

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Αἰ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, ἢ ἀλλή-
 λαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐξω ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΓΔ ἢ ΕΖ παράλληλος. λέ-
 γω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ παράλληλος. κ. 55.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐμπίπτειν εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΛΜ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΛΗΒ ἴση τῇ ΗΘΖ. (ζ) ἀλλὰ τῇ ΗΘΖ
 ἴση ἡ ΘΚΔ. (η) ἄρα ἡ ΛΗΒ ἴση τῇ ΘΚΔ, (θ) εἴτεν
 τῇ ΛΚΔ. ἄρα ἡ ΑΒ παράλληλος τῇ ΓΔ. (ι)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ΄.

Ἀπὸ τῶ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ
 παράλληλον εὐθεῖαν γραμμῶ ἀγαγεῖν.

Ἐξω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α· ἡ δὲ δοθεῖσα εὐ-
 θεῖα, ἡ ΒΓ. κ. 56.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ. καὶ ἐπε-
 ζεύχθω ἡ ΑΔ. καὶ συνεχάτω ἡ ΕΑΔ γωνία ἴση τῇ
 ΑΔΓ. (κ) καὶ ἐκβεθλήθω ἡ ΕΑ ἐπὶ τὸ Ζ. λέγω,
 ὅτι ἡ ΕΖ παράλληλος εἰς τῇ ΒΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΕΑΔ γωνία ἴση εἰς τῇ ΑΔΓ. (λ) αἱ δὲ εἰσιν
 ἑναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ. (μ)

ΠΡΟ.

(ζ) Κατὰ τὸ β. μέρ. τῆς κθ. προτ. (η) Κατὰ τὸ αὐτό. (θ) Κατὰ
 τὸ α. ἀξ. (ι) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς κη. προτ. (κ) Κατὰ τὴν
 κγ. προτ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Κατὰ τὴν κδ. προτ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΒ΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν πρόσκειβληθείσης, ἢ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τῶν τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Ἐστω τριγώνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεβλήθω αὐτῷ μία πλευρᾷ ἢ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω Α΄. ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ΑΓΔ, ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς Α καὶ Β. Β΄. ὅτι αἱ ἐντὸς τῶν τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ Α, Β, καὶ ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι.

λ. 57.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἦχθω διὰ τῆς Γ σημείω ἢ ΓΕ τῇ ΑΒ παράλληλος. (ν)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἡ μὲν γωνία ΕΓΔ ἴση τῇ Β, (ξ) ἢ δὲ ΑΓΕ τῇ Α. (ο) ὅλη ἄρα ἢ ΑΓΔ ἴση ταῖς Β, καὶ Α.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἡ ΑΓΔ γωνία ἴση ταῖς Α καὶ Β. (π) κοινὴ πρόσκειθω ἢ ΑΓΒ. αἱ ἄρα ΑΓΔ, ΑΓΒ ἴσαι ταῖς Α, Β καὶ ΑΓΒ. (ρ) ἀλλ' αἱ ΑΓΔ, ΑΓΒ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (σ) ἄρα καὶ αἱ Α, Β καὶ ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (τ)

ΣΥΝΕΠΕΙΛΑΙ.

Α΄. Αἱ δύο γωνίαι παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου δύο ὀρθῶν εἰσὶν ἐλάσσονες. αἱ τρεῖς γὰρ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Β΄. Τὸ τῶν γωνιῶν ἀθροισμα παντὸς τριγώνου, ἴσόν ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν γωνιῶν παντὸς ἑτέρου.

Γ΄.

(ν) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (ξ) Κατὰ τὸ τῆς κβ. προτ. β. μέρος. (ο) Κατὰ τὸ α. μέρος τῆς αὐτ. (π) Δίδακται ἤδη. (ρ) Κατὰ τὸ β. Ἀξ. (σ) Κατὰ τὴν ιγ. πρότ. (τ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ.

