πρώτῳ σὺν τῇ διαφορᾷ, ὡς εἴρηται. τὸ τοῦ πρώτου ἄρα καὶ τοῦ τρίτου ἄθροισμα διπλάσιον τοῦ δευτέρου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη κατὰ διῃρημένον ἀριθμητικὸν λόγον ἀνάλογον ᾖ, τὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τετάρτου ἄθροισμα τῷ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου ἴσον ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω ἡ ἀναλογία αὔξουσα, οἷον, 2, 7, 12, 17. καὶ ἐπεὶ ὁ τέταρτος 17 ἐκ τοῦ τρίτου καὶ τῆς διαφορᾶς σύγκειται, (κατὰ τὸ β΄. θεωρ.) τὸ ἄρα ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τετάρτου 2 + 17 ὁ πρῶτός ἐστι καὶ ὁ τρίτος καὶ ἡ διαφορὰ, εἴτουν 2 + 12 + 5. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος 7 ὁ πρῶτός ἐστι καὶ ἡ διαφορὰ, τὸ ἄρα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου ἄθροισμα, εἴτουν τὸ 7 + 12 = 2 + 5 + 12, ὁ πρῶτός ἐστι σὺν τῇ διαφορᾷ καὶ τῷ τρίτῳ. ἀλλὰ τοῦτο αὐτό ἐστι καὶ τὸ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου ἄθροισμα, ὡς δέδεικται. τὸ ἄρα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τετάρτου ἄθροισμα ἴσον τῷ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου. ὃ ἔδει δεῖξαι.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ τὸ προκείμενον καὶ ἐπὶ τῆς μειουμένης δειχθήσεται ἀναλογίας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον, τῶν 9 καὶ 13, μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Σύναψον τοὺς δύω δοθέντας, καὶ τὸ αὐτῶν ἄθροισμα, τὸν 22 δίχα διελὼν, εὑρήσεις τὸν ζητούμενον μέσον, ὅς ἐστιν ὁ 11.

ΔΕΙ-

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου ἄθροισμα διπλάσιόν ἐστι τοῦ δευτέρου, τουτέστι τοῦ μέσου. (κατὰ τὸ γ΄ θεώρ.) ἀλλ' οἱ δοθέντες ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος εἰσί. ὃ γὰρ ὁ μέσος ζητεῖται. τὸ αὐτῶν ἄρα ἄθροισμα τὸ 22. τὸ διπλάσιον τοῦ μέσου ἐστί. τὸ ἥμισυ ἄρα τούτου, ἤτουν τὸ 11, ὁ ζητούμενος μέσος ἐστί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον, τοῦ 8, 5, 9, τέταρτον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ

Τὸν δεύτερον καὶ τρίτον, ἤτουν τὸν 5 καὶ 9, συνάψας, καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν τοῦ 14 τὸν πρῶτον τὸν 8 ἀφελών, τὸν ζητούμενον τέταρτον εὑρήσεις· ὅς ἐστι τὸ λοιπὸν τὸ ἐκ τῆς τοιᾶσδε προκύπτον ἀφαιρέσεως, ἤτουν ὁ 6.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου ἄθροισμα ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου. (κατὰ τὸ δ΄. θεώρ.) ἐὰν ἄρα ὁ τέταρτος ὀνομασθῇ χ, ἔσεται $8 + \chi = 14$. ἑκατέρωθεν δὲ τοῦ 8 ἀφαιρεθέντος, ἔσεται $\chi = 6$, τουτέστιν ὁ τέταρτος ἴσος τῇ διαφορᾷ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄

Ἐὰν ὦσι τέσσαρα μεγέθη, οἷον τὰ 3, 7, 5, 9 ἀριθμητικῶς ἀνάλογα, καὶ ἐναλλὰξ, ἤτουν 3, 5, 7, 9, καὶ ἀνάπαλιν, ἤτοι 7, 3, 9, 5 ἀνάλογον ἔσαι. πάλιν ἐὰν τεταγμένη ἡ ἀνα-

ἀναλογία ᾖ, ὅρα τὸν ιδ΄. ὁρισμ. τοῦ ε΄. βιβλ. τῆς Γεωμετρ. οἷον 1, 2, 3, 4, καὶ 2, 9, 4, 11, ἔσεται καὶ δι᾽ ἴσου 1, 9, 3, 11. ὡσαύτως ἐὰν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία ᾖ, ἤτοι 3, 7, 5, 9, καὶ 7, 10, 2, 5, ἔσεται καὶ δι᾽ ἴσου τεταραγμένως 3, 10, 2, 9. δῆλος δὲ ὁ λόγος. ἡ γὰρ μεταξὺ ἀλλήλων διαφορὰ ἡ αὐτή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον τῶν 1 καὶ 9 μέσον γεωμετρικῶς ἀνάλογον εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ

