ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΚ

ΠΑΛΑΙΩΝ ϗ ΝΕΩΤΕΡΩΝ

Συνερανισθέντων

ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ

ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ

ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ

ΚΥΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,

Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ ἐκδοθέντων,
Ὅπως δωρεὰν διανέμωνται τοῖς ἐν τοῖς
Ἑλληνομουσείοις φοιτῶσιν,

ΥΠΟ ΤΩΝ ΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ ϗ ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ
ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ

ΖΩΣΙΜΑ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ,

περιέχων

ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ,

ΤΗΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ,

ΚΑΙ

ΤΑΣ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΑΣ.

ΕΝ ΜΟΣΧΑ,
Ἐν τῷ τῆς Κοινότητος Τυπογραφείῳ παρὰ
Ῥηδηγέρῳ ϗ Κλαυδίῳ.
Ἔτει 1799.

Съ дозволенія Московской Цензуры.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ,

ΟΙΣ ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΤΙΝΑ ΠΡΟΣΕΤΕΘΗ.

ΛΗΜΜΑ Α'.

Τὸ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση τῇ τοῦ κύκλου ἡμιδιαμέτρῳ· ἡ δὲ, τῇ τοῦ πολυγώνου περιμέτρῳ.

Ἔστω κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕ περὶ τὸν ΘΛΖΗΙ κύκλον περιγεγραμμένον. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὸ τῆς ἁφῆς σημεῖον Θ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΘ. ἔστω δὲ τοῦ ΠΡΣ τριγώνου, ἡ μὲν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρὰ ΠΡ, ἴση τῇ ΚΘ· ἡ δὲ ΡΣ, τῇ τοῦ πολυγώνου περιμέτρῳ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΠΡΣ τριγώνῳ. πίν. Α. σχ. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπί τε τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἐπὶ τὰ τῶν ἐπαφῶν σημεῖα Ζ, Λ, Ι, Η ἐπεζεύχθωσαν αἱ

ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ, καὶ αἱ ΚΖ, ΚΛ, ΚΙ, ΚΗ. καὶ τετμήσθω ἡ ΡΣ εἰς ἴσα μέρη δέκα, τὰ ΡΤ, ΤΦ, ΦΜ, κτ. (α). καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΤ, ΠΦ, ΠΜ, καὶ αἱ ἑξῆς.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΚΘΔ, ΚΙΔ, ΚΙΕ, κτ. τρίγωνα ἴσα ἀλλήλλοις εἰσίν. ὡσαύτως καὶ τὰ ΠΡΤ, ΠΤΦ, ΠΦΜ, κτ. (β). ἀλλὰ τὸ ΘΚΔ = ΠΡΤ. ἔστι γὰρ τὸ μὲν ὕψος ΚΘ = ΠΡ, ἡ δὲ βάσις ΘΔ = ΡΤ. (γ) ὅλη γὰρ ἡ ΡΣ ἴση τῇ τοῦ πολυγώνου περιμέτρῳ, (δ) αἱ δὲ ΘΔ, ΡΤ δεκατημόρια τῶν ὅλων. ἄρα ἕκαστον τῶν ΚΘΔ, ΚΙΔ, ΚΙΕ, κτ τριγώνων ἴσον ἑκάστῳ τῶν ΠΡΤ, ΠΤΦ, ΠΦΜ, κτ. ὅλον ἄρα τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΠΡΣ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τὸ μὲν περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον ἴσον ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τοῦ κύκλου ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ εὐθεῖα ἴση τῇ τοῦ πολυγώνου περιμέτρῳ· τὸ δὲ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον ἴσον τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγομένη κάθετος μιᾷ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν, βάσις δὲ εὐθεῖα ἴση τῇ τοῦ πολυγώνου περιμέτρῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. (ε)

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου εἰς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν,

---

(α) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς ι. τοῦ ς΄. βιβλ. τῆς Γεωμ. (β) Κατὰ τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ΄. τοῦ ς΄. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Ὁμοίως.
(ε) Τὸ πρῶτόν ἐστι τοῦ Ἀρχιμ. ἐν τῷ περὶ κύκλου μετρήσεως βιβλ.

ρειαν, αὐτὸ δὲ τὸ πολύγωνον εἰς τὸν κύκλον ἀπολήγει. (ζ) ἀλλὰ τὸ εἰρημένον πολύγωνον ἴσον ἐςὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, ȣ̂ ἡ μὲν ἐκ τȣ̂ κέντρȣ ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. (η) ἄρα καὶ ὁ κύκλος ἴσος ἐςὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, ȣ̂ ἡ μὲν ἐκ τȣ̂ κέντρȣ ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. (θ)

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τȣ́τȣ δῆλον, ὅτι πᾶς κύκλος ἴσος ἐςὶ τριγώνῳ, ȣ̂ ὕψος μὲν ἡ τȣ̂ κύκλȣ ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ εὐθεῖα ἴση τῇ τȣ̂ κύκλȣ περιφερείᾳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Καὶ εἰ μηδέπω ἐφάνη, πάνυ καλῶς φησὶν ὁ Εὐτόκιος ὁ Ἀσκαλωνίτης, (ι) δυνατὸν, περιφερείᾳ κύκλȣ ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως εἶναί τινα τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς ȣ̉δενός ἐςι ζητȣ́μενον. εἰ γὰρ τοιαύτην ἐνῆν πορίσασθαι εὐθεῖαν, ἐπελύετο ἂν τὸ πολυθρύλλητον ζήτημα, τȣτέςιν ἐτετραγωνίζετο ὁ κύκλος. εὑρίσκεται δ' ȣ̂ν ὅμως εὐθεῖα, ὡς κατωτέρω δειχθήσεται, τοσȣ̂τον ἔγγιςα τȣ̂ εἶναι ἴση τῇ τȣ̂ κύκλȣ περιφερείᾳ, ὥςε ἴσης λογιζομένης, μηδὲν ἐπίσημον ἐν ταῖς καταμετρήσεσι προκύπτειν παράπτωμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. (κ)

Παντὸς κύκλȣ ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρȣ τριπλασίων ἐςὶ, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρȣ, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοςημόνοις.

