ὅτι τὸ Β τὸ οὕτω συγκροτούμενον, τὸ ζητούμενον Κλάσμα ἐστί. (Β) $\frac{1}{2}$

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν Α εἰς 8 τὴν μονάδα διῃρημένην σημαίνει μέρη, ἀφ' ὧν τὰ 4, εἴτουν τὸ ἥμισυ εἴληπται. τὸ δὲ Β εἰς 2, ἀφ' ὧν τὸ 1 ἐλήφθη (κατὰ τὸν Β΄, καὶ Γ΄ ὁρισ.) ὅ ἐστι τὸ τῆς αὐτῆς μονάδος ἥμισυ. ἴσον ἄρα τῷ Α τὸ Β. συγκεκρότηται δὲ καὶ ἐκ τῶν ὧν ἔνεστιν ἐλαχιστοτέρων ἀριθμῶν. τὸ Β ἄρα ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Χρήσιμος ἡ τοῦ δε τοῦ προβλήματος λύσις πρὸς σαφεστέραν ὧν τὸ Κλάσμα ἐμφαίνει γνῶσιν. οἷον τὸ μὲν ὑπὸ τοῦ Γ ἐμφαινόμενον, δύσληπτον· τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῷ Δ, εὔληπτον· ὡσαύτως τὸ μὲν ὑπὸ τοῦ Ε, δυσνόητον· τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῷ Ζ, εὐνόητον.

(Γ) $\frac{9}{243}$ = (Δ) $\frac{1}{27}$

(Ε) $\frac{192}{448}$ = (Ζ) $\frac{3}{7}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

Τὰ δοθέντα Κλάσματα Α καὶ Β, ὧν οἱ Παρονομασταὶ διάφοροι, ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς ἀγαγεῖν Παρονομαστάς· εἴτουν κλάσματα εὑρεῖν ἴσα τοῖς δοθεῖσι, καὶ τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς ἔχοντα.

(Α) $\frac{2}{3}$ (Β) $\frac{5}{7}$

(Γ) $\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}$ (Δ) $\frac{3\cdot 5}{3\cdot 7}$

(Ε) $\frac{14}{21}$ (Ζ) $\frac{15}{21}$

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἑκατέρου τῶν Κλασμάτων τόν τε Ἀριθμητὴν καὶ Παρονομαστὴν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ ἑτέρου πολλαπλασίασον· οἷον, διὰ τοῦ 7 τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ Β τόν τε ἀριθμητὴν 2, καὶ τὸν Παρονομαστὴν 3 τοῦ Α, ὥστε γενέσθαι

νέσθαι τὸ Γ ἢ τὸ Ε· ὁμοίως διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ Α, ἤτοι τοῦ 3, τόν τε Ἀριθμητὴν 5, καὶ τὸν Παρονομαστὴν 7 τοῦ Β, ὥστε γενέσθαι τὸ Δ ἢ τὸ Ζ. καὶ ἔσαι τὰ Ε καὶ Ζ τὰ ζητούμενα Κλάσματα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ὅ,τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζεται καὶ διαιρεῖται, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ προκύψαν Κλάσμα Ε ἰσοδύναμον τῷ Α, ὡσαύτως καὶ τὸ Ζ τῷ Β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐὰν δὲ τὰ δοθέντα Κλάσματα πλείονα ἢ δύω ᾖ, οἷον τὰ Α, Β, Γ, Δ, ἄγε πρῶτον τὰ Α καὶ Β εἰς τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστὰς, ὡς εἴρηται· εἰς τὸν αὐτὸν δὲ Παρονομαστὴν τῶν Α καὶ Β ἤχθω καὶ τὸ τρίτον Γ. καὶ πάλιν εἰς τὸν παρονομαστὴν τῶν τριῶν Α, Β, Γ ἤχθω καὶ τὸ τέταρτον Δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ποίει, ἐὰν ἄλλα δοθέντα ὦσι κλάσματα.

$$(\mathrm{A})\ \frac{2}{3}\quad(\mathrm{B})\ \frac{5}{7}\quad(\Gamma)\ \frac{3}{5}\quad(\Delta)\ \frac{2}{9}$$

$$(\mathrm{A})\ \frac{2.7}{3.7}\quad(\mathrm{B})\ \frac{3.5}{3.7}\quad(\Gamma)\ \frac{3}{5}$$

$$(\mathrm{A})\ \frac{2.\ 7.\ 5}{3.\ 7.\ 5}\quad(\mathrm{B})\ \frac{3.\ 5.\ 5}{3.\ 7.\ 5}$$

$$(\Gamma)\ \frac{3.\ 7.\ 3}{3.\ 7.\ 5}\quad(\Delta)\ \frac{2}{9}$$

$$(\mathrm{A})\ \frac{2.\ 7.\ 5.\ 9}{3.\ 7.\ 5.\ 9}\quad(\mathrm{B})\ \frac{3.\ 5.\ 5.\ 9}{3.\ 7.\ 5.\ 9}$$

$$(\Gamma)\ \frac{3.\ 7.\ 3.\ 9}{3.\ 7.\ 5.\ 9}\quad(\Delta)\ \frac{2.\ 3.\ 7.\ 5}{3.\ 7.\ 5.\ 9}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτων δῆλον, ὅτι εἰς τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστὰς ἀχθήσονται πολλὰ ὄντα τὰ δοθέντα Κλάσματα, ἐὰν ὅ, τε Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς ἑνὸς ἑκάστου διὰ πάντων τῶν Παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν Κλασμάτων πολλαπλασιασθῇ.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὰ δοθέντα ὁμογενῆ Κλάσματα Α, Β, Γ συνάψαι, ἤτουν Κλάσμα εὑρεῖν ἴσον τοῖς δοθεῖσι.

