

ΔΕΖ βάσιν, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος. εἰάν δὲ ἦ ὡς ΑΒΓ : ΔΕΖ, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος, ἔσται ἡ ΗΑΒΓ = ΘΔΕΖ. ρ. 13.

## ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Συμπεπληρώθω τὸ ΒΛ, ΕΟ παραλληλεπίπεδα.

## ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΑΒΓ πυραμὶς τῇ ΘΔΕΖ πυραμίδι, (ξ) καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΗΑΒΓ πυραμίδος ἐξαπλάσιον τὸ ΒΛ ἕρξον, τῆς δὲ ΘΔΕΖ τὸ ΕΟ, ἴσον ἄρα τὸ ΒΛ τῷ ΕΟ. ὡς ἄρα ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, ἔτω τὸ ΕΟ ἕρξον τὸ ὕψος, πρὸς τὸ τῷ ΒΛ ἕρξον ὕψος. (ο) ἀλλ' ὡς ΒΜ : ΕΠ :: ΑΒΓ : ΔΕΖ, (π) ὡς ἄρα ΑΒΓ : ΔΕΖ, ἔτω τὸ τῷ ΕΟ ὕψος, πρὸς τὸ τῷ ΕΛ ὕψος. (ρ) ἀλλὰ τὸ μὲν τῷ ΕΟ ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τῷ ΒΛ τῷ τῆς ΗΑΒΓ. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις, πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος.

## ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπεὶ ὡς ΑΒΓ : ΔΕΖ, ἔτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος. (σ) ἐστὶ δὲ ὡς ΑΒΓ : ΔΕΖ :: ΒΜ : ΕΠ. (τ) καὶ τὰ τῶν πυραμίδων δὲ ὕψη τὰ αὐτὰ εἰσι τοῖς τῶν παραλληλεπιπέδων ἄρα ὡς ΒΜ : ΕΠ, ἔτω τὸ τῷ ΕΟ ὕψος, πρὸς τὸ τῷ ΒΛ. (υ) ἴσον ἄρα τὸ ΒΛ τῷ ΕΟ. (φ) καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα ΗΑΒΓ = ΘΔΕΖ. ἔκτον γὰρ μέρος τῶν παραλληλεπιπέδων εἰσὶν αἱ πυραμίδες.

ΠΟ.

(ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὴν λδ. τῷ ια. (π) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. καὶ τὴν η. τῷ ε. (ρ) Κατὰ τὴν ε. τῷ ε. (σ) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν λδ. τῷ α. καὶ τὴν ε. τῷ ε. (υ) Κατὰ τὴν η. τῷ ε. (φ) Κατὰ τὸ λδ. τῷ ια.

## ΠΡΙΣΜΑ.

Δῆλον δὲ, ὅτι τὰ αὐτὰ καὶ ταῖς πολυγώνους ἔχου-  
σαι βάσεις πυραμίσιν ἀνήκει.

## ΛΗΜΜΑ Δ΄.

Τῶν πρισμαίων τῶν πολυγώνους ἔχόντων  
βάσεις, καὶ ἐγγεγραμμένων ἢ περιγεγραμ-  
μένων περὶ τῆς κυλινδρῆς αἰ μὲν ἐπιφάνεια  
εἰς τὰς τῶν κυλινδρῶν ἐπιφάνειας ἀπολή-  
γασιν, αὐτὰ δὲ τὰ πρίσματα εἰς τῆς κυλί-  
νδρῆς τῶν δὲ πυραμίδων, τῶν πολυγώνους  
βάσεις ἔχουσιν, καὶ ἐγγεγραμμένων ἢ περι-  
γεγραμμένων περὶ τῆς κώνου, αἰ μὲν ἐπιφά-  
νεια εἰς τὰς τῶν κώνων ἐπιφάνειας, αὐτὴ  
δὲ αἰ πυραμίδες εἰς τῆς κώνου ἀπολήγασιν.

## ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν τῆς πρισμαίου βάση, πολύγωνος ἔσται, εἰς  
τὴν τῆς κυλινδρῆς βάση, κύκλον ἔσται, ἀπολήγει τὸ δὲ  
ἀπ' ἐναντίον τῆς βάσεως τῆς πρισμαίου πολύγωνον, εἰς  
τὴν ἀπεναντίον τῆς βάσεως τῆς κυλινδρῆς κύκλον. (χ)  
καὶ αἱ πλευραὶ ἄρα τῆς πρισμαίου εἰς τὰς τῆς κυλί-  
νδρῆς πλευρὰς ἀπολήγασιν, καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια εἰς ὅλην  
τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ αὐτὸ τὸ πρίσμα εἰς τὸν κύλινδρον.

Ἡ μὲν τῆς πυραμίδος βάση, πολύγωνος ἔσται, εἰς τὴν  
τῆς κώνου βάση, κύκλον ἔσται, ἀπολήγει (ψ) ἡ δὲ κορυφὴ  
αὐτῆς τῆς κορυφῆς τῆς κώνου ταυτίζεται. καὶ αἱ τῆς πυραμίδος  
ἄρα πλευραὶ εἰς τὰς τῆς κώνου ἀπολήγασιν, καὶ ὅλη ἡ ἐπιφά-  
νεια εἰς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ αὐτὴ ἡ πυραμὶς εἰς τὸν  
κώνον.

## Π 5

## ΠΟ-

(χ) Κατὰ τὸ α. λήμ. τὸ μετὰ τὴν α. πρότ. τῆς ιβ. (ψ) Κατὰ  
τὸ αὐτὸ λήμ.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῆς φανερῆς τῷ τρόπῳ ὅ, τε κύλινδρος καὶ ὁ κῶνος καταμετρεῖθήσεται. ὁ μὲν δῆθεν, πολλαπλασιασθέντος τῆ ὕψους αὐτῆ διατῆς βάσεως. (α) ὁ δὲ, τῆς τριτημορίου τῆ ὕψους διατῆς βάσεως πολλαπλασιασθέντος, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ τῆ ὕψους διατῆς βάσεως πολλαπλασιασθέντος, καὶ τῆς τριτημορίου ἀπὸ τῆς γινομένης λαφθέντος.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

Πᾶς κῶνος κύλινδρος τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψους ἴσον.

## ΔΕΙΞΙΣ.

Πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς πρίσματος, τῆς τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς ἔχοντος αὐτῆ, καὶ ὕψους ἴσον. (α) ἀλλ’ ἡ πυραμὶς ἢ εἰς τὸν κῶνον ἐγγεγραμμένη, ἢ περιγεγραμμένη, εἰς αὐτὸν ἀπολήγει. (β) καὶ ὁ κῶνος αὐτῆς τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς πρίσματος τῆς τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψους ἴσον. ἀλλὰ τὸ πρίσμα εἰς τὸν κύλινδρον ἐγγεγραμμένον ἢ περιγεγραμμένον, εἰς αὐτὸν ἀπολήγει. (γ) καὶ ὁ κῶνος αὐτῆς τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς κύλινδρος τῆς τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψους ἴσον.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις.

ΔΕΙ.

(•) Ἡ βάση κύκλος ἐστὶ. τίνι δὲ τρόπῳ καταμετρεῖται ὁ κύκλος ὁ συνήθως διαλαμβάνεται, ἢ μετὰ τὸ δ. διὰ τῶν τῆς Ἀρχιμ. (α) Κατὰ τὸ α. πόρισμα. τὸ μετὰ τὴν ζ. προτ. τῆς β. (β) Κατὰ τὸ προλ. λήμ. (γ) Κατὰ τὸ αὐτὸ λήμ.

## ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ μὲν πυραμίδες, εἰς τὲς κώνους, τὰ δὲ πρίσματα, εἰς τὲς κυλίνδρους ἀπελήγθαι. (δ) ἀλλ' αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, καὶ τὰ πρίσματα εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. (ε) ἄρα καὶ οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

## ΣΤΗΝΕΠΙΛΑ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεχθήσεται, ὅτι οἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. ἴσόν δὲ τὰ τε ὕψη καὶ αἱ βάσεις τῶν κῶνων καὶ κυλίνδρων αἴτιαι ὡσιν, ἔσται κῶνος πρὸς κῶνον, καὶ κύλινδρος πρὸς κύλινδρον ἐν λόγῳ συγκεκλιμένῳ ἐκ τῆς λόγου, ἢ ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῆς ὃν ἔχει βάσεις πρὸς βάσεις. ἐπεὶ δὲ αἱ τῶν κῶνων καὶ κυλίνδρων βάσεις κύκλοι εἰσὶν οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίου λόγον ἔχουσιν, ἢ περὶ αἱ αὐτῶν διαμέτροι (ζ) καὶ κῶνος ἄρα πρὸς κῶνον, καὶ κύλινδρος πρὸς κύλινδρον λόγον ἔχει συγκεκλιμένον ἐκ τῆς λόγου, ὃν ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῆς διπλασίονος τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι, οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. λέγω, ὅτι ὁ ΑΒΓ κῶνος πρὸς τὸν ΔΕΖ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστωσαν δὴ πρῶτον οἱ κῶνοι ὀρθοί. (κ. 14.) ὧν ἄξονες, οἱ ΑΗ, ΔΘ.

ΔΕΙ-

(δ) Κατὰ τὸ αὐτὸ λῆμ. (ε) Κατὰ τὴν ε. τῆς ιβ. καὶ τὴν λβ. τῆς ια. (ζ) Κατὰ τὴν β. τῆς ιβ.



## ΔΕΙΞΙΣ

Ὁ κῶνος ΑΒΓ πρὸς τὸν κῶνον ΔΕΖ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶ λόγου ὃν ἔχει ὕψος πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τῶ διπλασίονος τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων. (η) ἀλλὰ τὰ τῶν ὀρθῶν κῶνων ὕψη εἰσὶν οἱ αὐτῶν ἄξονες. ὁ κῶνος ἄρα ΒΑΓ πρὸς τὸν κῶνον ΔΕΖ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶ λόγου, ὃν ἔχει ΑΗ : ΔΘ, καὶ ἐκ τῶ ὃν ἔχει ΒΓ<sup>2</sup> : ΕΖ<sup>2</sup>. (θ) ἀλλ' ὡς ΑΗ : ΔΘ :: ΒΓ : ΕΖ, διὰ τὴν τῶν κῶνων ὁμοιότητα. (ι) οἱ λόγοι ἄρα, ἐξ ὧν ὁ συγκείμενος τρεῖς καὶ ἴσοι. ὁ ἄρα συγκείμενος τριπλασίονος ἐνὸς ἐκάστου τῶν ἐξ ὧν σύγκαιται. (κ) ὁ κῶνος ἄρα ΑΒΓ πρὸς τὸν κῶνον ΔΕΖ τριπλασίονος λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευχθήσεται, ὅτι καὶ οἱ ὅμοιοι κύλινδροι, οἱ ὀρθοὶ, ἐν τριπλασίονος λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἔωσαν δὴ οἱ ὅμοιοι κῶνοι ΒΑΓ, ΗΘΚ πλάγιοι. (χ. 15.) καὶ ἐμβεβλήθωσαν αἱ ΑΓ, ΘΚ διάμετροι τῶν βάσεων αὐτῶν. καὶ ἀπὸ τῶν Β, Η κορυφῶν τῶν κῶνων ἤχθωσαν αἱ ΒΙ, ΗΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΙ, ΘΠ, καὶ δὴλον, ὅτι αἱ ΒΙ, ΗΠ τὰ τῶν κῶνων ὕψη εἰσὶ. καὶ ἐπεὶ ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΙΔ ΒΠΛ, ἡ μὲν γωνία ΒΙΔ = ΗΠΛ, (λ) ἡ δὲ ΒΔΙ = ΗΠΙ, (μ) λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΒΙ ἴση λοιπῇ τῇ ΛΗΠ. ὡς ἄρα ΒΔ : ΗΛ :: ΒΙ : ΗΠ. (ν) ἀλλ' ὡς ΒΔ : ΗΛ :: ΑΓ : ΘΚ. (ξ) ἄρα ὡς ΒΙ : ΗΠ :: ΑΓ : ΘΚ. (ο) ἐπεὶ δὲ ὁ κῶνος ΒΑΓ, πρὸς τὸν κῶνον ΗΘΚ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶ ὃν ἔχει ὕψος, τὸ ΒΙ, πρὸς ὕψος, τὸ ΗΠ, καὶ ἐκ τῶ διπλασίονος, ὃν ἔχει

