τῇ ΥΒ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῶν Β, Τ, Ψ, Υ σημείων ἥξει. (ψ) ἔσονται δὲ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ΥΒΨ, ΥΤΨ ἴσαι ἀλλήλαις. (ω) ὡσαύτως ἐπειδὴ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ΥΤΧ, ΥΑΧ, ὁ διαμέτρῳ τῇ ΥΧ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῶν Υ, Τ, Α, Χ σημείων ἥξει. καὶ αἱ γωνίαι ΑΥΧ, ΑΤΧ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ἔστι δὲ ἡ ΑΥΧ = ΥΒΨ, (α) ἄρα καὶ ἡ ΥΤΨ = ΑΤΧ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΨΤΧ. ἡ ἄρα ΥΤΧ = ΨΤΑ. ἀλλ' ἡ ΥΤΧ ὀρθή ἐστιν, ὡς δέδεικται, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΨΤΑ. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΨ, ΓΑ γραφόμενος κύκλος, διὰ τοῦ Τ ἥξει. ἐκοῦν αἱ ΓΨ, ΓΤ, ΓΑ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. καὶ ἐπεὶ ὡς ΜΠ : ΜΤ :: ΠΥ : ΤΝ· (β) ἔστι δὲ ἡ ΜΠ διπλασία τῆς ΜΤ· ἄρα καὶ ἡ ΠΥ, εἴτουν ἡ ΥΜ διπλασία τῆς ΤΝ. ὡσαύτως ἐπεὶ ὡς ΥΦ : ΥΓ :: ΦΜ : ΓΝ, (γ) ἡ δὲ ΥΦ διπλασία τῆς ΥΓ, καὶ ἡ ΦΜ ἄρα διπλασία τῆς ΓΝ. ἄρα ἡ ΥΜ — ΦΜ διπλασία τῆς ΤΝ—ΓΝ, ἤτοι τῆς ΤΓ, ἢ τῆς ΓΑ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΨΑ διπλασία τῆς ΓΑ. ἡ ἄρα ΥΜ—ΦΜ=ΨΑ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἔστιν ἄρα συνεχῆ πορίσασθαι σημεῖα, δι' ὧν, δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΒΑ (σχ. 2.) καὶ τοῦ τῶν Ἑστιῶν ἀποστήματος ΥΦ, ἡ Ὑπερβολὴ γραφήσεται. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Υ εὐθεῖα ἡ ΥΜ τῆς ΒΑ μείζων. καὶ ληφθείσης τῆς ΥΔ ἴσης τῇ ΒΑ, κέντρῳ μὲν τῷ Υ, διαστήματι δὲ τῷ ΥΕ μείζονι τῆς ΥΔ τόξον γεγράφθω τὸ ΘΕΟ, κέντρῳ δὲ τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ΕΔ τόξον γεγράφθω τὸ ΗΠ, τέμνον

(ψ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ή. τοῦ ς'. (ω) Κατὰ τὴν κα', τοῦ γ'. (α) Ὅρα τὴν δεῦξ. τοῦ α'. μέρ. τοῦ προλ. Λήμ. (β) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς'. (γ) Κατὰ τὴν αὐτ.

μνον τὸ ἤδη γραφὲν κατὰ τὸ Ζ. ὡσαύτως κέντρῳ μὲν τῷ Υ, διαστήματι δὲ τῷ ΥΓ μείζονι τῆς ΥΕ τόξον γεγράφθω τὸ ΚΓΛ, κέντρῳ δὲ τῷ Φ, καὶ διαστήματι τῷ ΔΓ τόξον γεγράφθω τὸ ΝΡ τέμνον τὸ ΚΛ κατὰ τὸ Ι. λέγω δὴ ὅτι διὰ τῶν σημείων Ζ, Ι, καὶ τῶν ἐφεξῆς ὁμοίως ὁριζομένων ἡ Ὑπερβολὴ ἥξει. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΥΖ, ΥΙ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΥΖ = ΥΕ, ἡ δὲ ΦΖ = ΕΔ. ἡ ἄρα ΥΖ – ΦΖ = ΥΕ – ΕΔ. ἀλλ' ἡ ΥΕ – ΕΔ, εἴτουν ἡ ΥΔ = ΒΑ ἡ ἄρα ΥΖ – ΦΖ = ΒΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΙ – ΦΙ = ΒΑ. δῆλον ἄρα ὅτι τὰ Ζ, Ι σημεῖα ἐν τῇ Ὑπερβολῇ εἰσί.

Β'. Τῶν αὐτῶν δοθέντων, γραφθήσεται καὶ διὰ κινήσεως κανόνος ἡ Ὑπερβολή. ἔστω γὰρ πλαγία μὲν πλευρὰ ἡ ΒΑ, (σχ. 3.) ἀπόστημα δὲ τῶν Ἑστιῶν ἡ ΥΦ. ἥλους δὲ ἐν τοῖς Φ καὶ Υ σημείοις πῆξον, τοὺς ΔΦ, ΚΥ. καὶ τῷ μὲν ΔΦ σύμπηξον τὸ πέρας Φ τοῦ νήματος ΦΜΓ τοῦ ἐν τῷ κανόνι ΥΓ ἐνηρμοσμένου· ὁ δὲ ΚΥ διὰ τῆς ὀπῆς τοῦ περὶ αὐτοῦ κινητοῦ κανόνος ΥΓ διερχέσθω. κείσθω δὲ τὴν τοῦ μήκους τοῦ κανόνος ΥΓ καὶ τοῦ νήματος ΦΜΓ ὑπεροχὴν ἴσην εἶναι τῇ ΒΑ. καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος Γ τοῦ νήματος τῷ τοῦ κανόνος πέρατι ἐφαρμοσθέντος, ἧλος ὁ ΗΜ μεταξὺ αὐτοῦ τε καὶ τῆς εὐθείας ΥΦ ἐντεθεὶς, οὕτω τῷ κανόνι ΥΓ συμφερέσθω, ὥστε τὸ μὲν ΦΜ μέρος τοῦ νήματος ἐντεταμένον διαμένειν, τὸ δὲ λοιπὸν τῷ κανόνι ἐφηρμοσμένον. λέγω δὴ, ὅτι ὁ ΗΜ ἧλος τῇ τοιᾷδε κινήσει τὴν ΑΜ Ὑπερβολὴν γράψει. ὅπου γὰρ ἂν στῇ ὁ κανὼν ΥΓ, ἡ ὑπεροχὴ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ νήματος ΦΜΓ ἴση ἔσεται τῇ ΒΑ. ὅσον γὰρ μέρος τοῦ νήματος ἀπὸ τοῦ κανόνος ἀποχωριζόμενον ἀφαιρεῖται, τοσοῦτον τῷ ΦΜ προστίθεται. διὸ ἡ ΥΜ – ΦΜ = ΒΑ. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι ἡ ΑΜ Ὑπερβολή ἐστιν.

Γ.

Γ. Ἐὰν ἀπὸ τῆς Ἑςίας Φ (σχ. 1.) πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΠ ἀχθῇ ἡ ΦΚ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ ἀπὸ τῆς ἑτέρας Ἑςίας Υ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπιζευχθείσῃ ΥΜ κατὰ τὸ Ι, τὸ ἀπολαμβανόμενον ἀπ' αὐτῆς μέρος ΥΙ ἴσον ἔσεται τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ. ἐπεὶ γὰρ τῶν τριγώνων ΜΦΚ, ΜΙΚ αἱ μὲν πρὸς τῷ Κ γωνίαι ἴσαι, ἡ δὲ ΦΜΚ=ΙΜΚ, (δ) ἡ δὲ ΜΚ κοινὴ, καὶ ἡ ΦΜ ἄρα ἴση τῇ ΜΙ. (ε) ἔςι δὲ ΥΜ−ΦΜ=ΨΑ, (ζ) ἄρα καὶ ΥΜ−ΙΜ, ἤτοι ΥΙ=ΨΑ. δῆλον δὲ ὅτι ἡ ΥΙ ἡ ὑπεροχή ἐςι τῶν ΥΜ, ΦΜ, τῶν ἀπὸ τῶν Ἑςιῶν Υ, Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπιζευχθεισῶν.

Δ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΠ ἡ ΜΕ τῷ Ἄξονι κατὰ τὸ Ε συμπίπτουσα, ἔσεται ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΨΑ, πρὸς τὸ τῶν Ἑςιῶν ἀπόςημα ΥΦ, οὕτως ἡ ΥΜ, πρὸς τὸ μέρος ΥΕ τοῦ Ἄξονος, τὸ μεταξὺ τῆς Ἑςίας Υ καὶ τῆς καθέτου ΜΕ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΥΙ : ΥΦ :: ΥΜ : ΥΕ, (η) ἔςι δὲ ἡ ΥΙ=ΨΑ, (θ) ἄρα καὶ ὡς ΨΑ : ΥΦ :: ΥΜ : ΥΕ.

Ε'. Ἡ ΦΜ, (πίν. ΙΒ'. σχ. 1.) ἡ ἀπὸ τῆς Ἑςίας Φ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΒΗ ἀναχθεῖσα ἴση ἐςὶ τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΨΑ. ἔςι μὲν γὰρ ὡς ΒΦ. ΦΑ : $\overline{\text{ΜΦ}}^2$ :: ΒΑ : ΑΨ. (ι) ἀλλ' ὡς ΒΑ : ΑΨ :: ΒΑ. ΑΨ : $\overline{\text{ΑΨ}}^2$. (κ) ὡς ἄρα ΒΦ. ΦΑ : $\overline{\text{ΜΦ}}^2$ :: ΒΑ. ΑΨ : $\overline{\text{ΑΨ}}^2$. (λ) ἀλλὰ τὸ ΒΦ. ΦΑ ἴσον τεταρτημορίῳ τοῦ ΒΑ. ΑΨ. (μ) ἄρα καὶ τὸ $\overline{\text{ΜΦ}}^2$ ἴσον

(δ) Κατὰ τὴν η'. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ε) Κατὰ τὴν κε'. τοῦ α'. (ζ) κατὰ τὴν προκειμ. πρότ. (η) Κατὰ τὴν δ' τοῦ ς'. (θ) Κατὰ τὴν προλ Συνέπ. (ι) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α' τοῦδε τοῦ τμήμ (κ) Κατὰ τὴν α'. τοῦ ς' (λ) Κατὰ τὴν ε, τοῦ ε. (μ) Ὅρα τὸ προλαβ. Λῆμ.