$$(\mathrm{A})\,\frac{1}{9}+(\mathrm{B})\,\frac{5}{9}+(\Gamma)\,\frac{2}{9}=(\Delta)\,\frac{8}{9}$$

$$(\mathrm{E})\,\frac{1}{2}+(\mathrm{Z})\,\frac{2}{3}+(\mathrm{H})\,\frac{4}{5}$$

$$(\Theta)\,\frac{15}{30}+(\mathrm{I})\,\frac{20}{30}+(\mathrm{K})\,\frac{24}{30}=(\Lambda)\,\frac{59}{30}=(\mathrm{M})\,1+\frac{29}{30}$$

ΠΡΑΚΤΕΑ

Ἐὰν μὲν τὰ δοθέντα Κλάσματα τοὺς αὐτοὺς ἔχῃ Παρονομαστάς, ὡς τὰ Α, Β, Γ, πάντων τοὺς Ἀριθμητὰς συνάψας, τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν 9 ὑπὸ τὸ Κεφάλαιον 8 γράψον· καὶ ἔσται τὸ οὕτω συγκροτούμενον Κλάσμα Δ τὸ ζητούμενον. ἐὰν δὲ οἱ τούτων Παρονομασταὶ διάφοροι ὡς οἱ τῶν Ε, Ζ, Η, εἰς τοὺς αὐτοὺς μὲν Παρονομαστὰς τὰ Κλάσματα ἀνάγαγε, ὥστε γενέσθαι τὰ Θ, Ι, Κ· τὰ δὲ λοιπά, ὡς εἴρηται, ποίησον. οὕτω μὲν ἐν προκύψει τὸ ζητούμενον Κλάσμα Λ, ὅπερ ἴσον τῷ Μ.

Ἡ δεῖξις ἔκ τε τῆς πράξεως, καὶ τοῦ α. προβλ. τοῦ α. βιβλ. δήλη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῶν συναπτομένων Κλασμάτων τὸ Κεφάλαιον ἐνίοτε μὲν κλάσμα γνήσιόν ἐστιν· ἐνίοτε δὲ, νόθον· ἐνίοτε δὲ, μονάς, ἢ μονάδες ὁλόκληροι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ.

Δύο Κλασμάτων ὁμογενῶν δοθέντων τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τοῦ μείζονος Α τὸν ἐλάσσονα Β ἀφελεῖν.

$$(\mathrm{A})\,\frac{5}{7}-(\mathrm{B})\,\frac{2}{7}=(\Gamma)\,\frac{3}{7}$$

$$(\Delta)\,\frac{3}{5}-(\mathrm{E})\,\frac{7}{15}$$

$$(\zeta)\,\frac{45}{75}-(\mathrm{H})\,\frac{35}{75}=(\Theta)\,\frac{10}{75}$$

ΠΡΑΚΤΕΑ

Ἐὰν μὲν τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστὰς τὰ Κλάσματα ἔχῃ, ὡς τὰ Α, καὶ Β, ἀπὸ τοῦ Ἀριθμητοῦ 5 τοῦ μείζονος, τὸν 2 τὸν τοῦ ἐλάσσονος Β ἀφελών, ὑπὸ τὸ λοιπὸν 3 τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν 7 γράψον· καὶ ἔσται τὸ προκύψαν Κλάσμα Γ ἡ τῶν δοθέντων Α καὶ Β Διαφορά. Ἐὰν δὲ διαφόρους, ὡς τὰ Δ, Ε, εἰς τοὺς αὐτοὺς μὲν ἀνάγαγε Παρανομαστὰς, ὥστε γενέσθαι τὰ Ζ, Η, τὰ δὲ λοιπὰ ὡς εἴρηται ποίησον. καὶ ἔσται τὸ Θ τὸ ζητούμενον Κλάσμα.

Ἡ δεῖξις ἔκ τε τῆς πράξεως, καὶ ἐκ τοῦ γ'. προβλ. τοῦ 1. βιβλ. δήλη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

$$(\mathrm{I})\ \frac{7}{5} -\!- (\mathrm{K})\ \frac{1}{3} -\!- (\Lambda)\ \frac{2}{5} -\!- (\mathrm{M})\ \frac{3}{7}$$

$$(\mathrm{K}) -\!- \frac{1}{3}\ (\Lambda) -\!- \frac{2}{5}\ (\mathrm{M}) -\!- \frac{3}{7} = (\mathrm{N}) -\!- \frac{122}{105}$$

$$(\mathrm{I})\ \frac{7}{5} -\!- (\mathrm{N})\ \frac{122}{105} = (\Xi)\ \frac{125}{525}$$

Ἐὰν τὰ ἀπὸ τοῦ δοθέντος Κλάσματος Ι ἀφαιρεθησόμενα πολλὰ ᾖ, οἷον τὰ Κ, Λ, Μ, ταῦτα πάντα συνάψας (κατὰ τὸ γ' προβλ.) τὸ Κεφάλαιον Ν. ἀπὸ τοῦ Ι ἄφελε· τὸ δὲ λοιπὸν Ξ ἔσται ἡ ζητουμένη Διαφορά.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Ἐὰν μὲν τὰ δοθέντα Κλάσματα Γνήσια ᾖ, ἡ τούτων Διαφορὰ Γνήσιον Κλάσμα ἔσται· ἐὰν δὲ Νόθα, ὁτὲ μὲν Νόθον, ὁτὲ δὲ μονὰς, ἢ μονάδες ὁλόκληροι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Τὸ δοθὲν Κλάσμα Α διὰ τοῦ δοθέντος Β πολλαπλασιάσαι.