(ζ) Κατὰ τὸ α'. Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς β'. προτ. τȣ̂ ιβ'. βιβλ. (η) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ. (θ) Κατὰ τὸ β'. Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς β'. προτ. τȣ̂ ιβ'. (ι) Ἐν τῷ ὑπομν. εἰς τὴν Ἀρχιμ. τȣ̂ κύκλ. μέτρησ. (κ) Τȣ̂ Ἀρχιμ. γ'. ἐςὶν ἐν τῷ αὐρ. βιβλ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ περίμετρος τȣ̃ πολυγώνȣ, τȣ̃ ἔχοντος 96 πλευρὰς, καὶ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένȣ τριπλασίων ἐςὶ τῆς τȣ̃ κύκλȣ διαμέτρȣ, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει. ἀλλ' ἡ τȣ̃ κύκλȣ περιφέρεια ἐλάσσων ἐςὶ τῆς τȣ̃ πολυγώνȣ. πολλῷ ἄρα ἡ τȣ̃ κύκλȣ περιφέρεια ἐςὶ τριπλασίων τῆς τȣ̃ κύκλȣ διαμέτρȣ, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ αὐτῆς μέρει. ἐπεὶ δὲ ἡ περίμετρος τȣ̃ πολυγώνȣ, τȣ̃ ἔχοντος 96 πλευρὰς, καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένȣ, τριπλασίων ἐςὶ τῆς τȣ̃ κύκλȣ διαμέτρȣ, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι ἢ δέκα ἑβδομηκοςημόνοις (τȣτέςι $\frac{10}{71}$) ἔςι δὲ ἡ τȣ̃ κύκλȣ περιφέρεια μείζων τῆς τȣ̃ πολυγώνȣ περιμέτρȣ· πολλῷ ἄρα ἡ τȣ̃ κύκλȣ περιφέρεια τῆς διαμέτρȣ ἐςὶ τριπλασίων, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι αὐτῆς μέρει, ἢ δέκα ἑβδομηκοςήμονοις.

Ὅτι δὲ αἱ τῶν εἰρημένων πολυγώνων περίμετροι πρὸς τὴν τȣ̃ κύκλȣ διάμετρον τȣ̀ς διαληφθέντας ἔχȣσι λόγȣς, δείξομεν ȣ̔́τως.

Ἔςω κύκλος ὁ ΑΔΒ, ȣ̔̃ κέντρον μὲν τὸ Κ, διάμετρος δὲ ἡ ΑΒ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πλευρὰ ἑξαγώνȣ ἡ ΑΔ. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΚΔ, ἤχθω ἀπὸ τȣ̃ Α ἐφαπτομένη τȣ̃ κύκλȣ ἡ ΑΕ. καὶ διὰ μὲν τῆς ΚΕ, τῆς συμπιπτȣ́σης τῇ ἐφαπτομένῃ κατὰ τὸ Ε, δίχα τετμήσθω ἡ ΔΚΑ γωνία, διὰ δὲ τῆς ΚΦ ἡ ΣΚΑ, διὰ δὲ τῆς ΚΖ ἡ ΦΚΑ, διὰ δὲ τῆς ΚΗ ἡ ΖΚΑ, διὰ δὲ τῆς ΚΓ ἡ ΗΚΑ. καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΕΑ, εἰλήφθω ἡ ΑΛ ἴση τῇ ΑΓ. Λέγω Α'. ὅτι ἡ ΛΓ πλευρά ἐςι τȣ̃ περὶ τὸν κύκλον ΑΔΒ περιγραφομένȣ πολυγώνȣ, πλευρὰς ἔχοντος 96. λέγω Β'. ὅτι ἡ ΛΓ ληφθεῖσα 96, εἶτȣν ἡ περίμετρος τȣ̃ εἰρημένȣ πολυγώνȣ, τριπλασίων ἐςὶ τῆς διαμέτρȣ, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι, ἢ ἑβδόμῳ αὐτῆς μέρει. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΚΛ. χ. α.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπεὶ ἡ ΑΔ πλευρά ἐστιν ἑξαγώνου εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου, (λ) ἡ μὲν ΔΚΑ γωνία ἴση $\frac{1}{6}$ τεσσάρων ὀρθῶν· (μ) ἡ δὲ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ ΣΚΑ ἴση $\frac{1}{12}$· ἡ δὲ τῆς ΣΚΑ ἡμίσεια, ἤτοι ἡ ΦΚΑ ἴση $\frac{1}{24}$· ἡ δε τῆς ΦΚΑ ἡμίσεια, τουτέστιν ἡ ΖΚΑ ἴση $\frac{1}{48}$· ἡ δὲ αὐτῆς ἡμίσεια, ἡ ΗΚΑ ἴση $\frac{1}{96}$· ἡ δὲ αὐτῆς ἡμίσεια, ΓΚΑ $=$ $\frac{1}{192}$ τεσσάρων ὀρθῶν. ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις ΓΚΑ, ΔΚΑ, ἡ μὲν ΓΑ $=$ ΑΔ, (ν) ἡ δὲ ΑΚ κοινὴ, αἱ δὲ περὶ τὸ Α γωνίαι ἴσαι, (ξ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΓΚΑ $=$ ΔΚΑ. (ο) ἡ ἄρα ΔΚΓ διπλασία τῆς ΓΚΑ, ἤτουν ἴση τῇ ΗΚΑ· ἔστι δὲ ἡ ΗΚΑ ἴση $\frac{1}{96}$ τεσσάρων ὀρθῶν, καὶ ἡ ΔΚΓ ἄρα ἴση $\frac{1}{96}$ τεσσάρων ὀρθῶν. ἡ ἄρα ΔΓ πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΔΒ περιγραφομένου πολυγώνου, πλευρὰς ἔχοντος 96.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΔΚΣ, ΑΚΣ, ἡ μεν ΚΔ $=$ ΚΑ, ἡ δὲ ΚΣ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΔΚΣ $=$ ΑΚΣ. (π) ἄρα καὶ ἡ ΔΣ $=$ ΣΑ. (ρ) ἡ ἄρα ΑΔ διπλασία τῆς ΑΣ. ἀλλ᾽ ἡ ΑΔ $=$ ΑΚ. (σ) καὶ ἡ ΑΚ ἄρα διπλασία τῆς ΑΣ. ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ΚΑΕ, ΚΑΣ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσίν, (τ) ὡς ἄρα ΚΕ : ΕΑ : : ΚΑ : ΑΣ. (υ) ἄρα καὶ

(λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Τέσσαρσι γὰρ ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν περὶ τὸ Κ σημεῖον γωνιῶν, (κατὰ τὴν γ΄. συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ιγ΄. τοῦ α΄.) καὶ εἰς ἓξ διῃρημένων ἴσα μέρη διὰ τὸ ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον, ἡ ΔΚΑ $\frac{1}{6}$ ἐστί (ν) Ἐκ τῆς κατασκ. (ξ) Κατὰ τὴν ιη΄ τοῦ γ΄. (ο) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ α΄, (π) Ἐκ τῆς κατασκ. (ρ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ α΄ (σ) Κατὰ τὴν β΄. συνέπ. τῆς ιε΄. τοῦ δ΄. (τ) Κατὰ τὴν η΄. τοῦ ϛ΄. (υ) Κατὰ τὴν αὐτὴν.

ἡ ΚΕ διπλασία τῆς ΕΑ. καὶ ἐπεὶ δίχα τέτμηται ἡ ΕΚΑ γωνία ὑπὸ τῆς ΚΦ, (φ) ἔστιν ἄρα ὡς ΕΚ : ΚΑ :: ΕΦ : ΦΑ. (χ) καὶ συντεθέντα ἄρα ὡς ΕΚ $+$ ΚΑ : ΚΑ :: ΕΦ $+$ ΦΑ : ΦΑ. (ψ) καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ΕΚ $+$ ΚΑ : ΕΑ :: ΚΑ : ΦΑ. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ὡς ΦΚ $+$ ΚΑ : ΦΑ :: ΚΑ : ΖΑ, καὶ ὡς ΖΚ $+$ ΚΑ : ΖΑ :: ΚΑ : ΗΑ, καὶ ἔτι ὡς ΚΗ $+$ ΚΑ : ΗΑ :: ΚΑ : ΓΑ.

Κείσθω ἡ ΕΚ $= 306$. ἄρα ἡ ΕΑ $= 153$. διὸ τὸ μὲν $\overline{ΕΚ}^2 = 93636$, τὸ δὲ $\overline{ΕΑ}^2 = 23409$. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΕΚ}^2 = \overline{ΚΑ}^2 + \overline{ΕΑ}^2$, ἔσται $\overline{ΚΑ}^2 = \overline{ΕΚ}^2 - \overline{ΕΑ}^2$, κοινοῦ δηλαδὴ ἀφαιρεθέντος τοῦ $\overline{ΕΑ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΚΑ}^2 = 93636 - 23409 = 70227$. διὸ ἡ ΚΑ ἴση τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ 70227. ἀλλὰ τούτου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάσσων δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἐστὶν ὁ 265. ἄρα ἡ ΚΑ > 265. διὸ ΕΚ $+$ ΚΑ $> 306 + 265 = 571$. ἄρα ΕΚ $+$ ΚΑ : ΕΑ $>$ 571 : 153. ἀλλ' ὡς ΕΚ $+$ ΚΑ : ΕΑ :: ΚΑ : ΦΑ, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ ΚΑ : ΦΑ $>$ 571 : 153. καὶ ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ 8 πολλαπλασιασθέντος, ΚΑ : ΦΑ $>$ 4568 : 1224. ἔστω οὖν ἡ ΦΑ $= 1224$. ἡ ἄρα ΚΑ > 4568.

Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΦΑ $= 1224$, ἡ δὲ ΚΑ > 4568, ἔσεται τὸ μὲν $\overline{ΦΑ}^2 = 1498176$, τὸ δὲ $\overline{ΚΑ}^2 > 20866624$. ἔστι δὲ τὸ $\overline{ΚΦ}^2 = \overline{ΦΑ}^2 + \overline{ΚΑ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΚΦ}^2 > 1498176 + 20866624 = 22364800$. ἀλλὰ τούτου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάσσων δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἐστὶν ὁ 4729. ἡ ἄρα ΚΦ > 4729. διὸ ΦΚ $+$ ΚΑ $> 4729 + 4568 = 9297$. ἄρα ΦΚ $+$ ΚΑ : ΦΑ $>$ 9297 : 1224. ἀλλ' ὡς ΦΚ $+$ ΚΑ : ΦΑ :: ΚΑ : ΖΑ, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ ΚΑ : ΖΑ $>$ 9297 : 1224. ἐὰν ἄρα τεθῇ ἡ ΖΑ $= 1224$, ἔσεται ἡ ΚΑ > 9297.

Οὐκοῦν

(φ) Ἐκ τῆς κατασκ. (χ) Κατὰ τὴν γ'. τοῦ ς'. (ψ) Κατὰ τὴν ι'. τοῦ ε'. (ω) Κατὰ τὴν ζ'. τοῦ αὐτ. βιβλ.