Τοῦ ἐκ τῶν δύω δοθέντων 1 καὶ 9 Γινομένου 1.9 τὴν τετραγωνικὴν ἐξάγαγε ῥίζαν. αὕτη δὴ ἔσαι ὁ ζητούμενος μέσος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔσω μὲν γὰρ X ὁ ζητούμενος μέσος. ἄρα ὡς 1 : X :: X : 9. τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἄρα ἴσον τῷ ἐκ τοῦ μέσου, (κατὰ τὴν ϛ΄. πρότ. τοῦ ε΄. βιβλ. τῆς Γεωμετρ.) ἤτοι $1.9 = X^2$. τῆς ἄρα τετραγωνικῆς ῥίζης ἑκατέρωθεν ἐξαχθείσης, ἔσαι $X = 3$. ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον τῶν 2, 7, 12, τέταρτον γεωμετρικῶς ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὸ ἐκ τῶν μέσων 7 καὶ 12 Γινόμενον διὰ τοῦ πρώτου 2 δίελε. ἔσαι δὲ οὖν τὸ Πηλίκον 42 ὁ ζητούμενος τέταρτος.

ΔΕΙ-

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔϛω X ὁ ζητέμενος. ἄρα ὡς 2 : 7 :: 12 : X. τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἄρα ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων, (κατὰ τὴν ς' τῆ ε.) εἴτεν 2. X = 7. 12. διελε ἑκάτερον τέτων τῶν ἴσων διὰ τῆ 2. ἔϛαι ἔν τὰ τέτων Πηλίκα ἴσα, εἴτεν $\frac{2. X}{2} = \frac{7. 12.}{2}$, ὅπερ ἐϛι, X = 42

ΟΡΙΣΜΟΣ Η'.

Λογάριθμός ἐϛιν ὁ ἀριθμὸς ὁ τῆ διπλασίονος, ἢ τριπλασίονος, ἢ τετραπλασίονος, ἢ ὁπωσῦν πολλαπλασίονος λόγε ἐμφαντικός.

ΣΧΟΛΙΟΝ

Ἐὰν ὑπὸ τὴν γεωμετρικὴν συνεχῆ σειρὰν, οἷον τὴν, 3, 6, 12, 24, 48, 96, κτ. ἀριθμητικὴν γράψῃς, οἷον τὴν, 2, 3, 4, 5, 6, κτ. ἀμέλειτοι ὅρον ἀριθμητικὸν ὑπὸ ὅρον γεωμετρικὸν, οἱ ἀριθμητικοὶ ὅροι Λογάριθμοι ἔσονται τῶν γεωμετρικῶν· ὁ μὲν 2 Λογάριθμος τῆ λόγε ὃν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 12, ὅϛις διπλασίων ἐϛὶν, ἥπερ ὁ λόγος ὃν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 6. ὁ δὲ 3, τῆ λόγε ὃν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 24, ὅς ἐϛι τριπλασίων, ἥπερ ὃν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 6· ὁ δὲ 4, τῆ λόγε ὃν ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 48, τετραπλασίονα ὄντα, ἥπερ ὃν ἔχει ὁ αὐτὸς 3 πρὸς τὸν 6, ϗ ἐν τοῖς ἑφεξῆς ὁμοίως.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. οἱ ἔν ὅροι τῆς Ἀριθμητικῆς σειρᾶς B, οἱ ὑπὸ τὺς τῆς Γεωμετρικῆς Α γραφόμενοι, οἱ τέτων Λογάριθμοί εἰσιν.

(Α)	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, κτ.
(Β)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, κτ.

Β΄. Ἐὰν ἡ Πρόοδος ἡ ὑπὸ τὴν Γεωμετρικήν, ἢ Φυσικὴ Σειρὰ τῶν ἀριθμῶν ᾖ, τὸ 0 πρῶτον ἔχουσα ὅρον, ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ ὑποδείγματι, οἱ Λογάριθμοι τὰ ὑπὸ τῆς μονάδος ἀποστήματα τῶν γεωμετρικῶς ἀναλόγων ἀριθμῶν ἐμφαίνουσιν. οἷον τὸ μὲν 1, τὸ ἐν τῇ Β σειρᾷ δηλοῖ, ὅτι τὸ τοῦ 2, τοῦ ἐν τῇ γεωμετρικῇ σειρᾷ Α ἀπόστημα ἀπὸ τῆς μονάδος ἕν ἐστιν· ὁ δὲ ἑξῆς 2 ὁ ἀριθμητικός, ὅτι δύο τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος ἀποστήματα τοῦ γεωμετρικοῦ 4· ὁ δὲ ἑξῆς 3, ὅτι τρία τὰ τοῦ 8 ἀποστήματα, καὶ οὕτως ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

Γ΄. Ἐπεὶ οἱ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου ἀριθμοί, τῆς πρῶτον ἐχούσης ὅρον τὴν μονάδα, Δυνάμεις εἰσί, φυσικῇ προϊοῦσαι τάξει, ἐὰν ἡ ὑπ' αὐτὴν Ἀριθμητική, ἢ Φυσικὴ ᾖ, ἀπὸ τοῦ 0 ἐναρχομένη, οἱ Λογάριθμοι οἱ ἐκθέται εἰσὶ τῶν Δυνάμεων. οἷον, τὸ μὲν 1, ἐκθέτης τοῦ 2· πρώτη γὰρ ὁ 2 Δύναμις· ὁ δὲ 2, τοῦ 4· δευτέρα γὰρ ὁ 4 Δύναμις, εἴτουν τετράγωνος· ὁ δὲ 3, τοῦ 8, ὅς ἐστι τρίτη Δύναμις, ἤτοι κύβος, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΘΕΩΡΗΜΑ ϛ΄.

Ἐὰν ἡ μονὰς τὸ 0 λογάριθμον ἔχῃ, ὁ λογάριθμος παντὸς γινομένου, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων, τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου· οἷον ὁ λογάριθμος τοῦ 8, τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ 2 ἐπὶ τὸν 4, ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τοῦ 2 καὶ τοῦ 4, εἴτουν ὁ 3.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς μονὰς, πρὸς Πολλαπλασιαςὴν, ἔτω πολλαπλασιαςέος πρὸς Γινόμενον, (κατὰ τὴν α. συνέπ. τȣ̃ ι. ὁρισ. τȣ̃ α. τῆς Ἀριθμ. βιβλ.) εἴτεν ὡς 1 : 2 :: 4 : 8, ὁ τȣ̃ Γινομένȣ ἄρα 8 Λογάριθμος, ὁ τέταρτος τῶν ἰσοδιαφερόντων 0, 1, 2, ἐςὶν, ἤτοι ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς τȣ̃ Λογαρίθμȣ τῆς μονάδος, τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃, ϗ τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ. ἀλλ' ὁ τέταρτος τῶν ἰσοδιαφερόντων ἴσος τῇ διαφορᾷ τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν μέσων ϗ τȣ̃ πρώτȣ. (ὅρα τὸ β'. πρόβλ. τȣ̃ δε τȣ̃ βιβλ.) ἔςι δὲ ὁ πρῶτος 0 ἐξ ὑποθέσεως. ὁ Λογάριθμος ἄρα τȣ̃ Γινομένȣ 8 ἴσος τῷ Ἀθροίσματι 3 τῶν Λογαρίθμων τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃ ϗ τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ. ὅ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Τὸ ἄθροισμα ἄρα δύω ὁποιωνȣ̃ν Λογαρίθμων, ὁ Λογάριθμός ἐςι τȣ̃ Γινομένȣ ἐκ τῶν δύω ἀριθμῶν, ὧν οἱ Λογάριθμοι τὸ διαληφθὲν συνεκρότησαν Ἄθροισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ὁ μὲν τȣ̃ τετραγώνȣ Λογάριθμος διπλάσιός ἐςι τȣ̃ τῆς ἑαυτȣ̃ τετραγωνικῆς ῥίζης· ὁ δὲ τȣ̃ κύβȣ, τῆς κυβικῆς τριπλάσιος, καὶ ἔτως ἐφεξῆς. τȣ̃ μὲν γὰρ τετραγώνȣ ὁ Λογάριθμος τὸ Ἄθροισμά ἐςι δύω ἴσων Λογαρίθμων, τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃ δηλαδὴ καὶ τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ· τȣ̃ δὲ κύβȣ, τριῶν, ϗ ἔτως ἐφεξῆς. οἷον ὁ μὲν 2 ὁ Λογάριθμος τȣ̃ τετραγώνȣ 4, διπλάσιός ἐςι τȣ̃ Λογαρίθμȣ 1 τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης 2. ὁ δὲ 3 ὁ Λογάριθμος τȣ̃ κύβȣ 8, τριπλάσιός ἐςι τȣ̃ Λογαρίθμȣ 1 τῆς κυβικῆς ῥίζης 2.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'.

Ἐὰν ὁ τῆς μονάδος Λογάριθμος τὸ 0 ᾖ, ὁ τȣ̃ Πηλίκȣ Λογάριθμος ἴσος ἔςαι τῇ διαφο-

φορᾷ τῶν λογαρίθμων τοῦ Διαιρέτου καὶ Διαιρετέου· οἷον ὁ 2, διαφορὰ ὢν τοῦ 7, Λογαρίθμου τοῦ 128, καὶ τοῦ 5, Λογαρίθμου τοῦ 32, ὁ Λογάριθμός ἐστι τοῦ Πηλίκου 4, τοῦ προϊόντος ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 128 διὰ τοῦ 32.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς Διαιρέτης, πρὸς Διαιρετέον, οὕτω μονάς, πρὸς Πηλίκον. (ὅρα τὴν Β΄. συνέπ. τοῦ α΄. τῆς Ἀριθμ. βιβλ.) ὁ τοῦ Πηλίκου ἄρα Λογάριθμος ὁ τῶν ἰσοδιαφερόντων τέταρτός ἐστιν, εἴτουν ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ὅρος τῶν Λογαρίθμων τοῦ Διαιρέτου, τοῦ Διαιρετέου, καὶ τῆς μονάδος. ἀλλ' ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ἴσος τῇ διαφορᾷ τοῦ κεφαλαίου τῶν μέσων καὶ τοῦ πρώτου. (ὅρα τὸ Β΄. πρόβλ. τοῦ δε τοῦ βιβλ.) ὁ τοῦ Πηλίκου ἄρα Λογάριθμος ἴσος τῷ τῶν Λογαρίθμων, τοῦ Διαιρετέου δηλαδὴ καὶ τῆς μονάδος, ἀθροίσματι, τοῦ Λογαρίθμου τοῦ Διαιρέτου ἀφαιρεθέντος. ἀλλ' ὁ τῆς μονάδος Λογάριθμος ἴσος 0 ἐξ ὑποθέσεως. ὁ τοῦ Πηλίκου ἄρα Λογάριθμος ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν Λογαρίθμων τοῦ Διαιρέτου καὶ Διαιρετέου. ὅ, ἔ, δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