$$(\mathrm{A})\ \frac{1}{2}\ (\mathrm{B})\ \frac{1}{3} = (\Gamma)\ \frac{1}{6}$$

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Πολλαπλασιαστέου Α διὰ τοῦ Ἀριθμητοῦ τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ Β πολλαπλασιάσας, ὡσαύτως καὶ τὸν Παρονομαστὴν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, κἂν ὁποιοιδήποτε οἱ Παρονομασταὶ ὦσιν, ὑπὸ τὸ Γινόμενον τῶν Ἀριθμητῶν 1, τὸ τῶν Παρονομαστῶν 6 γράψον. ἔσται δὲ τὸ οὕτω προκύπτον Κλάσμα Γ τὸ Γινόμενον ἐκ τῶν δοθέντων Α καὶ Β Κλασμάτων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μονὰς πρὸς τὸν Πολλαπλασιαστέον λόγον ἔχει, ὃν ὁ Πολλαπλασιαστὴς πρὸς τὸ Γινόμενον. (κατὰ τὴν συνέπ. τοῦ ε' ὁρισμ. τοῦ α'. βιβλ.) ἐὰν ἄρα ὁ Γ τὸ Γινόμενον ᾖ τῶν Α καὶ Β, ἔσται ὡς $1 : \frac{1}{2} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$. ἀλλὰ τοῦτο ἀληθὲς ὡς δῆλον. ὁ Γ ἄρα τὸ Γινόμενόν ἐστι τῶν Α καὶ Β.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τοσάκις λαμβάνεται ὁ πολλαπλασιαστέος ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ. (κατὰ τὸν ς'. ὁρισμ. τοῦ α'. βιβλ.) ἔστι δὲ ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ Β ἓν τριτημόριον τῆς μονάδος. ἓν ἄρα τριτημόριον τοῦ Πολλαπλασιαστέου Α, ἤτουν τοῦ ἡμίσεος τῆς μονάδος, ἐστὶ τὸ Γινόμενον τῶν Α καὶ Β. ἀλλ' ὁ Γ, ἤτοι ἓν ἑκτημόριον τῆς ὅλης μονάδος, ἓν τριτημόριόν ἐστι τοῦ Α, τουτέστι τοῦ τῆς μονάδος ἡμίσεος. ὁ Γ ἄρα ἐστὶν ὁ ζητούμενος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Ἐὰν τὰ δοθέντα Κλάσματα πλείονα ἢ δύω ᾖ· οἷον τὰ Α, Β, Γ, Δ, τὸ ἐκ τῶν δύω Α καὶ Β Γινόμενον Ε διὰ τοῦ τρίτου Γ πολλαπλασια-

$$(\text{A})\ \frac{1}{2}.\ (\text{B})\ \frac{2}{3}.\ (\Gamma)\ \frac{3}{5}.\ (\Delta)\ \frac{5}{7}$$

$$(\text{A})\ \frac{1}{2}.\ (\text{B})\ \frac{2}{3} = (\text{E})\ \frac{2}{6}.\ (\Gamma)\ \frac{3}{5} =$$

$$(\text{Z})\ \frac{6}{30}.\ (\Delta)\ \frac{5}{7} = (\text{H})\ \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

σον,

σον, κ͵ τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον Ζ διὰ τȣ̃ τετάρτȣ Δ, καὶ ὅτως ἐφεξῆς. καὶ ἔςαι τὸ Η τὸ ἐκ πάντων παραχθέν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Τῶν Κλασμάτων Γνησίων μὲν ὄντων, τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον Γνήσιόν τε Κλάσμα ἐςὶ καὶ ἑκάςȣ τῶν πολλαπλασιαζομένων ἔλαττον· Νόθων δέ τινων, καί τινων γνησίων, ὁτὲ μὲν νόθον, ὁτὲ δὲ γνήσιον, ἐνίοτε δὲ καὶ μονὰς, ἢ μονάδες ὁλόκληροι· καὶ ὁτὲ μὲν μεῖζον, ὁτὲ δὲ ἔλαττον ἑκάςȣ τῶν πολλαπλασιαζομένων· Νόθων δὲ μόνον, νόθον ἀεὶ, ἐνίοτε δὲ μονὰς, ἢ μονάδες ὁλόκληροι, ἑκάςȣ δὲ τῶν πολλαπλασιαζομένων μεῖζον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'.

Τὸ δοθὲν Κλάσμα Α διὰ τȣ̃ δοθέντος Β διελεῖν.

$$(\mathrm{A})\ \frac{1}{2} : (\mathrm{B})\ \frac{1}{3}$$

$$(\mathrm{A})\ \frac{1}{2}.\ (\Gamma)\ \frac{3}{1} = (\Delta)\ \frac{3}{2}$$

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τὸν Διαιρέτην Β ἀναποδίσας, ὥςε τὸν μὲν Ἀριθμητὴν, Παρονομαςὴν γενέσθαι· τὸν δὲ Παρονομαςὴν, Ἀριθμητὴν, τὸ ὅτω πρoκύψαν Κλάσμα Γ διὰ τȣ̃ Διαιρετέȣ Α πολλαπλασίασον. καὶ ἔςαι τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον Δ, τὸ ἐκ τῶν Α καὶ Β προϊὸν Πηλίκον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μονὰς πρὸς τὸ Πηλίκον, ὅτως ὁ Διαιρέτης πρὸς τὸν Διαιρετέον. (κατὰ τὴν συνέπ. τὴν μετὰ τὸν ϛ'. ὁρισμ. τȣ̃ α'. Βιβλ.) ἐὰν ἄρα τὸ Δ, τὸ Πηλίκον ᾖ, ἔςαι ὡς $1 : \frac{3}{2} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$. ἀλλὰ τȣ̃το ἀληθές. ὁ Δ ἄρα τὸ Πηλίκον $\frac{3}{2}$ ἐςίν.