- Γ. Ἐὰν τριγώνῃς μία γωνία ἦτοι ὀρθή, ἢ ἀμβλεία ἢ, ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ὀξεία ἔσται.
- Δ. Ἐὰν ὀρθὴ μὲν ἦ μία τριγώνῃς γωνία, τὸ τῶν δύο λοιπῶν ἀθροισμα μιᾷ ὀρθῇ ἴσον ἔσται εἰ δὲ ἀμβλεία, μιᾷ ὀξεία.
- Ε. Ἐὰν μία τριγώνῃς γωνία ἴση ἦ τῷ τῶν δύο λοιπῶν ἀθροισματι, ὀρθὴ ἔσιν ἐκείνη.
- Ζ. Μιᾷς μὲν τριγώνῃς γωνίας γνωστῆς ἔσης, καὶ τὸ τῶν δύο λοιπῶν ἀθροισμα γνωστὸν ἔσται δύο δὲ γνωστῶν, καὶ ἡ τρίτη δήλη.
- Ζ'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοσὶ γωνίαις ἴσας ἔχη, ἦτοι ἀμφοτέραις ἀμφοτέραις, ἢ ἑκατέραν ἑκατέρας, καὶ λοιπὴ τῇ λοιπῇ ἴση ἔσται.
- Η'. Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχη, καὶ αἱ λοιπὴ δύο ταῖς λοιπαῖς δυοσὶν ἴσαι ἔσονται, ἦτοι ἀμφοτέραι ἀμφοτέραις, ἢ ἑκατέρα ἑκατέρας.
- Θ. Ἐὰν αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῃς περιέχουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ᾧσιν, ἑκατέρω τῶν πρὸς τῇ βάσει ἴσων ἡμίσει ὀρθῆς ἔσιν ἴση.
- Ι. Ἐκάστη τῶν τῷ ἰσοπλεύρῳ τριγώνῃς γωνιῶν ἴση τριτημορίῳ δύο ὀρθῶν, εἴτεν δυοσὶ τριτημορίοις μιᾷς ὀρθῆς.
- ΙΑ'. Ἐκ τέττε τὴν δοθεῖσαν ὀρθὴν γωνίαν εἰς τρία τεμῆν ἴσα μέρη καταμαθεῖν ῥαδίον. ἔστω γὰρ ὀρθὴ γωνία ἡ ΒΑΔ. καὶ συνεχάτω ἐπὶ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΓΔ. (υ) καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑΔ ἴση δυοσὶ τριτημορίοις μιᾷς ὀρθῆς (φ) ἢ ἄρα ΒΑΓ ἴση τριτημορίῳ ὀρθῆς. τετμήθω δὴ δίχα ἡ ΓΑΔ (χ) διὰ τῆς ΑΕ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑΕ, ΔΑΕ ἴση τριτημορίῳ ὀρθῆς. ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΑΓ ἴση δέδεικται τριτημορίῳ ὀρθῆς. ἴσαι ἄρα ἀλλήλαις αἱ τρεῖς γωνίαι
- ΒΑΓ

(υ) Κατὰ τὴν α. πρότ. (φ) Κατὰ τὴν ι. συνίπ. (χ) Κατὰ τὴν β, πρότ.

ΒΑΓ, ΓΑΕ, ΔΑΕ. εἰς τρία ἄρα ἴσα μέρη τέτμηται ἡ δοθῆσα ὀρθή γωνία ΒΑΔ. χ . 58.

ΙΒ΄. Πᾶσῶν τῶν ἀπὸ τυχόντος τινὸς σημείου ἐπὶ τὴν ὀρθωσάντων ἐυθειῶν ἀγομένων ἐυθειῶν ἐλάσσων ἢ κάθετος. Ἦχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῆς Α σημείου ἐυθειῶν αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΒ. ὧν ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒΓ γωνία ὀρθή, ἢ ἄρα ΑΓΒ ὀξεία. (ψ) ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΓ ἐλάσσων. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΑΒ καὶ ἐκάστης τῶν λοιπῶν ἐλάσσων. χ . 59.