ἶσον τεταρτημορίῳ τῦ $\overline{\text{ΑΨ}^2}$. ἡ ἄρα ΦΜ ἡμίσειά ἐςι τῆς ΨΑ.

ς'. Τὸ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης ΑΛ μερος ΑΙ, τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ ἀπολαμβανόμενον ἶσον ἐςὶ τῷ τῆς Ἑςίας Φ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἀποςήματι ΑΦ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΒΦ. ΦΑ=$\overline{\text{ΒΑ. ΑΨ}}$· (ν) ἔςι δὲ τὸ μὲν ΒΦ. ΦΑ=ΓΦ. ΦΤ, (ξ) $\overline{\text{τὸ 4 δὲ ΒΑ}}$ $\overline{\text{ΑΨ}}$= ΓΑ. ΦΜ. (ἡ μὲν γὰρ ΓΑ ἡμίσεια τῆς ΒΑ, 4 ἡ δὲ ΦΜ τῆς ΑΨ. (ο)) τὸ ἄρα ΓΦ. ΦΤ=ΓΑ. ΦΜ. ὡς ἄρα ΓΦ : ΓΑ :: ΦΜ : ΦΤ. (π) ἐπεὶ δὲ ὡς ΓΦ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΤ, (ρ) ϗ διαιρεθέντα ὡς ΑΦ : ΓΑ :: ΑΤ : ΓΤ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΑΦ : ΑΤ :: ΓΑ : ΓΤ· ἔτι δὲ ὡς ΓΑ : ΓΤ :: ΓΦ : ΓΑ· (σ) ὡς ἄρα ΑΦ : ΑΤ :: ΓΦ : ΓΑ. (τ) διὸ δὴ καὶ ὡς ΑΦ : ΑΤ :: ΦΜ : ΦΤ. (υ) δέδεικται γὰρ ὡς ΓΦ : ΓΑ :: ΦΜ : ΦΤ. ἀλλ' ὡς ΦΜ : ΦΤ :: ΑΙ : ΑΤ. (φ) ὡς ἄρα ΑΦ : ΑΤ :: ΑΙ : ΑΤ. (χ) ἡ ἄρα ΑΙ=ΑΦ. (ψ)

Ζ'. Τῦ ΤΦΜ τριγώνυ ἡ ΦΜ πλευρὰ μείζων τῆς ΦΤ. ἔςι γὰρ ὡς ΑΦ : ΑΤ :: ΦΒ : ΒΤ. (ω) ἀλλ' ἡ ΑΙ= ΑΦ. (α) ὡς ἄρα ΑΙ : ΑΤ :: ΦΒ : ΒΤ. ἀλλ' ὡς ΑΙ : ΑΤ :: ΦΜ : ΦΤ. (β) ὡς ἄρα ΦΒ : ΒΤ :: ΦΜ : ΦΤ. (γ) ἀλλ' ἡ ΦΒ μείζων τῆς ΒΤ. ἄρα καὶ ἡ ΦΜ μείζων τῆς ΦΤ.

Η'.

(ν) Ὅρα τὸ αὐτό. (ξ) Κατὰ τὴν ε. Συνέπ. τῆς δ'. τῦ δε τῦ τμήμ. (ο) Κατὰ τὴν προλ Συνέπ. (π) Κατὰ τὴν ις' τῦ ς'. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς δ' τῦ δε τῦ τμήμ. (σ) Κατὰ τὴν αὐτ. Συνέπ. (τ) Κατὰ τὴν ε. τῦ ε. (υ) Κατὰ τὴν αὐτ. (φ) Κατὰ τὴν γ'. τῦ ς'. (χ) Κατὰ τὴν αὐτ. ε. (ψ) Κατὰ τὴν β' τῦ ε. (ω) Ὅρα τὴν η. Συνέπ. τῆς δ'. τῦδε τῦ τμήμ. (α) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (β) Κατὰ τὴν δ'. τῦ ς'. (γ) Κατὰ τὴν αρημ. ε.

Η'. Ἐὰν ἀπὸ τῦ τυχόντος τῦ Ἄξονος σημείυ Η τεταγμένως ἀναχθῇ ἡ ΗΕ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ ἐφαπτομένῃ ΤΜ κατὰ τὸ Δ, ἡ ἀπὸ τῆς Ἑςίας Φ ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Ε ἐπιζευχθεῖσα ΦΕ ἴση ἔςαι τῇ ΗΔ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῦ Ε ἡ ΕΝ παράλληλος τῇ ΤΔ. καὶ ἀπὸ τῦ κέντρυ Γ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΜ, ἐκβεβλήσθω κατὰ συνεχές· ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΑΙ ἐκβεβλήσθω. το ὖν ΦΤΜ=ΦΑΛΜ. (δ) κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΦΑΙΜ. τὸ ἄρα ΑΤΙ=ΙΛΜ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΑΙΜΟ. τὸ ἄρα ΗΤΜΟ=ΗΑΛΟ. ἀλλὰ τὸ ΗΑΛΟ=ΗΝΕ. (ε) τὸ ἄρα ΗΤΜΟ = ΗΝΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω το ΗΝΠΟ. τὸ ἄρα ΝΤΜΠ=ΟΠΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΠΜΔ. τὸ ἄρα ΝΤΔΕ = ΟΜΔ. ἀλλὰ τὸ ΝΤΔΕ = ΤΗΔ − ΝΗΕ. τὸ ἄρα ΟΜΔ = ΤΗΔ − ΝΗΕ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΤΗΔ : ΝΗΕ : : $\overline{\text{ΗΔ}}^2 : \overline{\text{ΗΕ}}^2$, (ζ) καὶ διαιρεθέντα, ΤΗΔ − ΝΗΕ : ΝΗΕ : : $\overline{\text{ΗΔ}}^2 - \overline{\text{ΗΕ}}^2 : \overline{\text{ΗΕ}}^2$, ὡς ἄρα ΟΜΔ : ΝΗΕ : : $\overline{\text{ΗΔ}}^2 - \overline{\text{ΗΕ}}^2 : \overline{\text{ΗΕ}}^2$. ἀλλὰ τῆς ΕΗ ἐπὶ τὸ Κ ἐκβληθείσης, ἐςὶ τὸ $\overline{\text{ΗΔ}}^2 - \overline{\text{ΗΕ}}^2 =$ ΚΔ. ΔΕ. (η) ὡς ἄρα ΟΜΔ : ΝΗΕ : : ΚΔ. ΔΕ : $\overline{\text{ΗΕ}}^2$. ἀλλὰ καὶ ὡς ΝΗΕ : ΑΤΙ : : $\overline{\text{ΗΕ}}^2 : \overline{\text{ΑΙ}}^2$. (θ) ἄρα καὶ δι' ἴσυ ὡς ΚΔ. ΔΕ : $\overline{\text{ΑΙ}}^2$: : ΟΜΔ : ΑΤΙ, ἤτυν ΙΛΜ. ἀλλ' ὡς ΟΜΔ · ΙΛΜ : : $\overline{\text{ΟΜ}}^2 : \overline{\text{ΜΛ}}^2$, (ι) καὶ ὡς $\overline{\text{ΟΜ}}^2 : \overline{\text{ΜΛ}}^2 : : \overline{\text{ΗΦ}}^2 : \overline{\text{ΦΑ}}^2$· (κ) ἐςὶ γὰρ ὡς ΟΜ : ΜΛ : : ΗΦ : ΦΑ· (λ) ὡς ἄρα ΚΔ. ΔΕ : $\overline{\text{ΑΙ}}^2 : : \overline{\text{ΗΦ}}^2 : \overline{\text{ΦΑ}}^2$. (μ) ἀλλὰ τὸ $\overline{\text{ΦΑ}}^2 = \overline{\text{ΑΙ}}^2$. (ν) ἄρα καὶ τὸ ΚΔ. ΔΕ $= \overline{\text{ΗΦ}}^2$. κοι-

(δ) Κατὰ τὸ Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς ζ. τῦδε τῦ τμήμ. (ε) Κατὰ τὸ ἀυτ. Λῆμ (ζ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῦ ε'. (η) Κατὰ τὴν ς'. τῦ β'. (θ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῦ ς' (ι) Κατὰ τὴν ἀυτ. (κ) Κατὰ τὸ ζ, τῶν μετὰ τὸ ι. Θεωρημ. (λ) Ἐκ τῆς β'. ς. δῆλ. (μ) Κατὰ τὴν ε. τῦ ε'. (ν) Ἐκ τῆς προλ. ς'. Συνεκ. δῆλον.

κοινὸν προσκείσθω τὸ $\overline{\mathrm{HE}}^2$. τὸ ἄρα $\mathrm{K\Delta.\,\Delta E}+\overline{\mathrm{HE}}^2 = \overline{\mathrm{H\Phi}}^2+\overline{\mathrm{HE}}^2$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\mathrm{K\Delta.\,\Delta E}+\overline{\mathrm{HE}}^2=\overline{\mathrm{H\Delta}}^2$, (ξ) τὸ δὲ $\overline{\mathrm{H\Phi}}^2+\overline{\mathrm{HE}}^2=\overline{\mathrm{\Phi E}}^2$. (ο) τὸ ἄρα $\overline{\mathrm{H\Delta}}^2=\overline{\mathrm{\Phi E}}^2$. ἡ ἄρα $\mathrm{H\Delta}=\mathrm{\Phi E}$.