Ἵνα δὲ εὔδηλον ᾖ, ὅτι $1 : \frac{3}{2} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, γεγονέτω ἐναλλὰξ ὡς $1 : \frac{1}{3} :: \frac{3}{2} : \frac{1}{2}$. καὶ ἐπεὶ $1 : \frac{1}{3} :: 3 : 1$. καὶ $\frac{3}{2} : \frac{1}{2} :: 3 : 1$. ἔστι δὲ ὡς $3 : 1 :: 3 : 1$. ἄρα καὶ $1 : \frac{1}{3} :: \frac{3}{2} : \frac{1}{2}$, (κατὰ τὴν ε΄ πρότ. τοῦ ε΄ βιβλ. τῆς Γεωμ.) εἶτουν $1 : \frac{3}{2} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$.

ΑΛΛΩΣ.

Τὸ Πηλίκον ἐμφαίνει ποσάκις τὸν Διαιρέτην ὁ Διαιρετέος περιέχει. (κατὰ τὸν ς΄ ὁρισ. τοῦ α΄. βιβλ.) ἀλλὰ τὸ Πηλίκον $\frac{3}{2}$ ἤτοι $1 + \frac{1}{2}$ δηλοῖ ποσάκις ὁ Διαιρετέος $\frac{1}{2}$ τὸν Διαιρέτην $\frac{1}{3}$ περιέχει. δῆλον γάρ, ὡς ἅπαξ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ περιέχει. τὸ $\frac{3}{2}$ ἄρα τὸ ζητούμενον Πηλίκον ἐστί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τῶν Κλασμάτων εἴτε Γνησίων ὄντων ἑκατέρων, εἴτε Νόθων, ἢ τοῦ μὲν, Νόθου, τοῦ δὲ, Γνησίου, τὸ Πηλίκον Νόθον ἔσται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄.

Τὸ δοθὲν Κλάσμα Α τῷ δοθέντι ὁλοκλήρῳ Β συντιθέναι, ἢ ἀπ' αὐτοῦ ἀφελεῖν, ἢ δι' αὐτοῦ πολλαπλασιάσαι, ἢ διελεῖν.

$$(A)\ \frac{2}{5} \qquad (B)\ 3$$

$$(A)\ \frac{2}{5} + (B)\ \frac{3}{1}$$

$$(A)\ \frac{2}{5} + (B)\ \frac{15}{5} = (\Gamma)\ \frac{17}{5}$$

$$(B)\ \frac{15}{5} - (A)\ \frac{2}{5} = (\Delta)\ \frac{13}{5}$$

ΠΡΑΚΤΕΑ.

$$(A)\ \frac{2}{5}.\ (B)\ \frac{3}{1} = (E)\ \frac{6}{5}$$

$$(A)\ \frac{2}{5}.\ (B)\ \frac{1}{3} = (Z)\ \frac{2}{15}$$

Γεγράφθω ἡ μονὰς ὑπὸ τὸν ὁλόκληρον Β. οὕτω μὲν γὰρ ὁ ὁλόκληρος εἰς Νόθον

Κλάσ-

Κλάσμα μεταποιηθήσεται. (κατὰ τὸν δ'. ὁρισμ. τᾶ δὲ τᾶ βιβλ.) εἰ μὲν ἂν ἐπισυνάψαι δεήσει τῷ ὁλοκλήρῳ Β τὸ Κλάσμα Α, τὰ ἐν τῷ γ'. προβλήματι τᾶδε τᾶ βιβλία ποίησον· καὶ ἔσαι τὸ Κεφάλαιον τέτων τὸ Γ· εἰ δ' ἀφελεῖν, τὰ ἐν τῷ δ'. ἡ δὲ Διαφορὰ ἔσαι τὸ Δ· εἰ δὲ πολλαπλασιάσαι, τὰ ἐν τῷ ε'. καὶ τὸ Γινόμενον ἔσαι τὸ Ε· εἰ δὲ διελεῖν, τὰ ἐν τῷ ς'. καὶ τὸ Πηλίκον ἔσαι τὸ Ζ. δεῖξεις δὲ τὰ εὑρεθέντα εἶναι τὰ ζητέμενα, ὡς καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις προβλήμασι δέδεικται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η.

Τὰς δοθέντας ἀριθμὰς Α καὶ Β, τὰς ἐξ ὁλοκλήρων καὶ Δεκαδικῶν συγκειμένας, ἐπισυνάψαι.

(Α) 25. 4670 (Β) 8. 569.