ΙΓ΄. Ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείου μία μόνον κάθετος τῇ δοθείσῃ ἀχθήσεται ἐυθεία. Ἦχθωσαν γὰρ, εἰ δυνατόν, τῇ ΒΓ δύο κάθετοι, αἱ ΑΒ, ΑΖ. αἱ ἄρα γωνίαι τῆς ΑΒΖ τριγώνου δύο ὀρθῶν μείζονες. ὅπερ ἀδύνατον. (α) χ . 59.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῆς εὐπορωτάτης ταύτης προτάσεως, ἥς ἐν πάσαις ταῖς μαθηματικαῖς ἐπισήμαις ἢ χρῆσις μεγίστη, εὐρετὴν γεγονέναι, φασὶ, (Εὐδῆμ. ὁ ἀρχαῖος Γεωμέτρ.) τὸν Πυθαγόραν. πολλάκις δ' αὐτῆς ὁ Ἀριστοτέλης μνησθῆναι, ἀκριβῆς ἀποδείξεως προτιθεὶς αὐτὴν ὑπόδειγμα. ὥσπερ δὲ δι' αὐτῆς γνωστὸν καθέστηκεν ὅποσαι ὀρθαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐντὸς τῶν τριπλεύρων γωνίαι· ἔτω δὴ καὶ αἱ ἐντὸς καὶ ἐκτὸς παντὸς ἐυθυγράμμου σχήματος.

ΙΔ΄. Πᾶσαι αἱ ἐντὸς γωνίαι ἐυθυγράμμου σχήματος ἴσαι εἰσὶ δις τοσαύταις ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ ἐν τῷ σχήματι πλευραὶ, πλὴν τεσσάρων. Ἐστω ἐυθύγραμμο τυχόντα, τό, τε τετράπλευρον ΑΒΓΔ, καὶ τὸ ἐξάπλευρον ΑΒΓΔΕΖ. (πίν. ε. χ . 60, 61.) καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς
μιας

(ψ) Κατὰ τὴν γ. συνίπ. (ω) Κατὰ τὴν ιδ. πρότ. (α) Κατὰ τὴν λβ. πρότ.

μιάς ὁποιασῶν γωνίας ἐπὶ τὰς τῶν λοιπῶν εὐθεΐαι ἐπεξεύχθωσαν. οἷον ἐν μὲν τῷ τετραπλεύρῳ ἢ ΒΔ, ἐν δὲ τῷ ἑξαπλεύρῳ αἱ ΓΑ, ΓΖ, ΓΕ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρη χήματος αἱ γωνία αὐταί εἰσιν αἱ τῶν ἐν αὐτοῖς τριγῶνων γωνία, τοσαύταις ἄρα ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρη χήματος αἱ γωνία, ὅσαις καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς τριγῶνων. καὶ ἐπεὶ ἐν μὲν τῷ τετραπλεύρῳ δύο εἰσὶ τρίγωνα, ἐν δὲ τῷ ἑξαπλεύρῳ τέσσαρα δῆλον ἄρα, ὅτι αἱ μὲν τῆ πρώτῃ γωνία ἴσαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς· αἱ δὲ τῆ δευτέρῃ ὀκτώ. ἔστι δὲ τὸ μὲν τέσσαρα ὁ διπλασίος ἀριθμὸς τῶν τῆ τετραπλεύρῃ πλευρῶν, πλὴν τεσσάρων· ὁ δὲ ὀκτώ ὁ τῶν τῆ ἑξαπλεύρῃ διπλασίος, πλὴν τεσσάρων. ἴσαι ἄρα πᾶσαι αἱ ἐντὸς γωνία παντὸς εὐθυγράμμου χήματος δις τοσαύταις ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ ἐν τῷ χήματι πλευραί, πλὴν τεσσάρων.

Α Λ Λ Ω Σ.