Ἡ διαφορὰ δύω ὁποιωνοῦν Λογαρίθμων, ὁ Λογάριθμός ἐστι τοῦ Πηλίκου τοῦ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτοντος τῶν ἀριθμῶν, ὧν οἱ Λογάριθμοι τὴν διαληφθεῖσαν μεταξὺ ἀλλήλων ἔχουσι διαφοράν. οἷον ὁ 6 ἡ διαφορὰ τῶν Λογαρίθμων 2 καὶ 8, ὁ Λογάριθμός ἐστι τοῦ Πηλίκου 64, τοῦ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτοντος τῶν 4 καὶ 256.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Αʹ.

Τῶν Λογαρίθμων, οἷς οἱ Μαθηματικοὶ χρῶνται, τὸν τύπον ὁ Βρίγγιος (α) τῇ τοῦ πρώτου αὐτῶν εὑρετοῦ Νεπέρου ὁδηγίᾳ πρῶτος συνετάξατο ἐκ τῆσδε τῆς γεωμετρικῆς αὐτὰς λαβὼν προόδου 1, 10, 100, 1000, 10000. εἰσὶ δ' οἱ παρ' αὐτοῦ εὑρεθέντες, καὶ κανόνι ἢ πίνακι συντεθέντες τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν τῶν ἀπὸ μονάδος ἀρχομένων Λογάριθμοι τὸν ἀριθμὸν, 10000. τίνι δὲ τούτους εὗρε μεθόδῳ, ἐροῦμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Βʹ.

Οἱ τῶν ἀριθμῶν 1, 10, 100, 1000, 10000, τῶν γεωμετρικῆς σειρᾶς ὅρων ὄντων, Λογάριθμοι ἀπόνως εὑρίσκονται. οἱ γὰρ ὑπ' αὐτοὺς γραφέντες τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ὅροι, 0, 1, 2, 3, 4, οἱ αὐτῶν εἰσὶ Λογάριθμοι, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γʹ.

Μεταξὺ τῶν γεωμετρικῶν ὅρων, 1 καὶ 10, (ὡσαύτως καὶ μεταξὺ τῶν ἄλλων) ἐπ' ἀκριβὲς γεωμετρικὸν ἀνάλογον εὑρεῖν ἀμήχανον. ὁ γὰρ μεταξὺ αὐτῶν γεωμετρικὸς ἀνάλογος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐστὶ τοῦ Γινομένου ὑπὸ τοῦ 1 καὶ 10, (κατὰ τὸ γʹ. πρίβλ. τοῦ δʹ. βιβλ. τῆς Ἀριθμητ.) τούτου δὲ μὴ ὄντος τετραγώνου, τὴν ἐπ' ἀκριβὲς τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν ἀδύνατον. (κατὰ τὴν γʹ. σημ. τοῦ γʹ. βιβλ. τῆς Ἀριθμητ.) καὶ ἦν δὲ ἀδύνατον τὸν ἀκριβῆ τε εὑρεῖν καὶ ἐντελῆ μέσον ἀνάλογον, εὑρίσκεται δ' οὖν ὅμως ὁ ἐγγύτατος, καὶ τοῦ ἐντελοῦς διαφέρων κατά τινα μόνον δεκαδικὰ μέρη τῆς μονάδος εἰς ἓν διαιρεθείσης μιλλιόνιον, ἐὰν ἐξαγομένης τῆς τοῦ 1. 10 τετραγωνικῆς ῥίζης, προστεθῇ σημεῖα μηδενικὰ ἑπτὰ ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν. ἐκ τούτου

Φ ὑπε-

(α) Τῆς Γεωμετρίας ἦν διδάσκαλος ἐν τῇ κατὰ τὴν Ὀξωνίαν Ἀκαδημίᾳ. ὅρα τὸ 248 παράγρ. τῆς τοῦ Οὐόλφ. Ἀριθμ.