Οὐκοῦν τὸ μὲν $\overline{ZA}^2 = 1498176$, τὸ δὲ $\overline{KA}^2 > 86434209$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{KZ}^2 = \overline{ZA}^2 + \overline{KA}^2$, ἔσται ἄρα τὸ $\overline{KZ}^2 > 1498176 + 86434209 = 87932385$. ἀλλὰ τούτου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάσσων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 9377. ἡ ἄρα $KZ > 9377$. διὸ $ZK + KA > 9377 + 9297 = 18674$. ὥστε $ZK + KA : ZA > 18674 : 1224$. ἀλλ' ὡς $ZK + KA : ZA :: KA : HA$, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ $KA : HA > 18674 : 1224$. καὶ τοῦ ἡμίσεως δὲ ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν ληφθέντος, ἔσεται ὡς $KA : HA > 9337 : 612$. ἐὰν ἄρα τεθῇ ἡ $HA = 612$, ἔσται ἡ $KA > 9337$.

Τοιγαροῦν τὸ μὲν $\overline{HA}^2 = 374544$, τὸ δὲ $\overline{KA}^2 > 87179569$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{KH}^2 = \overline{HA}^2 + \overline{KA}^2$, ἔσται ἄρα τὸ $\overline{KH}^2 > 374544 + 87179569 = 87554113$. ἀλλὰ τούτου τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, ἐλάττων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 9357. ἡ ἄρα $KH > 9357$. διὸ $KH + KA > 9357 + 9337 = 18694$. ἄρα $KH + KA : HA > 18694 : 612$. ἀλλ' ὡς $KH + KA : HA :: KA : \Gamma A$, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ $KA : \Gamma A > 18694 : 612$. καὶ τοῦ διπλασίου μὲν ἑκατέρας τῶν KA, ΓA, τοῦ ἡμίσεως δὲ ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν ληφθέντος, ἔσεται $2.KA : 2.\Gamma A > 9347 : 306$. ἀλλὰ $2\,KA = AB$, καὶ $2\,\Gamma A = \Lambda\Gamma$. ἄρα $AB : \Lambda\Gamma > 9347 : 306$. καὶ ἐναλλὰξ $AB : 9347 > \Lambda\Gamma : 306$. καὶ 96 ληφθείσης τῆς τε $\Lambda\Gamma$, καὶ τοῦ 306, ἕξει $AB : 9347 > 96.\Lambda\Gamma : 29376$. καὶ ἐναλλὰξ, $AB : 96.\Lambda\Gamma > 9347 : 29376$. καὶ ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ 9347 διαιρεθέντος, ἕξει $AB : 96.\Lambda\Gamma > 1 : 3 + \frac{1337}{9347}$. καὶ ἀνάπαλιν $96.\Lambda\Gamma : AB > 3 + \frac{1337}{9347} : 1$. ἡ ἄρα $96.\Lambda\Gamma$, ἤτουν ἡ περίμετρος τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΔΒ περιγραφομένου πολυγώνου, τριπλασίων ἐστὶ τῆς AB, καὶ ἔτι ὑπε-

ὑπερέχει ἔλαττον ἢ $\frac{1337}{9347}$ τῆς διαμέτρȣ. τȣ̃το δὲ τὸ κλάσμα ἔλαττον ἐςὶν, ἢ $\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρȣ. ἡ περίμετρος ἄρα τȣ̃ πολυγώνȣ τȣ̃ περὶ τὸν κύκλον ΑΔΒ περιγραφομένȣ τριπλασίων ἐςὶ τῆς διαμέτρȣ ΑΒ, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρȣ.

Ἔςω πάλιν κύκλος ὁ ΑΔΒ, (Σχ. 3.) ȣ̃ κέντρον μὲν τὸ Κ, διάμετρος δὲ ἡ ΑΒ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πλευρὰ κανονικȣ̃ ἑξαγώνȣ ἡ ΑΔ. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΔ, τετμήσθω δίχα ἡ μὲν γωνία ΔΒΑ διὰ τῆς ΒΕ, ἡ δὲ ΕΒΑ διὰ τῆς ΒΦ, ἡ δὲ ΦΒΑ διὰ τῆς ΒΖ, ἡ δὲ ΖΒΑ διὰ τῆς ΒΗ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. λέγω Α΄, ὅτι ἡ ΑΗ πλευρά ἐςι τȣ̃ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένȣ πολυγώνȣ, πλευρὰς ἔχοντος 96. λέγω Β΄, ὅτι ἡ περίμετρος τȣ̃ εἰρημένȣ πολυγώνȣ τριπλασίων ἐςὶ τῆς διαμέτρȣ ΑΒ, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι, ἢ δέκα ἑβδομηκοςημόνοις (ἤτȣν $\frac{10}{71}$) τῆς διαμέτρȣ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ, ΑΦ, ΑΖ, καὶ αἱ ΚΔ, ΚΕ, ΚΦ, ΚΖ, ΚΗ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α.

Ἐπεὶ ἡ ΑΔ πλευρὰ ἑξαγώνȣ ἐςὶν, ἡ ΔΚΑ γωνία ἴση ἐςὶν $\frac{1}{6}$ τεσσάρων ὀρθῶν. διὸ ἡ μὲν ΕΚΑ $= \frac{1}{12}$, ἡ δὲ ΦΚΑ $= \frac{1}{24}$, ἡ δὲ ΖΚΑ $= \frac{1}{48}$, ἡ δὲ ΗΚΑ ἴση $\frac{1}{96}$ τεσσάρων ὀρθῶν. ἡ ἄρα ΑΗ πλευρά ἐςι τȣ̃ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένȣ πολυγώνȣ, πλευρὰς ἔχοντος 96.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΕΒΑ, ΕΣΑ, ἡ μὲν γωνία ΕΒΑ $=$ ΕΑΣ, (α) ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε κοινὴ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΑΒ $=$ ΕΣΑ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΑΣ : : ΒΕ : ΕΑ. (β) καὶ ἐπεὶ δίχα τέτμηται ἡ ΔΒΑ γωνία ὑπὸ τῆς ΒΕ, ἐςιν ὡς

(α) Κατὰ τὴν κζ. τȣ̃ γ΄. (β) Κατὰ τὴν δ΄. τȣ̃ ς΄.