Α' πό τινος σημεία τῶν ἐντὸς τῆ χήματος, οἷον τῆ Η, (χ. 62.) ἐφ' ἐκάστην τῶν γωνιῶν κορυφὴν εὐθεΐαι ἐπεξεύχθωσαν, οἷον αἱ ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, ΗΔ, ΗΕ, ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἕξ εἰσὶ τὰ συζαθέντα τρίγωνα, δώδεκα ἄρα ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν αἱ τέτων γωνία. ἀλλ' αἱ περὶ τὸ Η γωνία, αἱ μὴ ἴσαι γωνία τῆ ἑξαπλεύρῃ, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. (β) αἱ λοιπαὶ ἄρα, αἱ τῆ ἑξαπλεύρῃ, ἴσαι ὀκτώ ὀρθαῖς, ὅπερ ἔστι τῷ διπλασίῳ τῶν πλευρῶν ἀριθμῷ, πλὴν τεσσάρων.

ΙΕ'. Πᾶσαι αἱ ἐκτὸς γωνία παντὸς εὐθυγράμμου χήματος τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι. Ἐσὼ γὰρ τυχὸν εὐθύγραμμον τὸ Χ. (χ. 63.) καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ τέττε πλευραί. καὶ ἐπεὶ καὶ Α σὺν τῇ Β ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς,

Γ

ω.

(β) Κατὰ τὴν γ. συνέπ. τῆς ιγ. προτ.

ὡσαύτως ἡ Γ σὺν τῇ Δ, καὶ ἡ Ε σὺν τῇ Ζ, καὶ ἡ Η σὺν τῇ Θ, καὶ ἡ Ι σὺν τῇ Κ (γ.) πᾶσαι ἄρα ὁμοῦ ληφθεῖσαι δέκα ὀρθαῖς ἴσαι. ἀλλ' αἱ ἐντὸς τῆς γήματος ἐξ ὀρθαῖς ἴσαι. (δ) αἱ ἐκτὸς ἄρα τέσσαρες ὀρθαῖς ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ΄.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγύσσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐτὰ ἴσαι τε καὶ παραλλήλοι εἰσιν.

Ἰσώσαν ἴσαι τε καὶ παραλλήλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγύσασαι αὐταῖς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ. λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παραλλήλοι εἰσιν. χ. 64.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΒΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ, ΔΒΓ, ἡ μὲν ΑΒ ἴση τῇ ΓΔ, (ε) ἡ δὲ ΒΓ κοινὴ καὶ γωνία ἡ ΓΒΑ ἴση τῇ ΒΓΔ. (ς) καὶ ἡ ΑΓ ἄρα ἴση τῇ ΒΔ. καὶ γωνία ἡ ΒΓΑ ἴση τῇ ΓΒΔ. (η) αἱ δὲ εἰσιν ἐναλλάξ. αἱ ἄρα ΑΓ, ΒΔ παραλλήλοι. (θ) ἀλλὰ δέδεικται ὅτι καὶ ἴσαι. ἴσαι τε ἄρα καὶ παραλλήλοι εἰσιν. ὕπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ΄.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἐ59

(γ) Κατὰ τὴν ιγ. πρότ. (δ) Κατὰ τὴν προλ. συνέπ. (ε) Ἐξ ὑποθ. (ς) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς κθ. πρότ. (η) Κατὰ τὴν δ. πρότ. (θ) Κατὰ τὴν κς. πρότ.

"Εξω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δ' αὐτῶ ἢ ΒΓ. λέγω Α΄, ὅτι αἱ ἀπεναντίας αὐτῶ πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἐσὶ Β΄. ὅτι ἡ ΒΓ διάμετρος διχα αὐτὸ τέμνει. ρ. τὸ αὐτ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐν ταῖς τριγώνοις ΔΒΓ, ΑΒΓ, ἡ μὲν ΒΓΔ γωνία ἴση τῇ ΓΒΑ, ἡ δὲ ΓΒΔ τῇ ΒΓΑ, (ι) ἡ δὲ ΒΓ κοινή. ἄρα ἡ μὲν ΔΓ ἴση τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΔΒ τῇ ΓΑ. καὶ γωνία ἡ ΓΔΒ ἴση τῇ ΓΑΒ. (κ) καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΒΓΔ ἴση τῇ ΓΒΑ, ἡ δὲ ΓΒΔ τῇ ΒΓΑ. ὅλη ἄρα ἡ ΔΓΑ ἴση ὅλη τῇ ΔΒΑ. (λ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπεὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΑΓ τριγώνῳ. (μ) ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος διχα τέμνει τὸ ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΔΕ΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶν.