ἕπεται, καὶ αὐτοὺς τοὺς Λογαρίθμους τῶν τοιούτων ἀριθμῶν μὴ ἐξηκριβωμένους εἶναι εἰς τὸ παντελές. οἷον τοῦ ἀριθμοῦ 9 Λογάριθμος λαμβάνεται ὁ 0. 9542425I. οὗτος δὲ ὁ τοῦ 9, ἀλλὰ τοῦ 9. 0000000 Λογάριθμός ἐστι, τουτέστι Λογάριθμός ἐστιν ἀριθμοῦ μὴ διαφέροντος τοῦ 9 εἰμὴ κατά τινα δεκαδικὰ τῶν μερῶν τῆς εἰς μιλλιόνιον διαιρεθείσης μονάδος. παραβλεπτέα δὲ ἐν τῇ πρακτικῇ χρήσει ἡ τοιαύτη διαφορά, ὡς μηδεμιᾶς αἰσθητῆς ἀλλοιώσεως πρόξενος.

Ἡ τοῦ εὑρίσκειν τοὺς Λογαρίθμους μέθοδος.

Κείσθω δεῖν εὑρεῖν τὸν τοῦ 9 Λογάριθμον. προσγεγράφθω τοῖς τε γεωμετρικοῖς ὅροις 1, καὶ 10, ὁμοίως καὶ τοῖς ἀριθμητικοῖς 0 καὶ 1 σημεῖα μηδενικὰ ἑπτά. (πρὸς τὴν τῶν δεκαδικῶν ταῦτα προσγράφεται δήλωσιν.) καὶ λεγέσθω ὁ μὲν τῶν γεωμετρικῶν ὅρων, ὁ 1. 0000000, Α· ὁ δὲ, ὁ 10. 0000000, Β. καὶ εὑρεθήτω μεταξὺ μὲν τῶν Α καὶ Β μέσος γεωμετρικὸς ὅρος ὁ Γ, ἤτοι ὁ 3. 1622777. (κατὰ τὸ γ'. τοῦ δε τοῦ βιβλ. πρόβλ.) μεταξὺ δὲ τῶν 0. 0000000, καὶ 1. 0000000, μέσος ἀριθμητικὸς, ὁ 0. 5000000, (κατὰ τὸ α'. τοῦδε τοῦ βιβλ. πρόβλ.) ὅστις δὴ ὁ Λογάριθμος τοῦ Γ ἔσται. πάλιν μεταξὺ τοῦ Γ καὶ τοῦ Β μέσος γεωμετρικὸς ὁ Δ, καὶ μεταξὺ τοῦ 1. 0000000, καὶ τοῦ 0. 5000000 μέσος ἀριθμητικὸς ὁ 7500000 εὑρεθήτω, ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ τύπῳ (ὅρα πίν. ΚΖ'.) πάρεστιν ἰδεῖν. καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως τὰ αὐτὰ ἐπιτελείσθω, ἄχρις οὗ ὁ εὑρεθησόμενος μέσος γεωμετρικὸς ε, τοῦ 9 μηδὲν διαφέρει, εἰμὴ κατά τινα δεκαδικὰ τῶν δεκατομιλλιονιστημορίων ἐλάσσονα, εἴτουν ἴσος ᾖ 9. 0000000. ἔσται δὴ οὖν ὁ Λογάριθμος αὐτοῦ, ὁ ἔσχατος πάντων τῶν τῷ διαληφθέντι τρόπῳ εὑρεθέντων ἀριθμητικῶν μέσων ὅρων, εἴτουν ὁ 0. 9542425I. τῷ δε γοῦν τῷ τρόπῳ ἕκαστον τῶν Λογαγαρίθμων εὑρεῖν ἔνεστιν. ἀλλ' ἰστέον, ὅτι ἔκ τινων εὑρεθέντων, καὶ ἄλλους εὑρεῖν πάνυ ῥᾴδιον. οἷον, τὸν τοῦ 9 εὑρεθέντα Λογάριθμον ἐὰν μὲν δίχα διέλῃς, τὸν τοῦ 3 ἕξεις· ἐὰν δὲ διπλασιάσῃς, τὸν τοῦ 81. (ὅρα τὸ β'. τοῦδε τοῦ Βιβλ. πόρ.) πάλιν ἐὰν τὸν τοῦ 3 Λογάριθμον τῷ τοῦ 9 συνάψῃς, ὁ τοῦ 27 προκύψει. (κατὰ τὸ γ'. πόρ. τοῦ αὐτ. Βιβλ.) τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ ἐκ τούτων τῶν εὑρεθέντων καὶ ἄλλους εὑρήσεις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ.

Ὁ ἐν τοῖς Λογαρίθμοις τῶν ὁλοκλήρων μονάδων ἀριθμὸς τοσαύτας περιέχει μονάδας, ὅσα εἰσὶ τὰ μηδενικὰ σημεῖα ἐν τῷ ἀριθμῷ ᾧ προσανήκει. οἷον, τὸ μὲν 1 Λογάριθμός ἐστι τοῦ 10, τοῦ ἓν μηδενικὸν περιέχοντος σημεῖον· ὁ δὲ 2, τοῦ 100, τοῦ δύω μηδενικὰ περιέχοντος σημεῖα· ὁ δὲ 3, τοῦ 1000· ὁ δὲ 4, τοῦ 10000. ἔνθεν τοι τὸν ἐν τοῖς Λογαρίθμοις τῶν ὁλοκλήρων μονάδων ἀριθμόν, τὸ τοῦ Λογαρίθμου χαρακτηριστικὸν καλεῖν εἰώθασιν.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Δ'.