ὡς $ΔΒ : ΒΑ :: ΔΣ : ΣΑ$. (γ) καὶ συντεθέντα ὡς $ΔΒ + ΒΑ : ΒΑ :: ΔΣ + ΣΑ : ΣΑ$. καὶ ἐναλλὰξ $ΔΒ + ΒΑ : ΔΑ :: ΒΑ : ΣΑ$. διὸ καὶ ὡς $ΔΒ + ΒΑ : ΔΑ :: ΒΕ : ΕΑ$. (δ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς $ΕΒ + ΒΑ : ΕΑ :: ΒΦ : ΦΑ$, καὶ ὡς $ΦΒ + ΒΑ : ΦΑ :: ΒΖ : ΖΑ$, καὶ ἔτι ὡς $ΖΒ + ΒΑ : ΖΑ :: ΒΗ : ΗΑ$.

Ἔστω ἡ $ΒΑ = 1560$. ἄρα ἡ $ΑΚ = 780$. ἀλλ' ἡ $ΑΔ = ΑΚ$. (ε) ἄρα καὶ ἡ $ΑΔ = 780$. οὐκοῦν τὸ μὲν $\overline{ΒΑ}^2 = 2433600$, τὸ δὲ $\overline{ΑΔ}^2 = 608400$. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΔΒ}^2 + \overline{ΔΑ}^2 = \overline{ΒΑ}^2$, (ζ) κοινοῦ ἄρα ἀφαιρεθέντος τοῦ $\overline{ΔΑ}^2$, ἔσται $\overline{ΔΒ}^2 = \overline{ΒΑ}^2 - \overline{ΔΑ}^2$, ἤτοι $\overline{ΔΒ}^2 = 2433600 - 608400 = 1825200$. ἀλλὰ τούτου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἐστὶν ὁ 1351. ἡ ἄρα $ΔΒ < 1351$. διὸ καὶ $ΔΒ + ΒΑ < 1351 + 1560 = 2911$. ὁ ἄρα $2911 : 780 > ΔΒ + ΒΑ : ΔΑ$. καὶ ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ 100 πολλαπλασιασθέντος, ἕξει ὁ $291100 : 78000 > ΔΒ + ΒΑ : ΔΑ$. ἀλλ' ὡς $ΔΒ + ΒΑ : ΔΑ :: ΒΕ : ΕΑ$, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ ὁ $291100 : 78000 > ΒΕ : ΕΑ$. ἐὰν οὖν τεθῇ ἡ $ΕΑ = 78000$, ἔσται ἡ $ΒΕ < 291100$.

Οὐκοῦν τὸ μὲν $\overline{ΕΑ}^2 = 6084000000$, τὸ δὲ $\overline{ΒΕ}^2 < 84739210000$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{ΒΑ}^2 = \overline{ΒΕ}^2 + \overline{ΕΑ}^2$, τὸ ἄρα $\overline{ΒΑ}^2 < 90823210000$. ἀλλὰ τούτου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 301375. ἡ ἄρα $ΒΑ < 301375$. ἄρα καὶ $ΕΒ + ΒΑ. < 291100 + 301375 = 592475$. διὸ ὁ $592475 : 78000 > ΕΒ + ΒΑ : ΕΑ$. καὶ ἑκατέρου μὲν τούτων τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ 325 διαιρεθέντος, ἑκοτέρου δὲ τῶν προκυπτόντων πηλίκων διὰ τοῦ 11 πολλαπλασιασθέντος, ἕξει ὁ $20053 : 2640 > ΕΒ + ΒΑ : ΕΑ$. ἀλλ' ὡς $ΕΒ + ΒΑ : ΕΑ :: ΕΦ : ΦΑ$, κα-

(γ) Κατὰ τὴν γ΄. τοῦ αὐτ. (δ) Κατὰ τὴν ι΄. (ε) Κατὰ τὴν δ΄. συνέπ. τῆς ιε΄. τοῦ δ΄. (ζ) Κατὰ τὴν λα΄. τοῦ γ΄, καὶ μζ΄. τοῦ α΄.

καθάπερ δέδεικται. ἄρα ὁ 20053 : 2640 $>$ ΒΦ : ΦΑ. ἐὰν ἄρα τεθῇ ἡ ΦΑ = 2640, ἔσεται ἡ ΒΦ $<$ 20053.

Τούτων κειμένων, ἔσται τὸ μὲν $\overline{ΦΑ}^2$ = 6969600, τὸ δὲ $\overline{ΒΦ}^2$ $<$ 402122809. τὸ ἄρα $\overline{ΒΑ}^2$ ἴσον ὂν τοῖς $\overline{ΒΦ}^2$, $\overline{ΦΑ}^2$, ἔλαττον ἔσται τοῦ 409092409. ἀλλὰ τούτου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 20227. ἡ ἄρα ΒΑ $<$ 20227. διὸ ΒΦ + ΒΑ $<$ 20053 + 20227 = 40280. ἄρα ὁ 40280 : 264 $>$ ΒΦ + ΒΑ : ΦΑ. καὶ ἑκατέρου μὲν τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ 40 διαιρεθέντος, ἑκατέρου δὲ τῶν προκυπτόντων πηλίκων διὰ τοῦ 6 πολλαπλασιασθέντος, ἕξει ὁ 6042 : 396 $>$ ΒΦ + ΒΑ : ΦΑ. ἀλλ᾽ ὡς ΒΦ + ΒΑ : ΦΑ : : ΒΖ : ΖΑ, ὡς δέδεικται. ἄρα ὁ 6042 : 396 $>$ ΒΖ : ΖΑ. ἐὰν οὖν τεθῇ ἡ ΖΑ = 396, ἔσται ἡ ΒΖ $<$ 6042. Κείσθω δὴ τοῦτο.