(Α)	25. 4670
(Β)	8. 569
(Γ)	34. 0360

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τετάχθωσαν οἱ δοθέντες Α καὶ Β, ὥστε τὰς χαρακτῆρας ὑπὸ τὰς αὐτοῖς ἰσοδυνάμες κεῖσθαι. καὶ τῶν ἐν τῷ α'. προβλήματι τᾶ α'. βιβλία γενομένων, ὁ Γ ἔσαι τὸ ζητέμενον Κεφάλαιον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅτι ὁ Γ τὸ ζητέμενον Κεφάλαιόν ἐσι, δῆλον ἐκ τῶν ἐν τῷ προδιαληφθέντι προβλήματι εἰρημένων. δέκα γὰρ μονάδες τῶν ἐλασσόνων μιᾷ τῶν μειζόνων ἴσαι, κατὰ τὴν μετὰ τὰς ὁρισμὰς τᾶ δε τᾶ βιβλία συνέπειαν·

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Δύω ἀριθμῶν τῶν Α καὶ Β δοθέντων, τῶν ὁλοκλήρας καὶ

(Α) 58. 2745 (Β) 36. 985

(Α)	58. 2745
(Β)	36. 985
(Γ)	21. 2895

δεκαδικὰ περιεχόντων, ἀπὸ τῦ μείζονος Α τὸν ἐλάσσονα Β ἀφελεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τετάχθωσαν οἱ δοθέντες Α καὶ Β καθάπερ καὶ ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι. καὶ τῶν ἐν τῷ β'. προβλήματι τῦ α'. βιβλίυ γεγονότων, ἔςαι, ὡς δῆλον, ὁ Γ ὁ ζητυμένη Διαφορά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν Α διὰ τῦ δοθέντος Β πολλαπλασιάσαι, ἑκατέρυ ὁλοκλήρυς καὶ δεκαδικὰ περιεχοντος.

(Α) 2. 32. (Β) 3. 5

(Α) 232
(Β) 35.

(Γ) 8. 120.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Τετάχθωσαν οἱ πολλαπλασιαθησόμενοι Α καὶ Β, ὡς ἐτάχθησαν ἄν, εἰ μόνυς ὁλοκλήρων δηλωτικὺς περιεῖχον χαρακτῆρας. καὶ γενομένων τῶν ἐν τῷ γ', προβλήματι τῦ α'. βιβλίυ ἐπιταχθέντων, ἀπὸ τῶν χαρακτήρων τῦ Γινομένυ Γ εἰλήφθωσαν δεξιόθεν χαρακτῆρες ὑπὲρ τῶν δεκαδικῶν τοσῦτοι, ὅσοι εἰσὶν οἱ τὺς δεκαδικὺς δηλῦντες ἐν τοῖς πολλαπλασιαθεῖσιν Α καὶ Β, εἴτυν τρεῖς. καὶ ἔςαι ὁ ὕτω ςιχθεὶς Γ τὸ ζητύμενον Γινόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ τὺς πολλαπλασιαθησομένυς Α καὶ Β κατὰ τὸν προκείμενον γράψας τρόπον,

$$(\text{Α})\ \overline{2+\frac{3}{10}+\frac{2}{100}}.\qquad (\text{Β})\ \overline{3+\frac{5}{10}}$$

ὡς ἐν τῷ ε καὶ ζ'. προβλήματι εἴρηται πολλαπλασιάσῃς, τὸ αὐτὸ Γινόμενον Γ παραχθήσεται.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ΄.

Δύω ἀριθμῶν δοθέντων τῶν Α ϗ Β, τῶν ἐξ ὁλοκλήρων ϗ δεκαδικῶν συγκειμένων, τὸν μείζονα Α διὰ τȣ̃ ἐλάσσονος Β διελεῖν.

(Α) 1. 44 : (Β) 1. 2
(Α) 144 (Β) |12
(Γ) 1. 2

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Γεγράφθωσαν οἱ διαιρεθησόμενοι Α ϗ Β, ὡς ἐγράφησαν ἄν, εἰ μόνον ὁλοκλήρων δηλωτικȣ̀ς περιεῖχον χαρακτῆρας. ϗ γενομένων τῶν ἐν τῷ δ΄. προβλήματι τȣ̃ α΄. βιβλίȣ ἐπιταχθέντων, ἀπὸ τῶν χαρακτήρων τȣ̃ Πηλίκȣ Γ σεσημειώσθωσαν δεξιόθεν τοσȣ̃τοι χαρακτῆρες ὑπὲρ τῶν δεκαδικῶν, ὅσοι τὴν Διαφορὰν ἐμφαίνȣσι τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων τȣ̃ τε Διαιρετέȣ Α ϗ τȣ̃ Διαιρέτȣ Β. οἷον, ἐπεὶ δύω χαρακτῆρες τῶν δεκαδικῶν δηλωτικοὶ ἐν τῷ Διαιρετέῳ Α, καὶ εἷς ἐν τῷ Β, ϗ ἡ Διαφορὰ εἷς, ἐν τῷ Πηλίκῳ Γ εἷς ὑπὲρ τῶν δεκαδικῶν σεσημειώσθω. ϗ ἔςαι τὸ ὕτως ἐςιγμένον Πηλίκον Γ, τὸ ζητȣ́μενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

(Α) $\overline{1 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100}}$: (Β) $\overline{1 + \frac{2}{10}}$

Ἐὰν γὰρ τὸν Α ϗ Β ὡς ὧδε πρόκειται γράψας, ὡς ἐν τῷ ϛ΄ ϗ ζ΄ προβλήματι εἴρηται διέλῃς, τὸ προσὸν Πηλίκον ἴσον τῷ Γ ἔςαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὰ ἐν τῷ ι ϗ ιά προβλήματι πραττόμενα τὴν εὐχέρειαν σκοπȣ̃σι ϗ συντομίαν. ϗ γὰρ λίαν ἐπίμοχθον τȣ̀ς ὁλοκλήρȣς ϗ δεκαδικὰ περιέχοντας ἀριθμȣ̀ς, ὡς ἐν ταῖς δείξεσι τῶν προβλημάτων εἴρηται γράφειν, ἐφ' ὗτα πολλαπλασιάζειν, ἢ διαιρεῖν.