Ἐκ τῶν εἰρημένων κατιδεῖν ῥᾴδιον, ὅτι τῶν μὲν μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10 ἀριθμῶν οἱ Λογάριθμοι μονάδος ἐλάσσονες· τῶν δὲ μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100, μείζονες μὲν μονάδος, ἐλάσσονες δὲ δυάδος· τῶν δὲ μεταξὺ τοῦ 100, καὶ 1000, μείζονες μὲν δυάδος, ἐλάσσονες δὲ τριάδος· τῶν δὲ μεταξὺ τοῦ 1000 καὶ τοῦ 10000, μείζονες μὲν τριάδος, ἐλάσσονες δὲ τετράδος· τοῖς δὲ ἐλάττοσι τῆς μονάδος ἀριθμοῖς ἀποφατικοὶ ἐπανήκουσι Λογάριθμοι. ἐπεὶ μὲν γὰρ ὁ τῆς μονάδος Λογάριθμος ἴσος 0 ἐξ ὑποθέσεως, τῷ τῆς μονάδος ἄρα ἐλάσσονι ἀριθμῷ, ἐλάσσων τοῦ 0 ἐπανήκει Λογάριθμος, εἴτουν ἀποφατικός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Τοῦ δοθέντος νόθου κλάσματος $\frac{9}{5}$ τὸν Λογάριθμον εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἀπὸ τοῦ Λογαρίθμου 0.9542425 τοῦ Ἀριθμητοῦ 9 τὸν τοῦ Παρωνομαστοῦ 5, εἴτουν τὸν 0.6989700 ἄφελε. καὶ ἔσται δὴ ἡ τούτων διαφορὰ 0.2552725 ὁ Λογάριθμος τοῦ νόθου κλάσματος $\frac{9}{5}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πηλίκον ἐμφαίνει πᾶν κλάσμα προκύπτον ἐκ Διαιρετέου μὲν τοῦ Ἀριθμητοῦ, Διαιρέτου δὲ τοῦ Παρωνομαστοῦ. οἷον τὸ $\frac{9}{5}$ ἐμφαίνει τὸν 9 Διαιρετέον καὶ τὸν 5 Διαιρέτην. ἀλλὰ παντὸς Πηλίκου ὁ Λογάριθμος ἴσος τῇ διαφορᾷ τοῦ Διαιρετέου καὶ Διαιρέτου. (κατὰ τὸ γ'. πόρ. τοῦδε τοῦ βιβλ.) ἡ ἄρα διαφορὰ τῶν Λογαρίθμων τοῦ Ἀριθμητοῦ καὶ Παρωνομαστοῦ τοῦ κλάσματος, ὁ Λογάριθμος αὐτοῦ ἐστίν. ο. ε. δ.

Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα γνήσιον ᾖ, οἷον τὸ $\frac{3}{7}$, ἄφελε τὸν τοῦ Ἀριθμητοῦ 3 Λογάριθμον 0.4771213 ἀπὸ τοῦ Λογαρίθμου 0.8450980 τοῦ Παρωνομαστοῦ 7, καὶ ἔσται δὴ ἡ τούτων ἀποφατικὴ διαφορὰ — 0.3679767 ὁ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{7}$ Λογάριθμος. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\frac{3}{7}$ τῆς μονάδος ἔλαττον, ὁ δὲ τῆς μονάδος Λογάριθμος τὸ 0 ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεως, ὁ τοῦ $\frac{3}{7}$ ἄρα Λογάριθμος ἐλάσσων τοῦ 0, ὃ διὰ τοῦ ἀποφατικοῦ δηλοῦται σημείου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων τῶν 4, 68, 3, τέταρτον γεωμετρικῶς ἀνάλογον διὰ τῶν Λογαρίθμων εὑρεῖν.

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὰς τῶν μέσων Λογαρίθμες, εἴτεν τὸν 1. 8325089 τῦ 68 Λογάριθμον, τῷ 0. 4771213 τῦ 3 Λογαρίθμυ σύναψον. καὶ ἀπὸ τῦ ἀθροίσματος 2. 3096302 τὸν τῦ πρώτυ 4 Λογάριθμον 0. 6020600 ἄφελε. ἔςαι δὴ ἂν ἡ τέτων διαφορὰ 1. 70757-2 ὁ τῦ ζητεμένυ τετάρτυ Λογάριθμος· ᾧ προσεπανήκει ἀριθμὸς ὁ 51, ἐν τοῖς πίναξι τῷ Λογαρίθμῳ σύςοιχος κείμενος