Τοιγαροῦν τὸ μὲν $\overline{ΖΑ}^2$ = 156816, τὸ δὲ $\overline{ΒΖ}^2$ $<$ 36505764. τὸ ἄρα $\overline{ΒΑ}^2$ ἴσον ὂν τοῖς $\overline{ΒΖ}^2$, $\overline{ΖΑ}^2$, ἔλαττον ἔσται τοῦ 36662580. ἀλλὰ τούτου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ 6055. ἡ ἄρα ΒΑ $<$ 6055. διὸ καὶ ΒΖ+ΒΑ $<$ 12097. ἄρα 12097 : 396 $>$ ΒΖ+ΒΑ : ΖΑ, ἤτουν (ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν διπλασιασθέντος) 24194 : 792 $>$ ΒΖ+ΒΑ : ΖΑ. ἀλλ᾽ ὡς ΒΖ + ΒΑ : ΖΑ : : ΒΗ : ΗΑ, ὡς δέδεικται. ἄρα ὁ 24194 : 792 $>$ ΒΗ : ΗΑ. ἐὰν ἄρα τεθῇ ἡ ΗΑ = 792, ἔσται ἡ ΒΗ $<$ 24194. κείσθω δὴ τοῦτο.

Τὸ ἄρα $\overline{ΗΑ}^2$ = 627264, τὸ δὲ $\overline{ΒΗ}^2$ $<$ 585349636. τὸ ἄρα $\overline{ΒΑ}^2$ ἴσον ὂν τοῖς $\overline{ΒΗ}^2$, $\overline{ΗΑ}^2$, ἔλαττον ἔσται τοῦ 585976900. ἀλλὰ τούτου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ σύνεγγυς μὲν, μείζων δὲ τῆς ἀκριβοῦς, ἐστὶν ὁ 24207. ἡ ἄρα ΒΑ $<$ 24207. ἡ ἄρα ΑΗ : ΑΒ $>$ 792 : 24207, ἤτουν, ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ 3 διαιρεθέντος, ἡ ΑΗ : ΑΒ $>$ 264 : 8069, ἤτουν, τῶν ἡγουμένων διὰ τοῦ 96 πολλαπλασιασθέντων, ἡ 96. ΑΗ : ΑΒ $>$ 25344 : 8069 καὶ ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ 8069 διαιρεθέντος, ἡ 96. ΑΗ : ΑΒ $> 3 + \frac{1137}{8069} : 1$. ἔστι δὲ ἡ μὲν 96. ΑΗ ἡ περίμετρος τοῦ εἰς τὸν κύκλον ΑΔΒ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος 96 πλευράς, ἡ δὲ ΑΒ, ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος, τὸ δὲ $\frac{1137}{8069}$ μεῖζόν ἐστι τοῦ $\frac{10}{71}$. ἡ ἄρα περίμετρος τοῦ εἰρημένου πολυγώνου τριπλασίων ἐστὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ, καὶ ἔτι ὑπερέχει μείζονι μέρει αὐτῆς, ἢ δέκα ἑβδομηκοστημόνοις.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐκ τούτου δὴ φανερόν, ὅτι ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ διάμετρος παντὸς κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὁ μὲν ἐγγύς, ἀλλ' ἐλάσσων τοῦ ἀκριβοῦς ἐστὶν ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ 1 πρὸς τὰ $3 + \frac{1}{7}$, εἴτουν ὁ 7 : 22. ὁ δὲ ἐγγύς, ἀλλὰ μείζων, ὃν ἔχει ἡ 1 πρὸς τὰ $3 + \frac{10}{71}$, τουτέστιν ὁ 71 : 223.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐὰν δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγραφῇ τε καὶ ἐγγραφῇ πολύγωνα πλευρὰς ἔχοντα πλείονας ἢ 96, εὑρεθήσεται τῷ αὐτῷ τρόπῳ ὁ ἔτι ἐγγύτερος τοῦ ἀκριβοῦς τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος. τοῦτο καὶ πεποιήκασιν ὅ, τε Μέτιος καὶ ὁ Λουδόλφος, καὶ ἄλλοι. (α) ἔστι δὲ ὁ ὑπὸ Μετίου εὑρεθεὶς ἐγγύτερος τοῦ ἀκριβοῦς λόγος, ὃν ἔχει ὁ 113 : 355. αὐτὸν δὲ τὸν ἀκριβῆ εὑρεῖν ἀμήχανον. ἀλλὰ γὰρ ἀρκοῦσιν οἱ προκείμενοι τῇ ἐν ταῖς πράξεσιν ἀπαιτουμένῃ ἀκριβείᾳ. οὐδὲν γὰρ τῇ αὐτῶν πρακτικῇ χρήσει ἐν ταῖς τοῦ κύκλου μετρήσεσι προκύπτει αἰσθητὸν παράπτωμα.