"Εξω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς ΑΖ, ΒΓ, λέγω ὅτι ἴσόν ἐσὶ τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΖ παραλληλογράμμῳ. ρ. 65.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΓ. (ν) ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ ἴση τῇ ΒΓ. (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΕΖ. (ο) κοινή προσκείδω

(ι) Κατὰ τὸ ἀρημ. κ. μέρ. (κ) Κατὰ τὴν κς. πρότ. (λ) Κατὰ τὸ β. Ἀξ. (μ) Κατὰ τὴν κς. πρότ. (ν) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (ξ) Κατὰ τὴν αὐγ. (ο) Κατὰ τὸ α. ἀξ.

κείθω ἢ ΔΕ. ἄρα ἢ ΑΕ ἴση τῇ ΔΖ. (π) ἕκδν ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΕ, ΓΔΖ, ἢ μὲν ΑΕ ἴση τῇ ΔΖ, (ρ) ἢ δὲ ΑΒ τῇ ΔΓ, ἢ δὲ ΒΕ τῇ ΓΖ. (σ) τὸ ἄρα ΒΑΕ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΔΖ τριγώνῳ. (τ) κοινὸν ἀφηρέθω τὸ ΔΗΕ τρίγωνον. τὸ τραπέζιον ἄρα ΑΒΗΔ ἴσον τῷ ΓΗΕΖ τραπέζιῳ. (υ) κοινὸν προσκείθω τὸ ΒΗΓ τρίγωνον. τὸ ἄρα ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ. (φ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ΒΔ, ΖΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν ΒΓ, ΖΗ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς ΑΘ, ΒΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ ἴσόν ἐστι. χ. 66.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΓΘ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἢ ΒΓ ἴση τῇ ΖΗ, (χ) τῇ δὲ ΖΗ ἴση ἢ ΕΘ. (ψ) καὶ ἢ ΒΓ ἄρα ἴση τῇ ΕΘ. (ω) εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. (α) καὶ αἱ ΒΕ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι. (β) παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΕΘΓ. ἐστὶ δὲ ἴσον ἑκατέρῳ τῶν ΒΔ, ΖΘ παραλληλογράμμων. (γ) καὶ τὸ ΒΔ ἄρα ἴσον τῷ ΖΘ. (δ) ὁ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟ-

(π) Κατὰ τὸ β. ἀξ. (ρ) Δίδακτῶν. (σ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (τ) Κατὰ τὴν η. πρότ. (υ) Κατὰ τὸ γ. Ἀξ. (φ) Κατὰ τὸ β. ἀξ. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (ω) Κατὰ τὸ α. Ἀξ. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν λγ. πρότ. (γ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (δ) Κατὰ τὸ α. Ἀξ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΔΖ΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄν-
τα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα
ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἐσὼ τρίγωνα τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΒΓ$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς
 $ΒΓ$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΑΔ$, $ΒΓ$. λέγω,
ὅτι ἴσόν ἐσὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΒΓ$ τριγώνῳ. χ . 67.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἢ $ΑΔ$ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ
 $Ε$, $Ζ$ σημεία. καὶ διὰ μὲν τῆ $Β$ ἤχθω ἢ $ΒΕ$ παραλλή-
λος τῇ $ΓΑ$, διὰ δὲ τῆ $Γ$, (ϵ) ἢ $ΓΖ$ τῇ $ΒΔ$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ $ΓΕ$, $ΒΖ$ παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.
(ζ) ἀλλὰ τὸ μὲν $ΑΒΓ$ τρίγωνον τὸ ἥμισυ ἐστὶ τῆ $ΓΕ$
παραλληλογράμμου· τὸ δὲ $ΔΒΓ$, τὸ τῆ $ΒΖ$ ἥμισυ. (η)
τὸ ἄρα $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΒΓ$ τριγώνῳ ἴσον. (θ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΔΗ΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα,
καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλή-
λοις εἰσίν.