Ἡ δεῖξις, ἔκτε τῦ β'. προβλήματος καὶ ἐκ τῆς α'. συνεπείας τῦ δὲ τῦ βιβλίυ, ἐπίδηλος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Εὐχρηςοι δὲ μάλιςα οἱ Λογάριθμοι ἐν τοῖς τριγωνομετρικοῖς καὶ ἀςρονομικοῖς ἀναλογισμοῖς, ἐν οἷς ἐκ πολλῶν σύγκεινται οἱ ἀριθμοὶ χαρακτήρων. ἀντὶ γὰρ τῦ πολλαπλασιάσαι συνάπτομεν, καὶ ἀντὶ τῦ διελεῖν ἀφαιρῦμεν, τετέςιν ἀντὶ τῦ πολλαπλασιάσαι δύω ἀριθμὲς, τὲς τέτων Λογαρίθμες ἐν τοῖς Πίναξιν εὑρόντες, συνάπτομεν. ὁ δὲ ἐν τοῖς αὐτοῖς Πίναξι τῷ εὑρεθέντι Ἀθροίσματι σύςοιχος ἀριθμὸς, τὸ Γινόμενον ἐςὶ τῶν δύω εἰρημένων ἀριθμῶν. ἀντὶ δὲ τῦ θάτερον διὰ τῦ ἑτέρυ διελεῖν ἀριθμῦ, τὲς τέτων Λογαρίθμες εὑρόντες, τὸν ἕτερον ἀπὸ τῦ ἑτέρυ ἀφαιρῦμεν. ὁ δὲ τῇ εὑρεθείσῃ διαφορᾷ σύςοιχος ἐν τοῖς Λογαρίθμων Πίναξι κείμενος ἀριθμὸς, τὸ Πηλίκον ἐςὶ τῶν δύω εἰρημένων ἀριθμῶν. ἀλλὰ καὶ τῇ τῶν Ἀλγεβρικῶν προβλημάτων λύσει χρήσιμοι οἱ Λογάριθμοι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Τῶν τὲς Λογαρίθμες, καὶ τὲς ἐπανήκοντας αὐτοῖς ἀριθμὲς περιεχόντων Πινάκων οἱ ὑπὸ τῦ Οὐλὰκ ἐκδοθέντες τῶν ἄλλων προτιμότεροι.

ΒΙΒΛΙΟΥ Ε'.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Περὶ διαφόρων Μεθόδων, ȣ̓ μόνον ταῖς ἐπιςήμαις, ἀλλὰ καὶ τοῖς τὴν ἐμπορίαν μετιȣ̃σι πάνυ χρησίμων.

Περὶ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδȣ.

Α'. **Μέθοδος** τῶν τριῶν ἐςὶν ὁ Κανὼν, δι' ȣ̓ τριῶν δοθέντων ὅρων, τὴν ὁποιανδήποτε ἐμφαινόντων ποσότητα, ὁ τέταρτος ὁ γεωμετρικῶς ἀνάλογος εὑρίσκεται.

Β' **Ὁμοειδεῖς** μὲν ὅροι εἰσὶν οἱ Ἀριθμοὶ, οἱ τὴν αὐτὴν. **Ἑτεροειδεῖς** δὲ, οἱ μὴ τὴν αὐτὴν ἐμφαίνοντες ποσότητα.

Γ'. **Ἐπ' Εὐθείας** οἱ ὅροι τετάχθαι λέγονται, ὅταν οἱ ὁμόλογοι, (ὅρα τὸν ις'. ὁρισμ. τȣ̃ ε'. βιβλ. τῆς Γεωμ.) ὁμοειδεῖς, **Ἀντιπεπονθότως** δὲ, ὅταν ἑτεροειδεῖς ὦσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκέρδησέ τις χρυσᾶ νομίσματα 350, μέτρα σίτȣ 600 πωλήσας, ζητεῖ δὲ εἰδέναι πόσα τῶν αὐτῶν κερδήσει νομισμάτων, 7000 πωλήσας. τȣ́των ȣ̃ν τῶν τριῶν ὅρων δοθέντων τῇ τῶν τριῶν Μεθόδῳ εὑρίσκεται ὁ ζητȣ́μενος τέταρτος. καὶ ὁμοειδεῖς μὲν ὅροι εἰσὶν, ὅ,τε 600 καὶ ὁ 7000, ἅτε δὴ ἑκάτερος αὐτῶν τὸ αὐτὸ ἐμφαίνων, ὅπερ ἐςὶ μέτρα σίτȣ· ἑτεροειδεῖς δὲ, ὅ,τε 350 καὶ ὁ 600. τȣ́των γὰρ ὁ μὲν 350 νομίσματα, ὁ δὲ 600 σίτȣ μέτρα ἐμφαίνει. ἐὰν ȣ̃ν, κληθέντος τȣ̃ ζητȣμένȣ, χ, ταχ-