ΠΟ-

(α) Ὅρα τὸ ς'. θεώρ. τοῦ Τακκέτ. τὸ ἐν τοῖς τοῦ Ἀρχιμ. θεωρ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Ἐντεῦθεν, δοθείσης τῆς τοῦ κύκλου Διαμέτρου, τὸ σύνεγγυς τοῦ ἀκριβοῦς μέτρον αὐτοῦ εὑρεῖν ῥάδιον. ἔστω γὰρ ἡ δοθεῖσα διάμετρος ἴση ποσὶν 6, τὴν δὲ περιφέρειαν ἐμφαινέτω τὸ Π. καὶ ἐπεὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον ἔχει ὃν ὁ 7 : 22, (α) ἔσται ὡς ὁ 7 : 22 : : 6 : Π. τὸ ἄρα $\Pi = \frac{132}{7}$. (β) ἐπεὶ δὲ πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τοῦ κύκλου ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ εὐθεῖα ἴση τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ· (γ) πᾶν δὲ τρίγωνον ἴσον τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ ὕψους αὐτοῦ καὶ τῆς βάσεως· (δ) ἔστι δὲ τὸ μὲν τοῦ τριγώνου ὕψος, εἴτουν ἡ ἡμιδιάμετρος τοῦ κύκλου, ἴσον 3, ἡ δὲ βάσις, τουτέστιν ἡ περιφέρεια, ἴση $\frac{132}{7}$. ὁ ἄρα Κύκλος ἴσος $\frac{3 \cdot 132}{2 \cdot 7} = \frac{396}{14} = 28 + \frac{2}{7}$. ὅπερ ἐμφαίνει, ὅτι ὁ Κύκλος ἴσος ἐστὶν εἴκοσι καὶ ὀκτὼ ποδιαίοις τετραγώνοις καὶ δυσὶν ἑβδομημορίοις ἑνὸς ποδιαίου τετραγώνου. οὐκοῦν μετρηθήσεται πᾶς κύκλος, τῆς τετάρτης ἀναλόγου τοῦ 7, καὶ 22, καὶ τῆς αὐτοῦ διαμέτρου διὰ τῆς ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθείσης, καὶ τοῦ γινομένου διὰ τοῦ 2 διαιρεθέντος· ἢ τῆς εἰρημένης τετάρτης ἀναλόγου διὰ τοῦ τεταρτημορίου τῆς διαμέτρου πολλαπλασιασθείσης.

ΛΗΜΜΑ Β΄.

Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς κανονικοῦ πρίσματος ἴση ἐστὶ παραλληλογράμμῳ, οὗ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ

(α) Κατὰ τὸ προλ. πόρ. (β) Κατὰ τὸ δ΄ πρόβλ. τοῦ δ΄. τῆς Ἀριθμ. βιβλ. (γ) Κατὰ τὸ α΄ τοῦ δε τοῦ βιβλ. θεώρ. (δ) Κατὰ τὸ γ΄. πρόβλ. τὸ μετὰ τὸ β΄. βιβλ. τῆς Γεωμετρ.

τοῦ πρίσματος· ἡ δὲ, τῇ τοῦ πρίσματος πλευρᾷ. δεῖ δὲ τὴν ὑπὸ τῶν εἰρημένων τοῦ παραλληλογράμμου πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ περιεχομένῃ ὑπό τε τῆς τοῦ πρίσματος πλευρᾶς, καὶ τῆς πλευρᾶς τῆς αὐτοῦ βάσεως.

Ἔστω κανονικὸν πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ, καὶ παραλληλόγραμμον τὸ ΠΟ· οὗ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ΠΣ, ἴση ἔστω τῇ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος περιμέτρῳ, εἴτουν ΖΗ+ΗΘ+ΘΙ+ΙΚ+ΚΖ, ἡ δὲ ΞΠ ἴση τῇ τοῦ πρίσματος πλευρᾷ ΑΗ. ἔστω δὲ ἡ γωνία ΑΗΖ ἴση τῇ ΞΠΣ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἴση ἐστὶ τῷ παραλληλογράμμῳ. πίν. Β. σχ. 4.

Ἔστω πρῶτον ἡ ΑΗΖ γωνία ὀρθή. ὀρθὴ οὖν ἔσται καὶ ἡ ΞΠΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ πᾶσαι αἱ τοῦ κανονικοῦ πρίσματος πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὰ ὀρθογώνια ΑΖ, ΑΘ, ΒΙ, ΓΚ, ΔΖ ἴσα ἔσονται τῷ ΑΗ. $\overline{\text{ΖΗ+ΗΘ,+ΘΙ+ΙΚ+ΚΖ}}$. ἀλλ' ἡ μὲν ΑΗ=ΞΠ, ἡ δὲ ΖΗ+ΗΘ+ΘΙ+ΙΚ+ΚΖ=ΠΣ. (ε) τὰ ἄρα εἰρημένα ὀρθογώνια ἴσα εἰσὶ τῷ ΞΠ. ΠΣ, εἴτουν τῷ ὀρθογωνίῳ ΠΟ. ἀλλὰ τὰ διαληφθέντα ὀρθογώνια εἰσὶν ἡ τοῦ πρίσματος ἐπιφάνεια. ἡ ἄρα τοῦ πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ΠΟ ὀρθογωνίῳ.

Ἀλλ' ἔστω ἡ ΑΗΖ γωνία ὀξεῖα, ἴση δὲ αὐτῇ πάλιν ἡ ΞΠΣ. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Α ἤχθω ἡ ΑΝ κάθετος τῇ ΖΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ξ ἡ ΞΡ τῇ ΠΣ. σχ. 5.

Ἐπεὶ ἡ ΑΝ κοινὸν ὕψος ἐστὶ πάντων τῶν παραλληλογράμμων ΑΖ, ΑΘ, ΒΙ, ΓΚ, ΕΖ, ἴσα ἄρα εἰσὶ τὰ παραλλη-

(ε) Ἐξ ὑποθ.