Ἐσὼ τρίγωνα τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΓΖ$ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν
 $ΒΓ$, $ΓΖ$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΒΖ$,
 $ΔΑ$. λέγω, ὅτι ἴσόν ἐσὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΓΖ$
τριγώνῳ. χ . 68.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήθω ἢ $ΑΔ$ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ $Η$,
 $Θ$ σημεία. καὶ διὰ μὲν τῆ $Β$ ἤχθω ἢ $ΒΗ$ παραλλή-
λος τῇ $ΑΓ$ · διὰ δὲ τῆ $Ζ$, ἢ $ΖΘ$ τῇ $ΓΔ$. (ι).

Γ 3

ΔΕΙ-

(ε) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (ζ) Κατὰ τὴν λε. πρότ. (η) Κατὰ
τὴν λδ. πρότ. (θ) Κατὰ τὸ σ. Ἀξ. (ι) Κατὰ τὴν λα. πρότ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ παραλληλόγραμμα ΓΗ, ΓΘ ἴσα ἀλλήλεις εἰσίν. (κ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τὸ ἥμισυ ἐστὶ τῆ παραλληλογράμμου ΓΗ, τὸ δὲ ΔΓΖ τῆ ΓΘ. (λ) τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον ἴσον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ. (μ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΕΓ, ΔΕΓ (χ. 69.) ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, τῆς ΒΓ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ, Α, Δ. λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσίν ὅπερ εἰσίν, ὅτι ἡ τὰς κορυφαῖς αὐτῶν ἐπιζευγνῦσα ΑΔ, παράλληλος ἐστὶ τῇ βάσει ΒΓ. εἰ γὰρ μὴ,

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἦχθω ἡ ΑΕ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τριγώνῳ ΕΒΓ. (ν) ἀλλὰ καὶ τῷ ΒΔΓ ἴσον τῷ ΑΒΓ. (ξ) τὸ ἄρα ΕΒΓ ἴσον τῷ ΔΒΓ. (ο) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐκ ἄρα ἡ ΑΕ παράλληλος τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς ΑΔ. ἡ ΑΔ ἄρα παράλληλος τῇ ΒΓ. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, (καὶ ἐπὶ εὐθείας ἔχοντα τὰς βάσεις) καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσίν. Ἔστω

(κ) Κατὰ τὴν λγ. πρότ. (λ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (μ) Κατὰ τὸ ε, Ἄξ. (ν) Κατὰ τὴν λς. πρότ. (ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὸ κ. Ἄξ

Ἐπι τριγώνω ἴσα τὰ $\Lambda\Gamma$, $\Delta\Gamma\epsilon$, (σχ. 70) ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν $B\Gamma$, $\Gamma\epsilon$, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ $\Lambda\Delta$, καὶ ἐπ' εὐθείας ἔχοντα τὰς βάσεις $B\Gamma$, $\Gamma\epsilon$. Λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις, ἔστιν ὅτι ἡ $\Lambda\Delta$ παράλληλος τῇ BE . εἰ γὰρ μὴ,

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐξέχθω ἡ ΛZ παράλληλος τῇ BE , (π) καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓZ .

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\Lambda B\Gamma$ τρίγωνον ἴσον τῷ $Z\Gamma\epsilon$ τριγώνῳ. (ρ) ἀλλὰ καὶ τὸ $\Delta\Gamma\epsilon$ ἴσον τῷ $\Lambda B\Gamma$. (σ) τὸ ἄρα $Z\Gamma\epsilon$ ἴσον τῷ $\Delta\Gamma\epsilon$. (τ) τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐν ἄρα ἡ ΛZ παράλληλος τῇ BE . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διεχθήσεται, ὅτι ἐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς $\Lambda\Delta$. ἡ ἄρα $\Lambda\Delta$ παράλληλος τῇ BE .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ΄.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἦ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ τριγώνῳ.