Θ΄. Ἔνεστιν ἄρα συνεχῆ πορίσασθαι σημεῖα δι' ὧν ἡ Ὑπερβολὴ ἥξει. ἐὰν γὰρ τρίγωνον συςαθῇ ὀρθογώνιον τὸ ΤΦΜ, ὀρθὴν μὲν ἔχον τὴν ΤΦΜ γωνίαν, τὴν δὲ ἑτέραν τῶν τὴν ὀρθὴν περιεχουσῶν πλευρῶν, τὴν ΦΜ μείζονα τῆς ἑτέρας ΤΦ, ἐκβληθῶσι δὲ κατὰ τὸ συνεχὲς ἥτε ἐλάσσων ΤΦ καὶ ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα ΤΜ, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῆς ΤΗ τινῶν σημείων τῶν η, Η, ἀχθῶσιν αἱ ηδ, ΗΔ παράλληλοι τῇ ΦΜ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Φ, διαςήματι δὲ τῷ ηδ, ὡσαύτως κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαςήματι δὲ τῷ ΗΔ τόξα γραφῇ τέμνοντα τὰς ηδ, ΗΔ κατὰ τὰ ε, Ε σημεῖα, ἥξει δι' αὐτῶν Ὑπερβολή. ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν Φε, ΦΕ, ἔσεται ἡ μὲν ηδ = Φε, ἡ δὲ ΗΔ = ΦΕ. ἐξ οὗ δῆλον τὸ προκείμενον.

Ι΄. Ἐὰν ἀπὸ μὲν τῆς ἐπαφῆς Ρ (πίν. ΙΓ΄. χ. 1.) κάθετος τῇ ἐφαπτομένῃ ΡΗ ἀχθῇ ἡ ΡΠ, τῷ Ἄξονι συμπίπτουσα κατὰ τὸ Π, ἀπὸ δὲ τοῦ Π ἡ ΠΕ τῇ ΦΡ, τῇ ἀπὸ τῆς Ἑςίας Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Ρ ἐπιζευχθείσῃ, ἡ ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανομένη ΕΡ ἴση ἔσεται τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΘ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπό τε ἑκατέρας τῶν Ἑςιῶν Υ, Φ, καὶ τοῦ κέντρου Γ εὐθεῖαι αἱ ΥΗ, ΦΩ, ΓΜ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐφαπτομένῃ ΡΗ. καὶ ἀπὸ τῶν Υ, Φ ἐπὶ τὰ Ρ, Η σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΡ, ΦΗ. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ αἱ ΦΩ, ΓΜ, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὰ Δ, Ϛ σημεῖα. καὶ διήχθω ἡ δευτέρα Διάμετρος ΒΚ. καὶ

(ξ) Κατὰ τὴν ϛ΄. τοῦ β΄. (ο) Κατὰ τὴν μζ΄. τοῦ α΄.

καὶ ἀπὸ τοῦ Ρ τετάχθωσαν ἐφ' ἑκάτερον τῶν Ἀξόνων ΥΠ, ΚΧ αἱ ΡΟ, ΡΧ. καὶ ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΩΦΡ ὅμοιον τῷ ΥΡΗ, (π) (ἡ μὲν γὰρ γωνία ΦΩΡ = ΥΗΡ, (ρ) ἡ δὲ ΦΡΩ = ΥΡΗ. (σ)) τὸ δὲ ΩΦΡ ὅμοιον τῷ ΕΠΡ, (ἡ μὲν γὰρ γωνία ΦΩΡ = ΠΕΡ, ἡ δὲ ΡΦΩ = ΕΡΠ, ὡς ἐναλλάξ.) τὸ ἄρα ΥΡΗ ὅμοιον τῷ ΠΕΡ. (τ) ὡς ἄρα ΡΥ : ΥΗ : : ΠΡ : ΡΕ, καὶ ὡς ΦΡ : ΦΩ : : ΠΡ : ΡΕ. (υ) τὸ ἄρα ΡΥ. ΡΕ = ΥΗ. ΠΡ, καὶ τὸ ΦΡ. ΡΕ = ΦΩ. ΠΡ. (φ) ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΡΥ. ΡΕ τὸ ΦΡ. ΡΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΥΗ. ΠΡ τὸ ΦΩ. ΠΡ. τὸ ἄρα ΡΥ. ΡΕ − ΦΡ. ΡΕ = ΥΗ. ΠΡ − ΦΩ. ΠΡ, ἤτοι τὸ $\overline{ΡΥ - ΦΡ}$. ΡΕ = $\overline{ΥΗ - ΦΩ}$. ΠΡ. ἀλλ' ἡ $\overline{ΡΥ - ΦΡ}$ = ΨΝ, (χ) τὸ ἄρα ΨΝ. ΡΕ = $\overline{ΥΗ - ΦΩ}$. ΠΡ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΦΥ : ΦΓ : : ΥΗ : ΓϚ, (ψ) ἔστι δὲ ἡ ΦΥ διπλασία τῆς ΦΓ, ἄρα καὶ ἡ ΥΗ διπλασία τῆς ΓϚ. πάλιν ἐπεὶ ὡς ΦΥ : ΦΓ : : ΦΗ : ΦϚ, καὶ ὡς ΦΗ : ΦϚ : : ΦΩ : ϚΜ, καὶ ἡ ΦΩ ἄρα διπλασία τῆς ϚΜ. οὐκοῦν ἡ ΥΗ − ΦΩ διπλασία τῆς ΓϚ − ϚΜ, ἤτοι τῆς ΓΜ. διὸ τὸ ΨΝ. ΡΕ = 2ΓΜ. ΠΡ. καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία ΖΡΟ = ΟΠΡ, (ω) ἔστι δὲ ἡ ΖΡΟ = ΖΙΓ, ὡς ἐναλλάξ, ἄρα καὶ ἡ ΟΠΡ = ΖΙΓ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΟΡ = ΙΓΖ. ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ ΠΡΟ, ΜΙΓ τρίγωνα. ὡς ἄρα ΠΡ : ΡΟ : : ΓΙ : ΓΜ. ἀλλ' ἡ ΡΟ = ΓΧ. ἄρα ὡς ΠΡ : ΓΧ : : ΓΙ : ΓΜ. τὸ ἄρα ΠΡ. ΓΜ = ΓΧ. ΓΙ. (α) ἐπεὶ δὲ ὡς ΨΟ. ΟΝ : $\overline{ΟΡ}^2$: : ΨΝ : ΝΘ, (β) καὶ ὡς ΨΝ : ΝΘ : : $\overline{ΨΝ}^2$: $\overline{ΒΚ}^2$.

(γ)

(π) Κατὰ τὴν δʹ. τοῦ ϛʹ (ρ) Ἐκ τῆς κατασκ. (σ) Κατὰ τὴν ηʹ. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (τ) Κατὰ τὴν κάʹ. τοῦ ϛʹ. (υ) Κατὰ τὴν γʹ. τοῦ ϛʹ. (φ) Κατὰ τὴν ιϛʹ. τοῦ ϛʹ. (χ) Κατὰ τὴν προκαμ. Πρότ. (ψ) Κατὰ τὴν δʹ. τοῦ ϛʹ. (ω) Ὅρα τὴν ηʹ. τοῦ ϛʹ. (α) Κατὰ τὴν ιϛʹ. τοῦ ϛʹ. (β) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς αʹ. τοῦ δε τοῦ τμήμ.

(γ) ἔστι γὰρ ὡς ΨΝ : ΒΚ :: ΒΚ : ΝΘ· (δ) ἄρα ὡς ΨΟ. ΟΝ : $\overline{\text{ΟΡ}}^2$ :: $\overline{\text{ΨΝ}}^2$: $\overline{\text{ΒΚ}}^2$, (ε) εἴτουν ὡς ΨΟ. ΟΝ : $\overline{\text{ΓΧ}}^2$ :: $\overline{\text{ΓΝ}}^2$: $\overline{\text{ΓΚ}}^2$. ἀλλὰ τὸ μὲν ΨΟ. ΟΝ = ΟΓ. ΟΖ, (ζ) τὸ δὲ $\overline{\text{ΓΝ}}^2$ = ΟΓ. ΓΖ. (η) ὡς ἄρα ΟΓ. ΟΖ : $\overline{\text{ΓΧ}}^2$ :: ΟΓ. ΓΖ : $\overline{\text{ΓΚ}}^2$, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΟΓ. ΟΖ : ΟΓ. ΓΖ :: $\overline{\text{ΓΧ}}^2$: $\overline{\text{ΓΚ}}^2$. ἀλλ' ὡς ΟΓ. ΟΖ : ΟΓ. ΓΖ :: ΟΖ : ΓΖ. (θ) ὡς ἄρα ΟΖ : ΓΖ :: $\overline{\text{ΓΧ}}^2$: $\overline{\text{ΓΚ}}^2$. ἀλλ' ὡς ΟΖ : ΓΖ :: ΟΡ, εἴτουν ΓΧ : ΙΓ. (ι) ὡς ἄρα ΓΧ : ΙΓ :: $\overline{\text{ΓΧ}}^2$: $\overline{\text{ΓΚ}}^2$, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΓΧ : $\overline{\text{ΓΧ}}^2$ :: ΙΓ : $\overline{\text{ΓΚ}}^2$. ἔστι δὲ ὡς ΓΧ : $\overline{\text{ΓΧ}}^2$ :: Ι : ΓΧ. (κ) ὡς ἄρα Ι : ΓΧ :: ΙΓ : $\overline{\text{ΓΚ}}^2$. τὸ ἄρα ΓΧ. ΙΓ = $\overline{\text{ΓΚ}}^2$. (λ) ἀλλὰ τὸ ΓΧ. ΓΙ = ΠΡ. ΓΜ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. τὸ ἄρα ΠΡ. ΓΜ = $\overline{\text{ΓΚ}}^2$. διὸ καὶ τὸ 2ΓΜ. ΠΡ = 2$\overline{\text{ΓΚ}}^2$. δέδεικται δὲ ἀνωτέρω 2ΓΜ. ΠΡ = ΨΝ. ΡΕ. τὸ ἄρα ΨΝ. ΡΕ = 2$\overline{\text{ΓΚ}}^2$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΨΝ : ΒΚ :: ΒΚ : ΝΘ, ὡς εἴρηται, τὸ ἄρα ΨΝ. ΝΘ = $\overline{\text{ΒΚ}}^2$. οὐκοῦν τὸ ΨΝ. ΗΘ τετραπλάσιον τοῦ $\overline{\text{ΓΚ}}^2$, εἴτουν διπλάσιον τοῦ 2$\overline{\text{ΓΚ}}^2$. ἄρα καὶ τοῦ ΨΝ. ΡΕ διπλάσιον τὸ ΨΝ. ΝΘ. ἡ ἄρα ΝΘ διπλασία τῆς ΡΕ, ὅπερ ἐστὶν ἡ ΡΕ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΘ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον, ὅτι ἐν συνεχεῖ μὲν ἁρμονικῷ λόγῳ μεγέθη εἶναι λέγεται, ὅταν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον λόγον ἔχῃ, ὃν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου· ἐν διακεκριμένῳ δὲ, ὅταν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον λόγον ἔχῃ, ὃν