ληλόγραμμα ταῦτα τῷ ΑΝ. ΖΗ + ΗΘ + ΘΙ + ΙΚ + ΚΖ. (ζ) καὶ ἐπεὶ ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΗΝ, ΞΠΡ ἡ μὲν γωνία ΑΗΝ = ΞΠΡ, (η) ἡ δὲ ΑΝΗ = ΞΡΠ, (θ) ἡ δὲ ΑΗ = ΞΠ, (ι) ἄρα καὶ ἡ ΑΝ = ΞΡ. (κ) ἔστι δὲ καὶ ταῖς ΖΗ + ΗΘ + ΘΙ + ΙΚ + ΚΖ = ΠΣ. τὸ ἄρα ΞΡ. ΠΣ, ἤτοι τὸ ΠΟ παραλληλόγραμμον ἴσον ΑΝ. ΖΗ + ΗΘ + ΘΙ + ΙΚ + ΚΖ. καὶ τὰ διαληφθέντα ἄρα παραλληλόγραμμα, εἴτουν ἡ τοῦ πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση τῷ παραλληλογράμμῳ ΠΟ.

ΛΗΜΜΑ Γ΄.

Παντὸς κυλίνδρου ἡ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀπ᾽ ἐναντίας κύκλου, ἴση ἐστὶ παραλληλογράμμῳ, οὗ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως· ἡ δὲ, τῇ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου. δεῖ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ἴσην περιέχειν γωνίαν τῇ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου περιεχομένῃ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ εἰς τὸν κύλινδρον ἐγγεγραμμένου, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἀπολήγει, (λ) ἡ δε περίμετρος τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, (μ) ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ πρίσματος εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ κυλίν-

(ζ) Κατὰ τὸ β΄. πρόβλ. τὸ μετὰ τὸ β΄. βιβλ. τῆς Γεωμ. (η) Ἐξ ὑποθ (θ) Ἑκατέρα γὰρ ὀρθὴ ἐκ τῆς κατασκ. (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν κς΄. τοῦ α΄. (λ) Κατὰ τὸ δ΄. Λῆμ. τὸ μετὰ τὴν θ΄. τοῦ ιβ΄. τῆς Γεωμ. (μ) Κατὰ τὸ α΄. Λῆμ. τὸ μετὰ τὴν α΄. τοῦ αὐτοῦ βιβλ.

λίνδρου. ἀλλ᾽ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἴση ἐστὶ παραλληλογράμμῳ, οὗ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἴση τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ἡ δὲ τῇ πλευρᾷ τοῦ πρίσματος. ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἴση ἐστὶ παραλληλογράμμῳ, οὗ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως, ἡ δὲ τῇ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἐν λόγῳ συγκειμένῳ εἰσὶν ἔκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ πλευραὶ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ περιφέρειαι, ἢ αἱ διάμετροι τῶν ἑαυτῶν βάσεων. εἰσὶ γὰρ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι, ὡς αἱ διάμετροι. (ν) Ἐὰν οὖν αἱ τῶν κυλίνδρων πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἀνάλογον ἔσονται ταῖς διαμέτροις τῶν βάσεων· ἐὰν δὲ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἴσαι, ἀνάλογον ταῖς πλευραῖς· ἐὰν δὲ αἱ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ὁμοίως καὶ αἱ διάμετροι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται καὶ αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι.

Β΄. Ἐὰν αἱ τῶν κυλίνδρων πλευραὶ ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ ὦσι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, ἴσαι ἔσονται αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι· καὶ ἐὰν αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν κυλίνδρων ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ τῶν διαμέτρων τῶν ἑαυτῶν βάσεων.

Γ΄. Αἱ τῶν ὁμοίων κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων, εἴτουν λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ἐπεὶ γὰρ αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι λόγον ἔχουσι συγκείμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει πλευρὰ πρὸς πλευρὰν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει διάμετρος πρὸς διάμε-

(ν) Κατὰ τὴν συνέπ. τὴν μετὰ τὴν β΄. τοῦ ιβ΄. βιβλ. τῆς Γεωμ.

μετρον. ἔστι δὲ ἐν τοῖς ὁμοίοις κυλίνδροις ἄξων πρὸς ἄξονα, (εἴτουν πλευρὰ πρὸς πλευρὰν, ἴσαι γὰρ αἱ πλευραὶ τοῖς ἄξοσιν) οὕτω διάμετρος, πρὸς διάμετρον. (ξ) αἱ ἄρα τῶν ὁμοίων κυλίνδρων ἐπιφάνειαι διπλασίονα λόγον ἔχουσιν, ἤπερ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. (ο)

Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀπ' ἐναντίας κύκλου, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἔστω κύλινδρος ὀρθὸς ὁ ΑΓ, καὶ κύκλος ὁ ΔΕΖ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ΚΖ μέση ἀνάλογον ἔστω τῆς πλευρᾶς ΑΒ, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως ΓΒ, εἴτουν ἔστω ὡς ΑΒ : ΚΖ : : ΚΖ : ΓΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, χωρὶς τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀπεναντίας κύκλου, ἴση ἐστὶ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ. σχ. 6.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συσταθήτω τρίγωνον τὸ ΗΛΜ, οὗ τὸ μὲν ὕψος ΗΛ διπλάσιον ἔστω τῆς ΑΒ πλευρᾶς, ἡ δὲ βάσις ΛΜ ἴση τῇ ΓΘΒ περιφερείᾳ τῆς τοῦ κυλίνδρου βάσεως. ὁμοίως συσταθήτω τὸ ΚΖΝ τρίγωνον, ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΚΖ ἴσην τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, βάσιν δὲ τὴν ΖΝ ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τρίγωνον ΗΛΜ, πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΖΝ λόγον ἔχει συγκείμενον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ΗΛ : ΖΚ, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει

(ξ) Κατὰ τὸν δ'. ὁρισ. τοῦ αὐτ. (ο) Τοῦ Ἀρχιμ. ιγ'. ἐν τῷ περὶ σφαίρ. καὶ κυλίνδρ. α'. βιβλ.