Παραλληλόγραμμον τὸ $\Lambda\Gamma$ τριγώνῳ τῷ $E.B\Gamma$ βάσιν ἔχέτω τὴν αὐτὴν $B\Gamma$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς $B\Gamma$, $\Lambda\epsilon$. λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ $\Lambda\Gamma$ παραλληλόγραμμον τῷ $BE\Gamma$ τριγώνῳ. πίν. 5. σχ. 71.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπεξεύχθω ἡ $\Lambda\epsilon$.

Γ 4

ΔΕΙ-

(π) Κατὰ τὴν λα. πρότ., (ρ) Κατὰ τὴν λη. πρότ. (ε) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὸ α, Ἄξ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\Lambda\Gamma$ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τῷ $\Lambda\text{Β}\Gamma$ τριγώνῳ. (υ) ἀλλὰ τὸ $\Lambda\text{Β}\Gamma$ τρίγωνον ἴσόν ἐστι τῷ $\text{Β}\text{Ε}\Gamma$ τριγώνῳ. (φ) τὸ $\Lambda\Gamma$ ἄρα παραλληλόγραμμον διπλάσιον καὶ τῷ $\text{Β}\text{Ε}\Gamma$ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΒ΄.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγραμμῶ γωνίᾳ.

Ἴσῶ τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ $\Lambda\text{Β}\Gamma$, ἡ δὲ δοθείσα γωνία ἡ Δ . χ. 72.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήθω δίχα ἡ $\text{Β}\Gamma$ κατὰ τὸ Ε , (χ) καὶ ἐπέξεύχθω ἡ $\text{Ε}\Lambda$, καὶ συνεχάτω ἡ $\text{Γ}\text{Ε}\text{Ζ}$ γωνία ἴση τῇ Δ . (ψ) καὶ διὰ μὲν τῷ Λ ἤχθω ἡ $\Lambda\text{Η}$ παράλληλος τῇ $\text{Β}\Gamma$, διὰ δὲ τῷ Γ , ἡ $\Gamma\text{Η}$ τῇ $\text{Ζ}\text{Ε}$. (ω) λέγω, ὅτι τὸ $\text{Ε}\text{Η}$ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\Lambda\text{Β}\text{Ε}$ τρίγωνον ἴσόν ἐστι τῷ $\Lambda\text{Ε}\Gamma$ τριγώνῳ. (α) τὸ ἄρα $\Lambda\text{Β}\Gamma$ τρίγωνον ἴσον ὄν τοῖς $\Lambda\text{Β}\text{Ε}$, $\Lambda\text{Ε}\Gamma$, διπλάσιόν ἐστι τῷ $\Lambda\text{Ε}\Gamma$. ἀλλὰ καὶ τὸ $\text{Ε}\text{Η}$ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τῷ αὐτῷ $\Lambda\text{Ε}\Gamma$ τριγώνῳ. (β) τὸ ἄρα $\text{Ε}\text{Η}$ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ $\Lambda\text{Β}\Gamma$ τριγώνῳ, (γ) καὶ ἔχει τὴν $\text{Γ}\text{Ε}\text{Ζ}$ γωνίαν ἴσην τῇ Δ . τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ.