ΒΙΒΛΙΟΥ Γ'

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Ἐξ Ἀριθμοῦ τινὸς ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος ὁ γινόμενος, Τετράγωνος λέγεται· ὁ δὲ ληφθεὶς ἀριθμὸς, Πλευρὰ, ἢ Ῥίζα τετραγωνική. οἷον τοῦ 5 τετράγωνος ὁ 25· τοῦ δὲ 25 ῥίζα τετραγωνικὴ ὁ 5. ὡσαύτως τοῦ 36 τετράγωνος ὁ 1296· τοῦ δὲ 1296 ῥίζα τετραγωνικὴ ὁ 36, καὶ τοῦ $\frac{8}{9}$ τετράγωνος ὁ $\frac{64}{81}$· τοῦ δὲ $\frac{64}{81}$ τετραγωνικὴ ῥίζα ὁ $\frac{8}{9}$.

Β'. Ἐκ Τετραγώνου ἐπὶ τῆς ἑαυτοῦ ῥίζης πολλαπλασιασθέντος ὁ γινόμενος, Κύβος καλεῖται τοῦ ἀπ' ἀρχῆς ληφθέντος· ὁ δ' ἀπ' ἀρχῆς ληφθεὶς, Κυβικὴ ῥίζα. οἷον τοῦ 5 Κύβος ὁ 125· τοῦ δὲ 125 κυβικὴ ῥίζα ὁ 5· ὁμοίως τοῦ 36 Κύβος ὁ 46656 τοῦ δὲ 40656 κυβικὴ ῥίζα ὁ 36. καὶ τοῦ $\frac{8}{9}$ Κύβος ὁ $\frac{512}{729}$ τοῦ δὲ $\frac{512}{729}$ κυβικὴ ῥίζα ὁ $\frac{8}{9}$.

Γ'. Ἐκ Κύβου ἐπὶ τῆς ἑαυτοῦ ῥίζης πολλαπλασιασθέντος ὁ γινόμενος, τετάρτη Δύναμις λέγεται τοῦ ἀπ' ἀρχῆς ληφθέντος, εἴτουν τῆς ῥίζης· αὕτη δὲ, τετάρτης Δυνάμεως ῥίζα· γενικῶς δὲ Δυνάμεις καλοῦνται τὰ ἐξ ἴσων ἀριθμῶν γινόμενα. Δευτέρα μὲν δύναμις, εἰ δὶς ὁ παράγων ληφθείη· Τρίτη δὲ, εἰ τρίς· Τετάρτη δὲ, εἰ τετράκις, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. οἷον τοῦ ἀριθμοῦ 2 δευτέρα μὲν δύναμίς ἐστι 2. 2 ἤτοι 4· τρίτη, 2. 2. 2, εἴτουν 8· τετάρτη, 2. 2. 2. 2,

τα.

τετέςι 16· πέμπτη, 2. 2. 2. 2. 2, ὅ ἐςι 32, κ̀ ὅτως ἐφεξῆς. αὐτὸς δὲ ὁ 2 πρὸς μὲν τὴν δευτέραν τῶν δυνάμεων ἀναφερόμενος, ῥίζα δευτέρα λέγεται, πρὸς δὲ τὴν τρίτην, τρίτη, κ̀ ὅτως ἐφεξῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

Τὸν ἐκ τετραγώνε ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντος γινόμενον, οἷον τὸν 16, τὸν ἐκ τῦ 4. 4 οἱ πάλαι (Διόφαντ. ἐν τῷ 1. κ̀ 2. ὁρισμ. τῦ 1. βιβλ.) Δυναμοδύναμιν ἐκάλεν· κ̀ γὰρ κ̀ ὁ τετράγωνος Δύναμις παρ᾽ αὐτῶν ἐλέγετο· τὸν δὲ ἐκ τετραγώνε ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς κύβον πολλαπλασιαθέντος, οἷον τὸν 32, τὸν ἐκ τῦ 4. 8, Δυναμόκυβον· τὸν δὲ ἐκ Κύβε ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος, Κυβόκυβον· τὸν δὲ μηδὲν τῶν ἰδιωμάτων τέτων κτησάμενον, ἔχοντα δὲ ἐν αὐτῷ πλῆθος μονάδων, ἀριθμὸν Ἄλογον.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ. Α΄.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι παντὸς δοθέντος ἀριθμῦ τὸν τέτε τετράγωνον, ἢ τὸν κύβον, ἢ τὴν τετάρτην Δύναμιν, κ̀ τὰς ἐφεξῆς αὐτῦ Δυνάμεις εὑρεῖν πάνυ ῥᾴδιον· ἐχ ὅτω δ᾽ εὐχερὴς κ̀ ἡ ἀπὸ τῶν Δυνάμεων ἐπὶ τὰς ῥίζας ἐπάνοδος. διὸ τὰ ἑπόμενα περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τῦ τετραγώνε ῥίζης σημειωτέον.

Α΄. Ὁ ἐκ τῦ μεγίςε τῶν μοναδικῶν χαρακτῆρος τετράγωνος ἐκ δύω μόνον σύγκειται χαρακτήρων. οἷον ὁ ἐκ τῦ 9, ἤτοι τῦ 8 κ̀ 1. ἔςι γὰρ ὁ 81.

Β΄. Τὸν ὁποιονῦν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς δύω ἀναλύειν ἔξεςι, κ̀ δυσὶν ἴσον ὑπολαμβάνειν. οἷον τὸν $34 = 30 + 4$, ὡσαύτως τὸν $235 = 230 + 5$, κ̀ τὸν $355 = 300 + 55$.