(η) Κατὰ τὴν προλ. συνίπ. (θ) Ὅρα τὴν ε. σημ. τὴν ἐν ταῖς ὀρίσμ. τῆ ε. βιβλ. (ι) Κατὰ τὸν δ. ὀρίσμ. τῆ ιβ. (κ) Κατὰ τὸν π. ὀρίσμ. τῆ ε. (λ) Ὅρθαι γάρ. (μ) Κατὰ τὸν δ. ὀρίσμ. τῆ ιβ. (ν) Κατὰ τὴν δ. τῆ ε. (ξ) Κατὰ τὸν δ. ὀρίσμ. τῆ ιβ. (ο) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε.

ἔχει  $\Lambda\Gamma : \Theta\text{Κ}$ , ἔστιν ἐκ τῶν ἐν ἔχει  $\overline{\Lambda\Gamma}^2 : \overline{\Theta\text{Κ}}^2$ . (π) ἔστι δὲ ὡς  $\text{ΒΗ} : \text{ΗΗ} :: \Lambda\Gamma : \Theta\text{Κ}$ , τετάρτην ἴσοι οἱ τρεῖς λόγοι ἔξ ὧν ὁ συγκείμενος. ἄρα ὁ κῶνος  $\text{Ε}\Lambda\Gamma$ , πρὸς τὸν κῶνον  $\text{Η}\Theta\text{Κ}$  τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἢ  $\Lambda\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Theta\text{Κ}$ . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διαχθίσεται, ὅτι καὶ οἱ ἄλλοι κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Ἐάν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῆ, παραλλήλω ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος, πρὸς τὸν κύλινδρον, ἔτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος ὁ  $\Lambda\text{Ζ}$  ἐπιπέδῳ τῷ  $\text{Η}\Theta$  τμηθῶ, παραλλήλω ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις,  $\Lambda\text{Β}$ ,  $\Gamma\text{Ζ}$ , καὶ συμβαλλέτω τῷ  $\text{Ε}\text{Ζ}$  ἄξωνι κατὰ τὸ  $\text{Κ}$  σημεῖον. λέγω, ὅτι ὡς ὁ  $\text{ΒΗ}$  κύλινδρος, πρὸς τὸν  $\text{Η}\text{Ζ}$  κύλινδρον, ἔτως ὁ  $\text{Ε}\text{Κ}$  ἄξων, πρὸς τὸν  $\text{Κ}\Delta$  ἄξονα. ρ. 16.

Ἐστω ὀρθὸς ὁ κύλινδρος  $\Lambda\text{Ζ}$ , καὶ ὡς δύο ἀπ' ἀλλήλων κεχωρισμένοι γεννήθωσαν οἱ  $\text{ΒΗ}$ ,  $\text{Η}\text{Ζ}$  κύλινδροι.

## ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ οἱ κύλινδροι  $\text{ΒΗ}$ ,  $\text{Η}\text{Ζ}$  ἴσας βάσεις ἔχουσι τὰς  $\Lambda\text{Β}$ ,  $\Gamma\text{Ζ}$ , πρὸς ἀλλήλους ἄρα εἰσὶν ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη. (ρ) ἄρα ὁ  $\text{ΒΗ}$  κύλινδρος, πρὸς τὸν  $\text{Η}\text{Ζ}$  κύλινδρον, ἔτως τὸ  $\text{Ε}\text{Κ}$  ὕψος, πρὸς τὸ  $\text{Κ}\Delta$  ὕψος. ἀλλὰ τὰ  $\text{Ε}\text{Κ}$ ,  $\text{Κ}\Delta$  εἰσὶν οἱ ἄξονες. ἄρα ὁ  $\text{ΒΗ}$  κύλινδρος, πρὸς τὸν  $\text{Η}\text{Ζ}$  κύλινδρον, ἔτως ὁ  $\text{Ε}\text{Κ}$  ἄξων, πρὸς τὸν  $\text{Κ}\Delta$  ἄξονα.