ΠΡΟ-

(υ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (φ) Κατὰ τὴν λς. πρότ. (χ) Κατὰ τὴν ι. πρότ. (ψ) Κατὰ τὴν κγ. πρότ. (ω) Κατὰ τὴν λα. πρότ. (α) Κατὰ τὴν λη. πρότ. (β) Κατὰ τὴν μα. πρότ. (γ) Κατὰ τὸ ε. ἀξ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΓ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἔσιν.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΔ, διάμετρος δ' αὐτῆς ἡ ΑΓ. περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΒΚ, ΚΔ, λέγω, ὅτι ἴσόν ἔστι τὸ ΒΚ τῷ ΚΔ. χ. 73.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΚΗΓ τῷ ΚΖΓ, τῷ δὲ ΑΕΚ τὸ ΑΘΚ. (δ) ἀφηρήθω ἀπὸ μὲν τῆς ΑΒΓ τὰ ΚΗΓ, ΑΕΚ· ἀπὸ δὲ τῆς ΑΔΓ τὰ ΚΖΓ, ΑΘΚ. καὶ λοιπὰ ἄρα τὰ ΒΚ, ΚΔ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. (ε)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΔ΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλῶν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμω.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον, τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Δ. χ. 74.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεσάτω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓ ἴσον τῷ τριγώνῳ Γ, καὶ ἐν τῇ γωνίᾳ ΕΒΗ ἴση τῇ δοθείσῃ Δ. (ζ) καὶ κείθω ἡ δοθεῖσα ΑΒ ἐπ' εὐθείας τῇ ΗΒ. καὶ ἀπὸ τῆς Α σημείω ἤχθω ἡ ΑΚ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΓΗ, ΕΒ. (η) καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΓΕ συμπίπτέτω τῇ ΑΚ κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ

Γ 5

(δ) Κατὰ τὴν λδ. πρότ. (ε) Κατὰ τὸ γ. Αξ. (ζ) Κατὰ τὴν μβ. πρότ. (η) Κατὰ τὴν λμ. πρότ.

ἢ ΚΒ, καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συνεχές, καὶ συμ-
πιπτέτω τῇ ΓΙΙ ἐκβληθείᾳ κατὰ τὸ Θ. ἢ ἀπὸ τῆς
Θ ἤκθω ἢ ΘΑ παράλληλος ἑποτέρας τῶν ΗΑ, ΓΚ.
ἢ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΕΒ, ΚΑ, ἢ συμπιπτέτωσαν τῇ
ΘΑ κατὰ τὰ Μ καὶ Λ σημεῖα. Λέγω, ὅτι τὸ ΒΛ
ἐστὶ τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒ. (θ) ἀλ-
λά καὶ τὸ Γ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΒ. (ι) τὸ ΒΛ ἄρα
παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι τριγώνῳ Γ. (κ) ἢ
παραβεβλήται μὲν παρά τὴν δοθεῖσαν ΑΒ, ἔχει δὲ
καὶ γωνίαν τὴν ΜΒΑ ἴσην τῇ δοθείσῃ Δ. (ἢ μὲν γὰρ
ΜΒΑ ἴση τῇ ΕΒΗ, (λ) τῇ δὲ ΕΒΗ ἴση ἢ Δ.) (μ)
τὸ ΒΛ ἄρα παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΕ΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλλη-
λόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυ-
γράμμῳ γωνία.

Ἴδω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἢ δὲ
δοθεῖσα γωνία ἢ Ε. σχ. 75.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐπέξέχθω ἢ ΒΔ, ἢ συνεχάτω τὸ ΚΗ παραλλ-
ηλόγραμμον ἴσον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, περιέχον καὶ γω-
νίαν τὴν ΖΚΘ ἴσην τῇ δοθείσῃ Ε. (ν) παρά δὲ τὴν
ΗΘ παραβεβλήθω παραλληλόγραμμον τὸ ΘΛ ἴσον τῷ
ΓΔΒ τριγώνῳ, περιέχον καὶ γωνίαν τὴν ΛΗΘ ἴσην τῇ
ΗΘΚ

(θ) Κατὰ τὴν μυ. πρότ. (ι) Ἐκ τῆς κατασκευῆς, (κ) Κατὰ
τὸ α. Ἀξ. (λ) Κατὰ τὴν ιε. πρότ. (μ) Ἐκ τῆς κατασκευῆς.
(ν) Κατὰ τὴν μβ. πρότ.