(γ) Κατὰ τὸ β΄. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν η΄. τοῦ ι. (δ) Κατὰ τὸν κδ΄. ὁρισμ. (ε) Κατὰ τὴν ε΄ τοῦ ι. (ζ) Ὅρα τὴν ε΄. Συνέκ. τῆς δ΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (η) Ὅρα τὴν δ΄. τῆς αὐτ. προτ. (θ) Κατὰ τὴν α΄ τοῦ ς΄. (ι) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ς΄. (κ) Κατὰ τὴν α΄. τοῦ ς΄. (λ) Κατὰ τὴν ιζ. τοῦ ς΄.

ἐν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου.

ΙΑ'. Αἱ ΠΦ, ΠΖ, ΠΥ συνεχῆ ἁρμονικὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, εἴτουν ἐστὶν ὡς ΠΦ : ΠΥ :: ΦΖ : ΖΥ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΦΩ : ΥΗ :: ΩΡ : ΗΡ· ἔστι δὲ ὡς μὲν ΦΩ : ΥΗ :: ΦΖ : ΖΥ, ὡς δὲ ΩΡ : ΗΡ :: ΡΔ : ΡΥ, (μ) καὶ ὡς ΡΔ : ΡΥ :: ΠΦ : ΠΥ· (ν) ἄρα καὶ ὡς ΠΦ : ΠΥ :: ΦΖ : ΖΥ. (ξ)

ΙΒ'. Ἐὰν ἀπὸ δύω τυχόντων τῆς Ὑπερβολῆς σημείων τῶν Ρ, καὶ Η (πίν. ΙΔ'. σχ. 1.) ἐπιζευχθῶσιν ἐπὶ τὰς Ἑστίας Φ, Υ εὐθεῖαι αἱ ΡΦ, ΗΦ, καὶ ΡΥ, ΗΥ, ἔσονται αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι γωνίαι ΡΦΗ, ΡΥΗ διπλάσιαι τῆς ΡΝΗ, τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΡΝ, ΗΝ τῶν ἀχθεισῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Ρ, Η. ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία ΡΦΠ=ΦΥΡ+ΥΡΦ, (ο) κοινῆς προσκειμένης τῆς ΦΥΡ, ἔσεται ἡ ΡΦΠ+ΦΥΡ=2ΦΥΡ+ΥΡΦ ἀλλ' ἡ ΥΡΦ=ΥΡΖ+ΖΡΦ, ἔστι δὲ ἡ ΥΡΖ=ΖΡΦ, (π) ἡ ἄρα ΡΦΠ+ΦΥΡ=2ΦΥΡ+2ΥΡΖ. ἀλλ' ἡ 2ΦΥΡ, εἴτουν ἡ 2ΖΥΡ+2ΥΡΖ = 2ΡΖΦ, (ρ) ἡ ἄρα ΡΦΠ+ΦΥΡ = 2ΡΖΦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ἡ ΗΦΠ+ΦΥΗ= 2ΗΤΦ=2ΖΤΝ. ἡ ἄρα ΡΦΠ+ΦΥΡ+ΗΦΠ+ΦΥΗ= 2ΡΖΦ+2ΖΤΝ, εἴτουν ἡ ΡΦΗ+ΡΥΗ=2ΡΖΦ+2ΖΤΝ. ἀλλ' ἡ 2ΡΖΦ+2ΖΤΝ=2ΡΝΗ. (σ) ἡ ἄρα ΡΦΗ+ΡΥΗ=2ΡΝΗ.

ΙΓ'. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ Φ διαχθῇ εὐθεῖα ἡ ΕΦΗ, ἡ γωνία ΕΛΗ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΕΛ,

(μ) Κατὰ τὴν γ'. τοῦ ς'. (ν) Κατὰ τὴν β'. τοῦ ς'. (ξ) Κατὰ τὴν ι'. τοῦ ι'. (ο) Κατὰ τὴν λβ'. τοῦ α'. (π) Κατὰ τὴν η'. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ρ) Ἐκ τῆς λβ'. τοῦ α'. δῆλον. (σ) Κατὰ τὴν αὐτ.

ΡΛ, ΗΛ, τῶν ἐπὶ τῶν σημείων Ε, Η ἀχθεισῶν ἀμβλεῖαι ἔσαι. ἡ γὰρ ΕΛΗ ἴση ἐςὶ τῷ ἡμίσει τῶν ΕΦΠ, ΗΦΠ, ΡΥΗ. (τ) τὸ δὲ τέτων ἥμισυ μεῖζον ὀρθῆς. διὸ δὴ ϗ ἡ ΕΛΗ μείζων ὀρθῆς, εἴτεν ἀμβλεῖά ἐςι.

ΙΔ΄. Τὸ τῶν Ἑςιῶν ἀπόςημα ΥΦ (χ. 2.) μέση ἀνάλογόν ἐςι τῆς τε πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ ϗ τῆς ΨΖ, τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς πλαγίας ΨΑ ϗ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΖ. ἔςι γὰρ τὸ ΨΦ. ΦΑ $=$ ΨΑ. ΑΖ. (υ) κοινῦ δὲ προσκειμένυ τῦ $\overline{\Gamma A}^2$, ἔσεται τὸ ΨΦ. 4 ΦΑ $+ \overline{\Gamma A}^2$, (φ) ἤτοι τὸ $\overline{\Gamma \Phi}^2 =$ ΨΑ. ΑΖ $+ \overline{\Gamma A}^2$. ἀλλὰ τῦ μὲν $\overline{\Gamma \Phi}^2$ τετραπλάσιον τὸ 4· $\overline{\Upsilon \Phi}^2$· τῦ δὲ ΨΑ. ΑΖ $+ \overline{\Gamma A}^2$, τὸ ΨΑ. ΑΖ $+ \overline{\Psi A}^2$. τὸ ἄρα $\overline{\Upsilon \Phi}^2 =$ ΨΑ. 4· ΑΖ $+ \overline{\Psi A}^2$. ἀλλὰ τὸ ΨΑ. ΑΖ $+ \overline{\Psi A}^2 =$ ΑΨ. ΨΖ. (χ) τὸ ἄρα $\overline{\Upsilon \Phi}^2 =$ ΑΨ. ΨΖ. ὡς ἄρα ΨΑ: ΥΦ:: ΥΦ: ΨΖ. (ψ)

ΙΕ΄. Ἐὰν ἀπὸ τῶν Ἑςιῶν Φ, Υ (χ. 3.) ἐπὶ τὸ τυχὸν τῆς Ὑπερβολῆς σημεῖον Μ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΦΜ, ΥΜ, τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσαι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετραγώνῳ, τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας Διαμέτρυ ΤΗ τῆς Δευτεραίας ϚΜ, εἴτεν τὸ ΦΜ. ΥΜ $= \overline{\Gamma H}^2$. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῦ Μ ἡ ἐφαπτομένη ΜΝ, τὴν μὲν ἀρχικὴν Διάμετρον κατὰ τὸ Ζ, τὴν δὲ δευτέραν κατὰ τὸ Κ τέμνυσα. ϗ ἀπὸ μὲν τῦ κέντρυ Γ ἤχθω ἡ ΓΝ τῇ ΥΜ παράλληλος, ϗ τῇ ἐφαπτομένῃ κατὰ τὸ Ν συμπίπτυσα. ἀπὸ δὲ τῆς Ἑςίας Φ ἐπὶ τὰ Ν ϗ Κ σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΦΝ, ΦΚ. ϗ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΝΚ, ΦΓΚ γωνιῶν ὀρθή ἐςιν, (ω) ὁ ἄρα διαμέτρῳ τῇ ΦΚ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν

(τ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (υ) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ. (φ) Κατὰ τὴν ϛ΄. τῦ β΄. (χ) Κατὰ τὴν γ΄. τῦ β΄. (ψ) Κατὰ τὴν ιζ΄. τῦ ϛ΄. (ω) Ὅρα τὴν δεῖξ. τῆς θ΄. τῦ δὲ τῦ τμήμ.