Γ'. Ἐπειδὴ τὸ ἀπὸ τῆς ὡς ἔτυχε τμηθείσης ὅλης εὐθείας τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ἑκατέρων τῶν μερῶν τετραγώνοις σὺν τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ (κατὰ τὴν δ'. πρότ. τοῦ β. βιβλ. τῆς Γεωμ.) τέμνεται δὲ εἰς δύω ὡς ἔτυχε καὶ πᾶς δοθεὶς ἀριθμὸς (κατὰ τὴν προλαβ. σημείωσ.) καὶ παντὸς ἄρα ἀριθμοῦ ὁ τετράγωνος ἴσος τοῖς ἐξ ἑκατέρων τῶν μερῶν αὐτοῦ τετραγώνοις σὺν τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σχ. 2.

Α Γ Β

Ἔστω ἡ μὲν ΑΒ = Τ, ἡ δὲ ΑΓ = α, ἡ δὲ ΓΒ = β. ἄρα Τ = α + β.

ἐὰν ἄρα τό, τε Τ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθῇ, ὡσαύτως καὶ τὸ α + β, ἔσται $T^2 = \alpha^2 + \alpha.\beta + \alpha.\beta + \beta^2$, ἤτοι $T^2 = \alpha^2 + 2\alpha.\beta + \beta^2$. ἔστω τὸ μὲν Τ = 37, τὸ δὲ α = 30, τὸ δὲ β = 7. ἄρα α + β = 30 + 7. ἄρα $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 30^2 + 2.30.7 | 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1369$. Ἀριθμοῦ ἄρα παντὸς εἰς δύω ὡς ἔτυχε διαιρεθέντος, καὶ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ συστάντος, ὁ μὲν ἐν τῷ πρώτῳ δεξιῷ τόπῳ κείμενος χαρακτήρ, οἷον ὁ 9, τοῦ τετραγώνου ἐστὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τῆς ῥίζης αὐτοῦ μερῶν τοῦ ἐν τοῖς δεξιοῖς κειμένου, οἷον τοῦ 7· ὁ δὲ ἐγγὺς δεύτερος, ἤτοι ὁ 6, τοῦ δὶς ὀρθογωνίου τοῦ ἐξ ἑκατέρου τῶν αὐτῶν μερῶν γινομένου, ἤγουν τοῦ τε 30 καὶ τοῦ 7, περιέχει χαρακτῆρας· ἐν δὲ τῷ ἐγγὺς τρίτῳ, ἢ καὶ τετάρτῳ, ἐὰν παρῇ, ὡς ἐπὶ τοῦ προκειμένου παραδείγματος, οἱ τοῦ τετραγώνου χαρακτῆρες τοῦ ἑτέρου τῆς ῥίζης μέρους, τουτέστι τοῦ 30.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐὰν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ Τ τοὺς χαρακτῆρας στίξῃς ἀπὸ τοῦ πρώτου δεξιόθεν ἀρξάμενος, (Τ) 1369 νος, καὶ τὸν ἐγγὺς τοῦ στιχθέντος ἄστικτον καταλιπὼν, τὸν δὲ ἑξῆς τρίτον πάλιν στίξας, καὶ αὖ τὸν πέμπτον, ἐὰν ᾖ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ποιῇς, ἕνα μὲν στίζων, ἕνα δὲ ἄστικτον καταλιμπάνων, τοσοῦτοι ἔσονται οἱ μοναδικοὶ χαρακτῆρες οἱ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δοθέντος ἐμφαίνοντες, ἴσα τὰ ἐγχαραχθέντα στίγματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

Τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἀριθμοῦ Τ τὴν τετραγωνικὴν ἐξαγαγεῖν ῥίζαν.

(Τ)	55225		(Ρ) 235
	4	Α	
4)	15		
	529 . . .	Β	
46)	232		
	55225 . .	Γ	
	00000		

ΠΡΑΚΤΕΑ

1. Στίξον τὸν δοθέντα Τ, ὡς ἐν τῷ πορίσματι εἴρηται. καὶ τὸν μέγιστον τῶν τετραγώνων, τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου ἐν τοῖς ἀριστεροῖς χαρακτῆρος, (ἢ τῶν δύω πρώτων, ἐὰν δύω ὦσι) ἤτουν τοῦ 5, περιεχόμενον, τουτέστι τὸν 4 λαβὼν, τοῦτον μὲν ἀπὸ τοῦ 5 (ἢ ἀπὸ τῶν δύω χαρακτήρων, ἐὰν ὦσιν.) ἄφελε, τὴν δὲ ῥίζαν αὐτοῦ 2 ὁμόστιχον τῷ Ρ γράψον, πρῶτον οὖσαν τῆς ζητουμένης τοῦ Τ ῥίζης χαρακτῆρα.
2. Ὑπὸ τὸν 4 εὐθεῖαν ἀγαγὼν, τὸ ἀπὸ τῆς ἀφαιρέσεως λοιπὸν, ἤτουν τὸ 1, ὑπὸ τὴν γραμμὴν γράψον, καὶ τὸν ἐγγὺς τοῦ 5 ἄστικτον χαρακτῆρα, ἤτουν τὸν 5 καταγαγὼν, τὸ συμπληρούμενον 15 διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος τῆς ῥίζης χαρακτῆρος, ἤτουν διὰ τοῦ 4 δίελε. καὶ ἔσται τὸ προϊὸν πηλίκον 3 ὁ δεύτερος τῆς ζητουμένης ῥίζης χαρακτήρ.