Ἄλλ' ἔστω πλάγιος ὁ  $\Lambda\text{Ζ}$  κύλινδρος, καὶ ἀπὸ τῶν  $\text{Ε}$  καὶ  $\text{Κ}$  σημείων ἤχθωσαν αἱ  $\text{Ε}\Lambda$ ,  $\text{Κ}\text{Μ}$  πρὸς ὀρθὰς ταῖς  $\text{Η}\Theta$ ,

(ρ) Κατὰ τὴν συνίπ. τὴν μετὰ τὴν ια. τῆς ιβ. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτὴν συνίπ.

ΗΘ, ΓΖ. βάσεις. καὶ ἐπεὶ τῶν κυλίνδρων ΡΗ, ΗΖ ἴσαι εἰσὶν αἱ βάσεις ΗΘ, ΓΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ΒΗ κύλινδρος πρὸς ΗΖ κύλινδρον, ἕτως ΕΛ ὕψος, πρὸς ΚΜ ὕψος. (σ) ἀλλ' ὡς ΕΛ : ΚΜ :: ΓΚ : ΚΔ. (τ) ἰσογώνια γὰρ τὰ τρίγωνα ΓΑΚ, ΚΜΛ. ὡς ἄρα ΒΗ κύλινδρος, πρὸς ΗΖ κύλινδρον, ἕτως ΓΚ ἄξων, πρὸς ΚΔ ἄξονα. (υ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη.

Ἐκ τῆς συνεπίας τῆς ἐνδεκάτης προτάσεως αὕτη δῆλη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

Τῶν ἴσων κῶνων ἢ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκῆνοι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οἱ μὲν κῶνοι εἰς τὰς πυραμίδας, οἱ δὲ κύλινδροι εἰς τὰ πρίσματα ἀπολήγουσιν. (φ) ἀλλὰ τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ πρισμάτων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν καὶ ὧν πυραμίδων καὶ πρισμάτων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκῆνοι. (χ) ἄρα καὶ τῶν ἴσων κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκῆνοι.

ΠΡΟ.

(σ) Κατὰ τὴν αὐτ. συνίπ. (τ) Κατὰ τὴν δ τῆ σ. (υ) Κατὰ τὴν ε. τῆ ε. (φ) Κατὰ τὸ πρὸ τῆς ε. τῆ ιβ. λήμ. (χ) Κατὰ τὴν θ. τῆ ιβ, καὶ τῆ α.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15', καὶ 17'.

Μόνον τῇ δαίξει τῆς ἐξῆς προτάσεως χρήσι-  
μοι, ἥτις διὰ τὸ ἐπιμένει λίμματος ἰσχυ-  
θήσεται.

Λ Η Μ Η Λ Ε΄.

Οἱ αἰς τὸ ἡμισφαίριον ἔγγεγραμμένοι τε καὶ  
περιγεγραμμένοι κύλινοιο, αἰς αὐτὸ ἀπο-  
λήγασιν.