τῶν Φ, Ν, Κ, Γ σημείων ἥξει. (α) διὸ τὸ ΦΖ. ΖΓ=ΝΖ. ΖΚ. (β) ὡς ἄρα ΦΖ : ΖΚ :: ΝΖ : ΖΓ. (γ) ἀλλ' ὡς ΝΖ : ΖΓ :: ΖΜ : ΖΥ. (δ) ὡς ἄρα ΦΖ : ΖΚ :: ΖΜ : ΖΥ. (ε) εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις. (ζ) ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ ΦΖΚ, ΥΖΜ τρίγωνα, (η) καὶ ἡ γωνία ΦΚΖ=ΖΥΜ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΜΦ=ΖΜΥ, (θ) ὡς ἄρα ΦΜ : ΜΚ :: ΖΜ : ΜΥ. (ι) τὸ ἄρα ΦΜ. ΜΥ=ΖΜ. ΜΚ. (κ) τούτων κειμένων, γεγράφθωσαν συνεζευγμέναι τομαὶ αἱ ΒΥ, ΠΗ, (πίν. ΙΕ. σχ. 1.) αἷς συμβαλλέτω κατὰ τὰ Υ, Η σημεῖα ἡ ΗΥ ἡ δευτέρα Διάμετρος τῆς Δευτεραίας ϚΜ. καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἤχθω ἥτε ἐφαπτομένη ΗΤ, τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ ΒΟ κατὰ τὸ Τ συμβάλλουσα, καὶ αἱ τεταγμέναι ΗΕ, ΗΟ ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν ΑΝ, καὶ ἐπὶ τὴν δευτέραν ΒΟ Διάμετρον. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς κορυφῆς Π τετάχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΡ, ἐπί τε τὴν Δευτεραίαν ϚΜ, καὶ ἐπὶ τὴν δευτέραν αὐτῆς ΥΡ. ἀπὸ δὲ τῆς ἐπαφῆς Μ τετάχθωσαν αἱ ΜΝ, ΜΙ, ἐπί τε τὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν δευτέραν αὐτῆς Διάμετρον. καὶ ἐπεὶ ὡς ΓΗ : ΓΡ :: ΙΤ : ΓΠ, (λ) ἔστι δὲ ὡς ΓΤ : ΓΠ :: ΓΠ : ΓΟ, (μ) ἄρα καὶ ὡς ΓΗ : ΓΡ :: ΓΠ : ΓΟ. (ν) τὸ ἄρα τρίγωνον ΓΡΠ=ΓΗΟ. (ξ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΓΡΠ=ΓΠΩ, τὸ δὲ ΓΗΟ=ΓΕΗ. (ο) τὸ ἄρα ΓΠΩ

(α) Ἐκ τῆς δ΄. Συνεπ. τῆς μετὰ τὴν ή τοῦ ϛ΄. δῆλ. (β) Κατὰ ά Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν λϛ΄. τοῦ γ΄. (γ) Κατὰ τὴν ιϛ΄. τοῦ ϛ΄. (δ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ϛ΄. (ε) Κατὰ τὴν ί. τοῦ έ. (ζ) Κατὰ τὴν ιέ. τοῦ ά. (η) Κατὰ τὴν ϛ΄. τοῦ ϛ΄. (θ) Κατὰ τὴν ή. τοῦ δὲ τοῦ τμήμ. (ι) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ϛ΄. (κ) Κατὰ τὴν ιϛ΄. τοῦ ϛ΄. (λ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ϛ΄. (μ) Κατὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τῆς δ΄. τοῦ δὲ τοῦ τμήμ. (ν) Κατὰ τὴν ί. τοῦ έ. (ξ) Κατὰ τὴν ιά. τοῦ ϛ΄. (ο) Κατὰ τὴν λδ΄, τοῦ ά.

ΓΠΩ = ΓΕΗ. πάλιν ἐπεὶ ὡς ΜΓ : ΓΩ : : ΚΓ : ΓΠ, (π) ὡς δὲ ΚΓ : ΓΠ : : ΓΠ : ΓΙ, (ἔστι γὰρ ὡς ΑΝ. ΝΨ : $\overline{\text{ΝΜ}}^2$: : $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{ΒΠ}}^2$, (ρ) ἔστι δὲ τὸ ΝΓ. ΝΖ = ΑΝ. ΝΨ, (σ) τὸ δὲ $\overline{\text{ΝΜ}}^2$ = $\overline{\text{ΓΙ}}^2$, καὶ ὡς $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{ΒΠ}}^2$: : $\overline{\text{ΓΨ}}^2$: $\overline{\text{ΓΠ}}^2$, ἄρα καὶ ὡς ΝΓ. ΝΖ : $\overline{\text{ΓΙ}}^2$: : $\overline{\text{ΓΨ}}^2$: $\overline{\text{ΓΠ}}^2$. ἔστι δὲ τὸ $\overline{\text{ΓΨ}}^2$ = ΝΓ. ΓΖ, (τ) καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἔσται ὡς ΝΓ. ΝΖ : ΝΓ. ΓΖ, εἴτουν (υ) ὡς ΝΖ : ΓΖ : : $\overline{\text{ΓΙ}}^2$: $\overline{\text{ΓΠ}}^2$. ἔστι δὲ ὡς ΝΖ : ΖΓ : : ΝΜ : ΚΓ. (φ) διὸ δὴ καὶ ὡς ΝΜ, ἤτοι ΓΙ : ΚΓ : : $\overline{\text{ΓΙ}}^2$: $\overline{\text{ΓΠ}}^2$. καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΚΓ : ΓΙ : : $\overline{\text{ΓΠ}}^2$: $\overline{\text{ΓΙ}}^2$. οὐκοῦν ὡς ΚΓ : ΓΠ : : ΓΠ : ΓΙ. (χ)) ὡς ἄρα ΜΓ : ΓΩ : : ΓΠ : ΓΙ. (ψ) ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς ΜΠ, ἐστὶν ὡς μὲν ΜΓ : ΓΩ : : ΜΠΓ : ΓΠΩ, ὡς δὲ ΓΠ : ΓΙ : : ΜΠΓ : ΓΜΙ. (ω) ὡς ἄρα ΜΠΓ : ΓΠΩ : : ΜΠΓ : ΓΜΙ. (α) τὸ ἄρα ΓΠΩ = ΓΜΙ. (β) ἀλλὰ δέδεικται τὸ μὲν ΓΠΩ = ΓΕΗ, τὸ δὲ ΓΜΙ = ΓΝΜ. τὰ ἄρα ΓΠΩ, ΓΝΜ, ΓΕΗ ἴσα ἀλλήλοις. ἐπεὶ δὲ ὡς ΓΜΝ : ΖΜΝ : : ΓΝ : ΖΝ, (γ) ἔστι δὲ ὡς ΓΝ : ΖΝ : : ΚΙ : ΓΙ. (γ) (καὶ γὰρ ὡς ΓΖ : ΖΝ : : ΚΖ : ΖΜ, (δ) καὶ συντεθέντα ὡς ΓΝ : ΖΝ : : ΚΜ : : ΖΜ. καὶ ὡς ΚΜ : ΖΜ : : ΚΙ : ΓΙ. (ε)) ὡς ἄρα ΓΜΝ : ΖΜΝ : : ΚΙ : ΓΙ. (ζ) ἔστι δὲ ὡς ΚΙ : ΓΙ : : ΚΜΙ : ΓΜΙ, (η) ἄρα καὶ ὡς ΓΜΝ : ΖΜΝ : :

(π) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς'. (ρ) Κατὰ τὴν α'. τοῦ δε τοῦ τμήμ. καὶ τὸν δ'. ὁρισμ. καὶ τὸ β'. Πόρισ. τὸ μετὰ τὴν η'. τοῦ ε' (σ) Ὅρα τὴν ε'. Συνέπ. τῆς δ'. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (τ) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς αὐτ. (υ) Κατὰ τὴν α'. τοῦ ς'. (φ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς'. (χ) Κατὰ τὸ β'. Πόρσ. τὸ μετὰ τὴν η'. τοῦ ς'. (ψ) Κατὰ τὴν ε'. τοῦ ε'. (ω) Κατὰ τὴν α'. τοῦ ς'. (α) Κατὰ τὴν ἐνθ. ε'. (β) Κατὰ τὴν β'. τοῦ ε'. (γ) Κατὰ τὴν α'. τοῦ ς'. (δ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς'. (ε) Ἐκ τῆς β'. τοῦ ς'. δῆλον. (ζ) Κατὰ τὴν ε'. τοῦ ε'. (η) Κατὰ τὴν α'. τοῦ ς'.

ΖΜΝ :: ΚΜΙ : ΓΜΙ, (θ) καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΖΜΝ : ΓΜΝ :: ΓΜΙ : ΚΜΙ. ἀλλ' ἑκάτερον τῶν ΓΜΝ, ΓΜΙ ἴσον δέδεικται τῷ ΓΕΗ. ἄρα ὡς ΖΜΝ : ΓΕΗ :: ΓΕΗ : ΚΜΙ. οὐκοῦν καὶ ὡς $\overline{\mathrm{ZM}}^2 : \overline{\mathrm{ΓΗ}}^2 :: \overline{\mathrm{ΓΗ}}^2 : \overline{\mathrm{ΜΚ}}^2$. (ι) διὸ δὴ καὶ ὡς ΖΜ : ΓΗ :: ΓΗ : ΜΚ. (κ) τὸ ἄρα $\mathrm{ΖΜ.ΜΚ} = \overline{\mathrm{ΓΗ}}^2$. (λ) ἀλλὰ τὸ $\mathrm{ΖΜ.ΜΚ} = \mathrm{ΥΜ.ΦΜ}$, ὡς προδέδεικται. τὸ ἄρα $\mathrm{ΥΜ.ΦΜ} = \overline{\mathrm{ΓΗ}}^2$.