3. Τὸν ἐκ τῶν εὑρεθέντων χαρακτήρων 23 τετράγωνον, τουτέστι τὸν 529 ἀπὸ τῶν τοῦ δοθέντος Τ χαρακτήρων, ἤτοι τῶν 552 ἀφελὼν, καὶ τὸν ἐγγὺς 2 καταγαγὼν, τὸν προκύψαντα 232 διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος 23 δίελε. καὶ ἔσται τὸ πηλίκον 5 ὁ τῆς ζητουμένης ῥίζης τρίτος χαρακτήρ.

4. Τὸν ἐκ τῶν εὑρεθέντων 235 χαρακτήρων τετράγωνον, ἤτοι τὸν 55225 ἀπὸ τοῦ δοθέντος Τ ἄφελε. (ἐὰν ἔτι πλείονες οἱ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τετραγώνου ὦσι χαρακτῆρες, ἃ ἐν τῷ 2 ἢ 3. ἀριθ. εἴρηται ποίει ἕως οὗ πάντας τοὺς τῆς ῥίζης εὕρῃς χαρακτῆρας.) Φημὶ δὴ τὸν οὕτως εὑρεθέντα ἀριθμὸν Ρ τὴν ζητουμένην εἶναι τετραγωνικὴν ῥίζαν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ γὰρ τοῦ Ρ τετραγώνου, εἴτουν τοῦ Γ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος τετραγώνου Τ ἀφαιρεθέντος, τὸ λοιπὸν οὐδέν ἐστιν. ἴσος ἄρα ὁ Γ τῷ Τ. ἀλλ' ἡ τοῦ Γ τετραγωνικὴ ῥίζα ὁ Ρ. ἄρα ὁ Ρ ἐστὶν ἡ τοῦ Τ ζητουμένη τετραγωνικὴ ῥίζα.

ΑΛΛΩΣ

```
     (Τ) 55225        (Ρ) 235
          4 . . . . . Α
4)      152
         12 . . . . Β
           9 . . . Γ
        2325
46)     230 . . . Δ
          25 . . Ε
        0000
```

Μετὰ τὸ διελεῖν διὰ τοῦ 4 τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος, ἤτοι τοῦ 2, τὸν 15, καὶ καταγαγεῖν τὸν 2, τὸν ἐκ τοῦ Γ τετραγώνου, τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ πηλίκου 3 καὶ τοῦ διαιρέτου 4, ἤτοι τὸν 12 σὺν τῷ ἐκ τοῦ αὐτοῦ Πηλίκου τετραγώνῳ, τουτέστι τῷ 9 γράψας ὡς τὰ ἐν τῷ Β καὶ Γ ὁρᾶται, τὸ Κεφάλαιον αὐτῶν ἀπὸ τοῦ 152 ἄφελε. Πάλιν τὸν ἐγγὺς χαρακτῆρα 2 τοῦ τε-

τετραγώνου Τ καταγαγὼν, καὶ τῷ λοιπῷ 23 προσγράψας, ὥστε γενέσθαι τὸν 232, δίελε αὐτὸν διὰ τοῦ διπλασίου τῶν τῆς ῥίζης χαρακτήρων, τουτέστι διὰ τοῦ 46. καὶ τὸν ἐγγὺς τοῦ τετραγώνου Τ χαρακτῆρα 5 καταγαγὼν, τὸ ἐκ τοῦ Πηλίκου 5 καὶ τοῦ Διαιρέτου 46 γινόμενον σὺν τῷ τοῦ αὐτοῦ Πηλίκου 5 τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ 25, ὡς τὰ ἐν τῷ Δ καὶ Ε ὁρᾶται, γράψας, ἀπὸ τοῦ 2325 ἄφελε. ἐὰν δὲ καὶ ἄλλοι ἐν τῷ δοθέντι τετραγώνῳ ὦσι χαρακτῆρες, τὰ αὐτὰ ποίει ἕως οὗ πάντας τοὺς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εὕρῃς χαρακτῆρας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

Ἰστέον, ὅτι τὸ διὰ τῶν ἐν τῷ 2. ἀριθμ. εἰρημένων εὑρισκόμενον Πηλίκον μεῖζόν ἐστιν ἐνίοτε τοῦ τῆς ζητουμένης ῥίζης χαρακτῆρος. ὃ δὴ δῆλον γίνεται ἐκ τοῦ μὴ ἀφαιρεῖσθαι τὸν ἐξ αὐτοῦ τε καὶ τῶν ἄλλων τῆς ῥίζης χαρακτήρων γινόμενον τετράγωνον ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου, οὗ τινος ζητεῖται ἡ ῥίζα. τότε δὲ τοσάκις ἀπὸ τοῦ διαληφθέντος Πηλίκου τὴν μονάδα ἀφαιρετέον, ὁσάκις ἂν ἀπαιτῇ ὁ λόγος, εἴτουν ἕως οὗ ὁ ἐξ αὐτοῦ τε καὶ τῶν ἄλλων τῆς ῥίζης χαρακτήρων γινόμενος τετράγωνος, ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ἀφαιρεθῇ, οὗτινος ζητεῖται ἡ ῥίζα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

Τοῦ δοθέντος κλασματίου ἀριθμοῦ τετραγώνου Α τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν εὑρεῖν. δεῖ δὴ δὲ τόν τε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρωνομαστὴν τοῦ κλάσματος τετραγώνους εἶναι. (Α) $\frac{144}{576}$ (Β) $\frac{12}{24}$

ΠΡΑΚ.