΑ μικτογράμμȣ ἴσον ἐςὶ τῷ ἐκ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ· Β', ὅτι τὸ ἐκ τȣ̃ μικτογράμμȣ τριγράμμȣ ΑΕΡ Δακτυλίδιον ἴσον τῷ ἐκ τȣ̃ ΓΠΙ τριγώνȣ Κώνῳ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβληθεῖσα ἡ ΡΙΙ, συμπιπτέτω τῇ Ἀντικειμένῃ Ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ $\overline{\text{ΠΡ}}^2 = \text{ΖΙ}.\text{ΙΡ} + \overline{\text{ΠΙ}}^2$. (θ) ἀλλὰ τὸ $\text{ΖΙ}.\text{ΙΡ} = \overline{\text{ΓΑ}}^2$, (ι) τὸ ἄρα $\overline{\text{ΠΡ}}^2 = \overline{\text{ΓΑ}}^2 + \overline{\text{ΠΙ}}^2$. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ $\overline{\text{ΠΙ}}^2$. ἐκεῖν τὸ $\overline{\text{ΠΡ}}^2 - \overline{\text{ΠΙ}}^2 = \overline{\text{ΓΑ}}^2$, εἴτȣν $\overline{\text{ΠΕ}}^2$. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ȣ̔ ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΡ ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτȣ̃ τȣ̃ κύκλȣ ȣ̔ ἡμιδιάμετρος ἡ ΠΙ, ἤτοι τὸ βραχιόνιον τὸ ἐκ τῆς ΙΡ ἴσον τῷ κύκλῳ, τῷ ἡμιδιάμετρον ἔχοντι τὴν ΠΕ. (κ) ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι πᾶν βραχιόνιον τῷ ἐν τῷ ςερεῷ, τῷ ἐκ τȣ̃ ΓΙΡΑ ἴσον ἐςὶ τῷ ἐπ' εὐθείας αὐτῷ κύκλῳ, τῷ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ, τῷ ἐκ τȣ̃ ΓΠΕΑ ὀρθογωνίȣ. ἐκεῖν καὶ τὸ ςερεὸν, τὸ ἐκ τȣ̃ τετραπλεύρȣ ΓΙΡΑ ἴσον τῷ ἐκ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ ἐκ τȣ̃ ΓΠΡΑ ςερεὸν ἴσον ἐςὶ τῷ τε ἐκ τȣ̃ ΓΙΡΑ ςερεῷ, καὶ τῷ ἐκ τȣ̃ ΓΠΙ Κώνῳ. ἀλλὰ τῷ αὐτῷ ςερεῷ τῷ ἐκ τȣ̃ ΓΙΡΑ ἴσος ὁ ἐκ τȣ̃ ΓΠΕΑ Κύλινδρος σὺν τῷ ἐκ τȣ̃ ΑΕΡ Δακτυλιδίῳ. τὸ ἄρα ἐκ τȣ̃ ΓΙΡΑ ςερεὸν σὺν τῷ ἐκ τȣ̃ ΓΠΙ Κώνῳ ἴσον ἐςὶ τῷ ἐκ τȣ̃ ΓΠΕΑ Κυλίνδρῳ σὺν τῷ ἐκ τȣ̃ ΑΕΡ Δακτυλιδίῳ. δέδεικται δὲ τὸ ἐκ τȣ̃ ΓΙΡΑ ςερεὸν ἴσον τῷ Κυλίνδρῳ. ἄρα καὶ τὸ ἐκ τȣ̃ ΑΕΡ Δακτυλίδιον ἴσον τῷ ἐκ τȣ̃ ΓΠΙ Κώνῳ.

ΠΡΟ-

(θ) Κατὰ τὴν ι. τȣ̃ β'. (ι) Κατὰ τὴν α. Συνέπ. τῆς ιβ'. τȣ̃δε τȣ̃ τμήμ. (κ) Ἐκ τῆς β'. τȣ̃ ιβ'. δῆλ.