ΙϚ. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΓΡ (πίν. ΙΔ. σχ. 2.) τῆς δευτερείας Διαμέτρου, καὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΥΡ. ΡΦ, τοῦ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐπεζευγμένων ἀπὸ τῶν Ἑστιῶν Υ, Φ ἐπὶ τῆς ἐπαφῆς Ρ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπεροχῇ, καθ' ἣν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ τετραγώνου, εἴτουν τὸ $2\overline{\mathrm{ΓΑ}}^2$ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τοῦ ἀποστήματος τοῦ κέντρου Γ καὶ τῆς ἑτέρας τῶν Ἑστιῶν Φ τετράγωνον, εἴτουν τὸ $\overline{\mathrm{ΓΦ}}^2$, τετέστι τὸ $\overline{\mathrm{ΓΡ}}^2 - \mathrm{ΥΡ.ΡΦ} = 2\overline{\mathrm{ΓΑ}}^2 - \overline{\mathrm{ΓΦ}}^2$. κείσθω γάρ τις εὐθεῖα ἡ $\mathrm{ΥΡ} = \mathrm{ΥΡ} + \mathrm{ΡΦ}$. καὶ ἀπὸ τοῦ Ρ ἤχθω ἡ ΡΛ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΥΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{\mathrm{ΥΡ}}^2 + \overline{\mathrm{ΦΡ}}^2 = 2\mathrm{ΥΡ.ΡΦ} + \overline{\mathrm{ΥΦ}}^2$, (μ) κοινῶς ἀφαιρεθέντος τοῦ 2ΥΡ. ΡΦ, ἔσεται τὸ $\overline{\mathrm{ΥΡ}}^2 + \overline{\mathrm{ΦΡ}}^2 - 2\mathrm{ΥΡ.ΡΦ} = \overline{\mathrm{ΥΦ}}^2$. ἀλλ' ἡ $\mathrm{ΥΦ} = \mathrm{ΨΑ}$· ἔστι γὰρ $\mathrm{ΥΡ} - \mathrm{ΡΦ} = \mathrm{ΨΑ}$, (ν) καὶ $\mathrm{ΥΡ} - \mathrm{ΡΦ} = \mathrm{ΥΦ}$· τὸ ἄρα $\overline{\mathrm{ΥΡ}}^2 + \overline{\mathrm{ΦΡ}}^2 - 2\mathrm{ΥΡ.ΡΦ} = \overline{\mathrm{ΨΑ}}^2$. ἔστι δὲ τὸ μὲν $\overline{\mathrm{ΥΡ}}^2 = \overline{\mathrm{ΥΓ}}^2 + \overline{\mathrm{ΡΓ}}^2 + 2\mathrm{ΥΓ.ΓΛ}$, (ξ) τὸ δὲ $\overline{\mathrm{ΦΡ}}^2 = \overline{\mathrm{ΡΓ}}^2 + \overline{\mathrm{ΓΦ}}^2 - 2\mathrm{ΓΛ.ΓΦ}$, (ο) εἴτουν τὸ $\overline{\mathrm{ΦΡ}}^2 = \overline{\mathrm{ΡΓ}}^2 + \overline{\mathrm{ΥΓ}}^2 - 2\mathrm{ΓΛ.ΥΓ}$. διὸ τὸ $\overline{\mathrm{ΥΡ}}^2 + \overline{\mathrm{ΦΡ}}^2 =$

(θ) Κατὰ τὴν ὁρισμ. ε. (ι) Κατὰ τὴν ιθ'. τοῦ ς'. (κ) Κατὰ τὸ ζ. Θεώρημ. τῶν μετὰ τὸ ε. (λ) Κατὰ τὴν ιζ. τοῦ ς'. (μ) Κατὰ τὴν ζ. τοῦ β'. (ν) Κατὰ τὴν θ'. τοῦ δὲ τοῦ τμήμ. (ξ) Κατὰ τὴν ιβ'. τοῦ β'. (ο) Κατὰ τὴν ιγ'. τοῦ β'.

$2\overline{\mathrm{P\Gamma}}^2 + 2\overline{\mathrm{T\Gamma}}^2$. τὸ ἄρα $2\overline{\mathrm{P\Gamma}}^2 + 2\overline{\mathrm{T\Gamma}}^2 - 2\mathrm{\Upsilon P.\ P\Phi} = \overline{\Psi\mathrm{A}}^2$. οὐκοῦν τὸ $\overline{\mathrm{P\Gamma}}^2 + \overline{\mathrm{T\Gamma}}^2 - \mathrm{\Upsilon P.\ P\Phi} = 2\overline{\mathrm{\Gamma A}}^2$. καὶ κοινῶς ἀφαιρεθέντος τοῦ $\overline{\mathrm{T\Gamma}}^2$, ἤτοι τοῦ $\overline{\Phi\Gamma}^2$, ἔσεται τὸ $\overline{\mathrm{P\Gamma}}^2 - \mathrm{\Upsilon P.\ P\Phi} = \overline{\mathrm{\Gamma A}}^2 - \overline{\Gamma\Phi}^2$.

ΙΖ'. Ἡ ὑπεροχὴ τῶν τετραγώνων τοῦ τε ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ, καὶ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπεροχῇ, καθ' ἣν τὸ τετράγωνον τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου ΒΡ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας αὐτῆς ΘΗ τετράγωνον, ἤτοι τὸ $\overline{\Psi\mathrm{A}}^2 - \overline{\Delta\mathrm{E}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2 - \overline{\Theta\mathrm{H}}^2$. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{\mathrm{P\Gamma}}^2 - \mathrm{\Upsilon P.\ P\Phi} = 2\overline{\mathrm{\Gamma A}}^2 - \overline{\Gamma\Phi}^2$, (π) ἔστι δὲ τὸ μὲν $\mathrm{\Upsilon P.\ P\Phi} = \overline{\mathrm{\Gamma H}}^2$, (ρ) τὸ δὲ $\overline{\mathrm{\Gamma A}}^2 = \overline{\Gamma\Phi}^2 - \Psi\Phi.\ \Phi\mathrm{A}$· (σ) τὸ ἄρα $\overline{\mathrm{P\Gamma}}^2 - \overline{\mathrm{\Gamma H}}^2 = \overline{\mathrm{\Gamma A}}^2 + \overline{\Gamma\Phi}^2 - \Psi\Phi\ \Phi\mathrm{A} - \overline{\Gamma\Phi}^2$, ἤτοι τὸ $\overline{\mathrm{P\Gamma}}^2 - \overline{\mathrm{\Gamma H}}^2 = \overline{\mathrm{\Gamma A}}^2 - \Psi\Phi.\ \Phi\mathrm{A}$. ἀλλὰ τὸ $\Psi\Phi.\ \Phi\mathrm{A} = \overline{\mathrm{\Gamma E}}^2$. (ἔστι γάρ τό, τε ΨΦ. ΦΑ τεταρτημόριον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ, καὶ τῆς ὀρθίας περιεχομένου, (τ) τεταρτημορίῳ δὲ τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου ἴσον καὶ τὸ $\overline{\mathrm{\Gamma E}}^2$. (υ)) τὸ ἄρα $\overline{\mathrm{P\Gamma}}^2 - \overline{\mathrm{\Gamma H}}^2 = \overline{\mathrm{\Gamma A}}^2 - \overline{\mathrm{\Gamma E}}^2$. διὸ δὴ καὶ τὸ $\overline{\mathrm{BP}}^2 - \overline{\Theta\mathrm{H}}^2 = \overline{\Psi\mathrm{A}}^2 - \overline{\Delta\mathrm{E}}^2$.

ΙΗ. Ἐὰν οὖν ἡ Ὑπερβολὴ ἰσόπλευρος ᾖ, τὴν πλαγίαν πλευρὰν δῆθεν ἴσην ἔχουσα τῇ ὀρθίᾳ, καὶ αἱ λοιπαὶ αὐτῆς Διάμετροι ἴσαι ἔσονται. οὐδεμία γὰρ ἡ αὐτῶν διαφορά. (φ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'. (χ)

Ἐὰν Ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη αὐτῆς ληφ-

(π) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ρ) Κατὰ τὴν προλ. ιε. Συνέπ. (σ) Ἐκ τῆς ς'. τοῦ β'. δῆλ. (τ) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ. (υ) Ἐκ τοῦ ὁρισ. δῆλ. (φ) Ἐκ τῆς προλ. Συνεπ. δῆλ. (χ) Ἡ α'. ἐστὶ τοῦ β'. βιβλ. τοῦ Ἀπολ.

ληφθῶσιν εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις, ὥςε τὴν ὅλην ἴσην εἶναι τῇ δευτέρᾳ συνεζευγμένῃ Διαμέτρῳ, αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

Ἔςω Ὑπερβολὴ, ἧς Διάμετρος μὲν ἀρχικὴ ἡ ΨΚ, κέντρον δὲ τὸ Γ. καὶ ἐφαπτέσθω αὐτῆς κατὰ τὸ Α ἡ ΔΕ, ἴσαι δὲ εἰλήφθωσαν αἱ ΑΕ, ΔΕ ἀλλήλαις, ὅλη δὲ ἡ ΔΕ ἴση τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ ΒΠ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΓΔ, ΓΕ, ἐκβεβλήσθωσαν. λέγω δὴ, ὅτι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ. πίν. ΙϚ. σχ. 1.

Εἰ γὰρ δυνατὸν συμπιπτέτω ἡ ΓΕ ἐκβληθεῖσα τῇ τομῇ κατὰ τὸ Λ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετάχθω ἀπὸ τοῦ σημείου Λ ἡ ΛΚ ἐπὶ τὴν ΨΚ Διάμετρον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΨΚ. ΚΑ : $\overline{\text{ΚΛ}}^2$: : ΨΑ, πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευρὰν, (ψ) ἔςι δὲ ὡς ΨΑ, πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευρὰν, οὕτω $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{ΒΠ}}^2$, (ω) ἢ $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{ΔΕ}}^2$ · ἡ γὰρ ΔΕ $=$ ΒΠ· (α) ὡς ἄρα ΨΚ. ΚΑ : $\overline{\text{ΚΛ}}^2$ :: $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{ΔΕ}}^2$. (β) ἀλλ' ὡς $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{ΔΕ}}^2$: : $\overline{\text{ΓΑ}}^2$: $\overline{\text{ΑΕ}}^2$, καὶ ὡς $\overline{\text{ΓΑ}}^2$: $\overline{\text{ΑΕ}}^2$: : $\overline{\text{ΓΚ}}^2$: $\overline{\text{ΚΛ}}^2$ · (γ) εὐθεῖα γὰρ ἡ ΓΕΛ· (δ) ὡς ἄρα ΨΚ. ΚΑ : $\overline{\text{ΚΛ}}^2$: : $\overline{\text{ΓΚ}}^2$: $\overline{\text{ΚΛ}}^2$ · (ε) τὸ ἄρα ΨΚ. ΚΑ $=$ $\overline{\text{ΓΚ}}^2$.