θῶ

θῶσιν οἱ ὅροι ἔτω· 600 : 350 :: 7000 : χ, ἐπ' εὐθείας τετάχθαι λέγονται· ἐὰν δὲ ἔτω· 600 : 350 :: χ : 7000, ἀντιπεπονθότως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ὅταν ἔν τοιόνδε τι Πρόβλημα προτεθῇ, σκεπτέον πρῶτον ἀκριβῶς τίνι τρόπῳ τακτέον τὲς ὅρες, ἐπ' εὐθείας, ἢ ἀντιπεπονθότως. ἐκ τέτε γὰρ ἡ ἀληθὴς τε Προβλήματος ἤρτηται λύσις. ἐὰν γὰρ ἐχ ὡς δεῖ τὲς ὅρες τάξῃς, ἐδέποτε τὸ ἀληθὲς ζητέμενον εὑρήσεις. περὶ τέτε δὲ ἰτέον, ὅτι ὅταν μὲν τῶν τριῶν δοθέντων ὅρων ὅσον μείζων ἢ ἐλάσσων ᾖ ὁ ἕτερος τῶν ὁμοειδῶν, οἷον τε 350, τοῦ ἑτέρε ὁ 600, τε ἑτεροειδες αὐτῷ, οἷον τε 350, τοσέτον ἀναλόγως καὶ ὁ ἕτερος τῶν ὁμοειδῶν, οἷον ὁ 7000 τε ζητεμένε, τότε ἐπ' εὐθείας τακτέον τὲς ὅρες. ὅταν δὲ ὅσον μείζων ἢ ἐλάσσων ᾖ ὁ ἕτερος τῶν ὁμοειδῶν τε ὁμοειδες αὐτῷ, τοσέτον ἀναλόγως καὶ ὁ ζητέμενος τε ἑτέρε τε ὁμοειδες αὐτῷ, τότε ἀντιπεπονθότως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

Πωλήσας τὶς μέτρα κριθῆς 50, ἐκτήσατο νομίσματα 350, ζητεῖ δὲ πόσα νομίσματα κτήσεται, μέτρα κριθῆς πωλήσας 460.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Κάλεσον τὸν ζητέμενον ἀριθμὸν χ. καὶ ἐπεὶ ὅσον ἐλάσσων ὁ τῶν μέτρων τῆς κριθῆς ἀριθμὸς 50 τε ἀριθμε τῶν ποριωθέντων ἤδη νομισμάτων 350, τοσέτον ἀναλόγως ἐλάσσων ἐςὶ καὶ ὁ τῶν πωληθησομένων μέτρων τῆς κριθῆς ἀριθμὸς 460 τε ἀριθμε τῶν ποριωθησομένων νομισμάτων, εἴτεν τε ζητεμένε ἀριθμε χ, τάξον ἐπ' εὐθείας τὲς ὅρες ἔτω· 50 : 350 :: 460 : χ.

πολλαπλασιάσας δὲ τὰς δύω μέσας, τουτέστι τὸν 350 ἐπὶ τὸν 460, τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον 161000 διὰ τοῦ πρώτου 50 δίελε. λέγω ὅτι τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτον Πηλίκον ἐστὶν ὁ ζητούμενος, ἤτουν ὁ $\chi = \frac{161000}{50} = 3220$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς $50 : 350 :: 460 : \chi$. τὸ ἄρα ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων, (κατὰ τὴν ς'. τοῦ ε'. βιβλ. τῆς Γεωμ.) τουτέστι $350 . 460 = 50 . \chi$. ἑκατέρου δὲ τούτων διὰ τοῦ 50 διαιρεθέντος, ἔσεται $\chi = 3220$, ὅπερ ἐστὶν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἴσος τῷ Πηλίκῳ τοῦ Γινομένου ἐκ τῶν μέσων, διὰ τοῦ πρώτου διαιρεθέντος.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ δοθέντων τῶν κτηθέντων χρημάτων 350, καὶ 3220, καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν μέτρων ἀριθμοῦ 50, εὑρεθήσεται ὁ ἕτερος τῶν μέτρων ἀριθμὸς χ, ταχθείσης δηλονότι τῆς ἀναλογίας οὕτω· $350 : 50 :: 3220 : \chi$. ἔσεται γὰρ $350 . \chi = 50 . 3220$. ἤτοι $\chi = \frac{50 . 3220}{350} = 460$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Ἱμάτιόν τις ἔχων ἐξ 8 συγκείμενον πηχῶν, ὧν ἑκάστου τὸ πλάτος $\frac{3}{4}$ πήχεως, ὑποεργάσαι ἐν αὐτῷ βούλεται ὀθόνην, πλάτος ἔχουσαν ἴσον πήχει, ζητεῖ οὖν πόσοι πήχεις ὀθόνης εἰσὶν ἀναγκαῖοι.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Καλείσθω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. καὶ ἐπεὶ ὅσον ἔλασσον τῶν δοθέντων πήχεων τὸ πλάτος $\frac{3}{4}$ τοῦ τῆς ὀθόνης πλάτους 1, τοσοῦτον ἀναλόγως καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν τῆς ὀθόνης πήχεων χ τῶν δοθέντων 8 πη-