(ψ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ω) Ἐκ τοῦ δ. ὁρισμ. καὶ τοῦ β. Πορίσμ. τοῦ μετὰ τὴν η. δῆλον. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ε. (γ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ ς, καὶ τὸ ἀριθμ. Πόρισ. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὴν ἀριθμ. ια (ζ) ἀλλὰ τὸ ΨΚ. ΚΑ $+ \overline{\Gamma A}^2 = \overline{\Gamma K}^2$. (η) τὸ ἄρα ΨΚ. ΚΑ ἴσον τῷ $\overline{\Gamma K}^2$ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΕ ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη συμπίπτει. αἱ ἄρα ΓΕ, ΓΔ Ἀσύμπτωτοι εἰσι καὶ λέγονται.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. (θ) Αἱ Ἀσύμπτωτοι ΓΔ, ΓΕ καὶ ἡ τομὴ ΙΔΛ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόντε προσάγουσιν ἑαυτάς, καὶ παντὸς δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα, κἂν οὐδέποτε συμπίπτωσιν. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἡ ΛΚ, καὶ συμβαλλέτω τῇ μὲν τομῇ κατὰ τὸ Ι, ταῖς δὲ Ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Η, Μ σημεῖα. καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΚ. ΚΑ : $\overline{K\Lambda}^2$: $\overline{\Gamma A}^2$: $\overline{AE}^2$, (ι) ἔστι δὲ ὡς $\overline{\Gamma A}^2$ $\overline{AE}^2$ :: $\overline{\Gamma K}^2$: $\overline{KM}^2$, (κ) ὡς ἄρα $\overline{\Gamma K}^2$: $\overline{KM}^2$ :: ΨΚ. ΚΑ : $\overline{K\Lambda}^2$, (λ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς $\overline{\Gamma K}^2$: ΨΚ. ΚΑ :: $\overline{KM}^2$: $\overline{K\Lambda}^2$, καὶ διαιρεθέντα ὡς $\overline{\Gamma K}^2 -$ ΨΚ. ΚΑ : ΨΚ. ΚΑ :: $\overline{KM}^2 - \overline{K\Lambda}^2$: $\overline{K\Lambda}^2$. ἔστι δὲ τὸ μὲν $\overline{\Gamma K}^2 -$ ΨΚ. ΚΑ $= \overline{\Gamma A}^2$, τὸ δὲ $\overline{KM}^2 - \overline{K\Lambda}^2 =$ ΗΛ. ΛΜ. (μ) ὡς ἄρα $\overline{\Gamma A}^2$: ΨΚ. ΚΑ :: ΗΛ. ΛΜ : $\overline{K\Lambda}^2$, καὶ ἐναλλὰξ ὡς $\overline{\Gamma A}^2$: ΗΛ. ΛΜ :: ΨΚ. ΚΑ : $\overline{K\Lambda}^2$. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ΨΚ. ΚΑ : $\overline{K\Lambda}^2$ :: $\overline{\Gamma K}^2$: $\overline{KM}^2$, ὡς δὲ $\overline{\Gamma K}^2$: $\overline{KM}^2$: $\overline{\Gamma A}^2$: $\overline{AE}^2$, καθάπερ δέδεικται. ἄρα καὶ ὡς $\overline{\Gamma A}^2$: ΗΛ. ΛΜ :: $\overline{\Gamma A}^2$: $\overline{AE}^2$. (ν) τὸ ἄρα $\overline{AE}^2 =$ ΗΛ. ΛΜ. (ξ) οὐκοῦν τὸ ΗΛ. ΛΜ. ἴσον ὂν τῷ $\overline{AE}^2$, ὡρισμένη ποσότης

της

(ζ) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ε΄. (η) Κατὰ τὴν ϛ΄. τοῦ β΄. (θ) Ἡ ιδ΄. ἐστὶ τοῦ β΄. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων. (ι) Ὅρα τὴν δεῖξ. τῆς προκειμ. προτ. (κ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ϛ΄. καὶ τὸ β΄. Πόρισμ. τὸ μετὰ τὴν η΄. τοῦ αὐτ. (λ) Κατὰ τὴν ι΄. τοῦ ε΄. (μ) Κατὰ τὴν ϛ΄. τοῦ β΄. (ν) Κατὰ τὴν ἀριθμ. τοῦ ε΄. (ξ) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ε΄.

της ἐστίν. ἐπεὶ δὲ ὅσον ἡ ΗΜ τῆς κορυφῆς Α ἀφίσταται, τοσοῦτον ἡ ΙΛ αὔξει, ἐξ οὗ καὶ ἡ ΗΛ, ἀνάγκη ἄρα αὐξανομένης τῆς ΗΛ, ἐλαττοῦσθαι τὴν ΛΜ. ἐκ τούτου οὖν δῆλον ὅτι ἥτε ΓΕ καὶ ἡ τομὴ ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιον ἑαυτὰς προσάγουσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἔγγιον ἑαυτὴν προσάγει.

Β'. Αἱ ΓΔ, ΓΕ Ἀσύμπτωτοι ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβληθεῖσαι, τὴν κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένην ΦΟ τῆς ἀντικειμένης τομῆς οὕτω τέμνουσιν, ὥστε τὰ μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς μέρη ΨΦ, ΨΟ ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, ὅλην δὲ τὴν ΦΟ ἴσην τῇ ΔΕ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΓΑ : ΑΔ : : ΓΨ : ΨΟ, (ο) ἔστι δὲ ἡ ΓΑ = ΓΨ, ἄρα καὶ ἡ ΑΔ = ΨΟ. (π) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΕ = ΨΦ. ἔστι δὲ ἡ ΑΔ = ΑΕ. (ρ) ἄρα καὶ ἡ ΨΦ = ΨΟ. διὸ δὴ καὶ ἡ ΦΟ = ΔΕ.

Γ'. (σ) Ἑτέρα Ἀσύμπτωτος οὐκ ἔσται τέμνουσα τὴν ὑπὸ τῶν Ἀσυμπτώτων περιεχομένην γωνίαν ΔΓΕ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΙ. καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος τῆς ΓΑ σημείου Θ ἤχθω ἡ ΘΞ τῇ ΓΔ Ἀσυμπτώτῳ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΙ τῇ ΘΞ συμπίπτει ἐκβληθεῖσα, μετὰ δὲ τὴν σύμπτωσιν ὅσον ἐκβάλλεται τοσοῦτον ἀπ' αὐτῆς καὶ τῆς ΓΔ ἀφίσταται, ἡ δὲ τομὴ ΑΙ ἐκβαλλομένη ἔγγιον τῇ ΓΔ προσπελάζει, συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ ἡ ΓΙ, καὶ Ἀσύμπτωτος οὐκ ἔσται.

Δ'. Τὰ ἑκατέρωθεν τῆς ἐκβληθείσης Τεταγμένης ΛΙ μέρη ΛΜ, ΙΗ τὰ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῶν Ἀσυμπτώτων ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΓΚ : ΓΑ : :

(ο) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς'. (π) Κατὰ τὴν κ'. τοῦ ε'. (ρ) Ἐξ ὑποθ. (σ) Ἡ β'. πρότ. ἐστὶ τοῦ β'. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

ΚΗ : ΛΔ, ϗ ὡς ΓΚ : ΓΛ : : ΚΜ : ΛΕ, (τ) ἄρα καὶ ὡς ΚΗ : ΛΔ : : ΚΜ : ΛΕ. (υ) ἀλλ' ἡ ΛΔ = ΛΕ. ἄρα καὶ ἡ ΚΗ = ΚΜ. (φ) ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τῆς ΚΜ ἡ ΚΛ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΗ ἡ ΙΚ. ἐκεῖν ἡ ΛΜ = ΙΗ. καὶ γὰρ ἡ ΚΛ = ΙΚ. (χ)

Ε'. Καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΗΛ. ΛΜ = ΜΙ. ΙΗ. κοινὴ γὰρ προσκείσθω ἑκατέρᾳ τῶν ΗΙ, ΜΛ ἡ ΙΛ. ἐκεῖν ἡ ΗΛ = ΜΙ, ἔςι δὲ καὶ ἡ ΛΜ = ΙΗ, (ψ) τὸ ἄρα ΗΛ. ΛΜ = ΜΙ. ΙΗ.

ϛ'. Ἅπαντα τὰ τοιαῦτα ὀρθογώνια, εἴτεν ΗΛ. ΛΜ, ΜΙ. ΙΗ, ηλ. λμ, μι. ιη ἀλλήλοις τε ἴσα ἔσονται ϗ τῷ τεταρτημορίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΠ τετραγώνου. ἕκαςον γὰρ ἴσον τῷ $\overline{ΛΕ}^2$, (ω) τῷ ἴσῳ ὄντι τῷ $\overline{ΓΠ}^2$. (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'. (β)

Ἐὰν εὐθεῖά τις τέμνουσα τὴν τομὴν συμπίπτῃ ἑκατέρᾳ τῶν Ἀσυμπτώτων, τὰ περιεχόμενα ὀρθογώνια ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Ἀσυμπτώτων ϗ τῆς τομῆς ἴσα ἀλλήλοις εἰσί· καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς τῆς εὐθείας ὑπὸ τῆς τομῆς πρὸς ταῖς Ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

Τεμ-

(τ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ϛ'. (υ) Κατὰ τὴν ε'. τοῦ ε'. (φ) Κατὰ τὴν κ'. τοῦ ε'. (χ) Κατὰ τὸν θ'. ὁρισμ. (ψ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ω) Ὅρα τὴν προλ. α'. Συνέπ. (α) Ἐκ τῆς ὑποθ. δῆλ. (β) Τὸ μὲν α'. μέρος ἡ ι'. ἐςί. τὸ δὲ β'. ἡ η'. τοῦ β'. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

Τεμνέτω εὐθεῖα ἡ ΧΩ τὴν Ὑπερβολὴν ιΑλ κατὰ τὰ ι, Λ σημεῖα, καὶ συμπιπτέτω ἑκατέρα τῶν Ἀσυμπτώτων ΓΔ, ΓΕ κατὰ τὰ Χ, Ω σημεῖα. λέγω Α΄. ὅτι τὸ ΩΛ. ΛΧ = Χι. ιΩ. Β΄. ὅτι ἡ ΩΛ = Χι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθωσαν διὰ τῶν Λ καὶ Ι σημείων τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένῃ ΔΕ παράλληλοι αἱ ΗΛΜ, ηλμ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Τὸ ΗΛ. ΛΜ πρὸς τὸ ηι. ιμ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ΗΛ : ηι, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ΛΜ : ιμ (γ) ἀλλ' ὡς μὲν ΗΛ : ηι :: ΛΧ : Χι, ὡς δὲ ΛΜ : ιμ :: ΩΛ : ιΩ. (δ) τὸ ἄρα ΗΛ. ΛΜ, πρὸς τὸ ηι. ιμ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ΛΧ : Χι, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ΩΛ : ιΩ. εἴτουν ὡς ΗΛ. ΛΜ : ηι. ιμ :: ΩΛ. ΛΧ : Χι. ιΩ. (ε) ἀλλὰ τὸ ΗΛ. ΛΜ = ηι. ιμ, (ζ) ἄρα καὶ τὸ ΩΛ. ΛΧ = Χι. ιΩ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπεὶ τὸ ΩΛ. ΛΧ = Χι. ιΩ, ἄρα ὡς ΛΧ : Χι :: ιΩ : ΩΛ, (η) καὶ διαιρεθέντα, ὡς ιΛ : Χι :: ιΛ : ΩΛ. ἡ ἄρα ΩΛ = Χι. (θ)

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΤΥ τῆς Ὑπερβολῆς ἐφάπτηται κατὰ τὸ Ι, ἑκατέρα τῶν Ἀσυμπτώτων συμβάλλουσα κατὰ τὰ Υ, Τ σημεῖα, ἴσα ἔσονται τὰ μέρη αὐτῆς ΙΥ, ΙΤ τὰ μεταξὺ τῆς ἐπαφῆς Ι καὶ τῶν Ἀσυμπτώτων. διήχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Λ ἡ ΩΛΧ τῇ ἐφαπτομένῃ ΤΥ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ

Μ 4 η

(γ) Κατὰ τὴν κγ΄. τοῦ ϛ΄. (δ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ϛ΄. (ε) Κατὰ τὸν ζ΄. ὁρισμ. τοῦ ε΄. (ζ) Κατὰ τὴν τῆς προλ. προτ. ϛ΄. Συνέπ. (η) Κατὰ τὴν ιϛ΄. τοῦ ϛ΄. (θ) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ε΄.

ἡ ΩΛ = Χι (ι) καὶ Φερομένης μὲν τῆς ΩΧ ἐπὶ τὰ Ι μέρη, τὰ μὲν Λ, ι σημεῖα ἀλλήλοις προσπελάζουσιν, ἡκούσης δὲ ἐπὶ τὸ Ι, ἀλλήλοις συμπίπτουσι, καὶ αἱ ΩΛ, Χι ταῖς ΙΥ, ΙΤ ταυτίζονται, δῆλον ἄρα ὅτι αἱ ΙΥ, ΙΤ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Β΄. (κ) Δύω δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΓΨ, ΓΩ (πίν. ΙΖ΄. χ. 1.) γωνίαν τυχοῦσαν περιεχουσῶν, τὴν ΨΓΩ, καὶ σημείου τοῦ Λ ἐντὸς τῆς γωνίας, ἔνεστι σημεῖα συνεχῆ πορίσασθαι, δι᾽ ὧν Ὑπερβολὴ γραφήσεται, διὰ τοῦ Λ ἥξουσα. διήχθω γὰρ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ Λ ἡ ΜΛΩ, ταῖς Ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Μ καὶ Ω συμβάλλουσα σημεῖα, καὶ δίχα κατὰ τὸ Λ τεμνομένη. καὶ διήχθωσαν διὰ τοῦ Λ εὐθεῖαι αἱ ΝΚ, ΠΙ, ΨΗ, καὶ ἄλλαι ἐφεξῆς ὁμοίως. καὶ εἰλήφθω ἀπὸ μὲν τῆς ΝΚ, ἡ ΝΡ = ΚΛ, ἀπὸ δὲ τῆς ΠΙ ἡ ΠΖ = ΛΙ, ἀπὸ δὲ τῆς ΨΗ, ἡ ΨΦ = ΛΗ. οὐκοῦν διὰ τῶν Ρ, Ζ, Φ σημείων Ὑπερβολὴ ἥξει, ἧς ἡ ΜΩ κατὰ τὸ Λ ἐφάπτεται.

Γ΄. Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου Γ καὶ τῆς ἐπαφῆς Ι (πίν. ΙϚ΄. χ. 1.) διαχθῇ δευτέρα Διάμετρος ἡ ΓΡ, ἔσεται ἡ ἐφαπτομένη ΤΥ ἡ δευτέρα συνεζευγμένη αὐτῇ Διάμετρος. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἔσαι ἡ ΤΥ, ἢ ἐλάσσων. ἔστι δὲ τούτων ἑκάτερον ἀδύνατον, (κἄν τε γὰρ ἐντὸς τῆς ΔΓΕ γωνίας, κἄν τε ἐκτὸς ὦσι τὰ τῆς ΤΥ πέρατα, αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἐπ᾽ αὐτὰ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, Ἀσύμπτωτοι ἔσονται, (λ) ὅπερ ἀδύνατον. (μ)) ἴση ἄρα ἡ ΤΥ τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ τῆς Δευτεραίας ΓΡ.

Δ΄.

(ι) Κατὰ τὸ β΄. μέρ. τῆς προκειμ. προτ. (κ) Ἡ γ΄. πρότ. ἐκ τοῦ β΄. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων. (λ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. καὶ τὴν προλ. Συνέπ. (μ) Κατὰ τὴν γ΄. Συνέπ. τῆς αὐτ.

Δ'. Δῆλον δὲ, ὅτι καὶ ἑκάτερον τῶ ΩΛ. ΛΧ, Χι. ιΩ ἴσον τεταρτημορίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου τῆς Δευτεραίας ΓΡ τετραγώνου, εἴτουν τῷ $\overline{\text{ΤΙ}}^2$. (ν) καὶ ὅτι πλὴν δύω Ἀσυμπτώτων, Ἀσύμπτωτοι ἄλλαι οὐ συναχθήσονται. (ξ)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον, ὅτι τὰς τῶν Ὑπερβολῶν καὶ τῶν ἄλλων καμπύλων Ἀσυμπτώτους, ὡς ἐφαπτομένας ἐκλαμβάνουσιν οἱ Γεωμέτραι κατὰ σημεῖα ἀπείροις ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀφεστηκότα ἀποστήμασιν. ὅτι δὲ οὐ πόῤῥω τῆς ἀληθείας ἀπέχει ἡ ἔννοια, δεικνύουσιν οὕτως· ἐφαπτέσθω τῆς Ὑπερβολῆς ἡ μὲν ΜΤ (πίν. Η'. σχ. 2.) κατὰ τὸ Μ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Τ συμβάλλουσα, ἡ δὲ ΑΩ κατὰ κορυφήν. καὶ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ τετάχθω μὲν ἡ ΜΠ, ἐπεζεύχθω δὲ ἐπὶ τὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρας Ψ ἡ ΜΨ, καὶ ἤχθω ἥτε ὀρθία πλευρὰ ΝΑ, καὶ ἡ δευτέρα Διάμετρος ΞϚ. οὐκοῦν ὡς ΓΠ: ΓΑ:: ΓΑ: ΓΤ. (ο) διὸ δὴ τοῦ Μ σημείου ἐπ' ἄπειρον τῆς κορυφῆς Α ἀφισαμένου, ἐπ' ἄπειρόν τε αὐξουμένης τῆς ΓΠ, διὰ τὴν ἀναλογίαν ἐξ ἀνάγκης ἡ ΓΤ ἐπ' ἄπειρον ἐλαττοῦται, καὶ τὸ σημεῖον Τ μικροῦ δεῖν τῷ Γ ταυτίζεται. τὴν ἄρα ΤΜ ὡς ἀπὸ τοῦ Γ διηγμένην ἐκλαμβάνειν ἔξεστιν. ἐπεὶ δὲ ὡς ΨΠ. ΠΑ: $\overline{\text{ΜΠ}}^2$:: ΨΑ: ΝΑ, (π) καὶ ὡς ΨΑ: ΝΑ:: $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{ΞϚ}}^2$, (ϱ) ἔστι γὰρ ὡς ΨΑ: ΞϚ:: ΞϚ: ΝΑ, (σ) ὡς ἄρα ΨΠ. ΠΑ: $\overline{\text{ΜΠ}}^2$:: $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{ΞϚ}}^2$, εἴτουν ὡς ΨΠ. ΠΑ: $\overline{\text{ΜΠ}}^2$::

 $\overline{\text{ΓΑ}}^2$:

(ν) Ἐκ τῶν ἀρημ. ἐν τῇ προλ. α'. Συνεπ. (ξ) Ὅρα τὴν γ'. Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (ο) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς δ'. προτ. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (π) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ϱ) Κατὰ τὸ β'. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν η. τοῦ ϛ'. (σ) Κατὰ τὸν κδ'. ὁρισ.