Ἐστω ἡμικύκλιον τὸ ΛΒΓ. χ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Ἐχθω ἀπὸ τῆς κέντρος Κ κάθετος τῇ διαμέτρῳ ΛΓ  
ἢ ΚΒ, καὶ τετμήθω εἰς ὅποσα ἔν ἰσα μέρη, τὰ ΚΦ,  
ΦΗ, ΗΒ. καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Φ, Η, Β ἔχθωσαν  
τῇ ΛΓ παράλληλοι αἰ ΡΟ, ΙΑ, ΔΕ. καὶ πεπληρώθω  
τά τε περὶ τὸ ἡμικύκλιον ΛΒΓ περιγεγραμμένα ὀρθο-  
γώνια ΡΓ, ΙΞ, ΔΖ, καὶ τὰ εἰς αὐτὸ ἔγγεγραμμένα  
ΠΓ, ΘΝ. καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἰ ΔΜ, ΕΝ ἐπὶ τὰ Χ,  
Ω σημεία.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ, καθ' ἣν τὰ περιγεγραμμένα ὀρ-  
θογώνια ὑπερέχει τὰ ἔγγεγραμμένα ἴση ἐστὶ τοῖς ὀρ-  
θογώνιοις ΔΖ, ΙΜ, ΖΞ, ΡΣ, ΞΓ. ἔστι δὲ τὸ μὲν ΔΖ =  
ΜΩ, τὸ δὲ ΙΜ = ΠΧ, τὸ δὲ ΖΞ = ΝΤ, οἷς προσε-  
θεμένων καὶ τῶν ΡΣ, ΞΓ, ἴσα τῷ ΡΓ. ἡ ὑπεροχὴ ἄρα,  
καθ' ἣν τὰ περιγεγραμμένα ὀρθογώνια ὑπερέχει τὰ  
ἔγγεγραμμένα ἴση ἐστὶ τῷ ὀρθογώνιῳ ΡΓ. ἀλλὰ τὸ ΡΓ  
ἔλαττον πάσης δεθείσης ποσότητος γενήσεται, ἰσὸν, τῆς  
ΚΒ εἰς ἀπειροαίρημα διαιεθείσης μέρη, ἀπειρα τὸν  
ἀριθμὸν εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΛΒΓ ἔγγραφῆ τε καὶ περι-  
γραφῆ ὀρθογώνια. τὰ ἄρα εἰς τὸ ἡμικύκλιον ἔγγεγραμ-  
μένα



μένα ὀρθογώνια, εἰς τὰ περιγεγραμμένα ἀπολήξει.  
 (ψ) ἄρα πολλῶ μαῖλλον τὰ τε ἐγγεγραμμένα καὶ περι-  
 γεγραμμένα περὶ τὸ ἡμικύκλιον ὀρθογώνια εἰς αὐτὸ  
 ἀπολήξει, τὸ μεταξύ αὐτῶν κείμενον. περιενεχθήτω  
 δὴ περὶ τὴν ΚΒ ἡμιδιάμετρον τὸ ΔΒΓ ἡμικύκλιον σὺν  
 τοῖς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένοις τε καὶ ἐγγεγραμμέ-  
 νοις ὀρθογώνιοις, ἕως ἑ ἀποκατασταθῆ ὁθεν ἤξαστο  
 φέρεσθαι. ἐκ μὲν ἔν τῷ ἡμικυκλίῳ, ἡμισφαίριον ἐκ δὲ  
 τῶν ὀρθογώνιων, κύλινδροι περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένοι  
 τε καὶ ἐγγεγραμμένοι γίνονται. ἐπὶ δὲ τὰ ὀρθογώνια  
 εἰς τὸ ἡμικύκλιον ἀπολήξει, καὶ εἰ ἐξ αὐτῶν ἄρα γι-  
 νόμενοι κύλινδροι εἰς τὸ ἐκ τῷ ἡμικυκλίῳ γινόμενον ἀπο-  
 λήξουσιν ἡμισφαίριον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ΄.

Αἰ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι  
 λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Ἐσὼ ἡμικύκλια, τὰ ΝΓΙ, ΟΒΠ, ὧν περιενεχθή-  
 των αἰ σφαῖραι γίνονται. λέγω, ὅτι ἡ ἐκ τῷ ΝΓΙ γι-  
 νομένη σφαῖρα, πρὸς τὴν ἐκ τῷ ΟΒΠ γινόμενην σφαῖ-  
 ραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἡ ΔΓ διάμετρος  
 πρὸς τὴν ΗΒ διάμετρον. ρ. 19.

### ΚΑΤΑΣΚΕΤΗ.

Προσαναγεγραψάσθωσαν οἱ κύκλοι ΑΝΓΙ, ΗΟΒΠ. (ω)  
 καὶ τετμήσθω ἡ κΙ ἡμιδιάμετρος εἰς ὅποσα ἔν ἴσα μέ-  
 ρη, ὡσαύτως καὶ ἡ ἡμιδιάμετρος ΘΒ εἰς ἴσα τὸ πλῆ-  
 θος τοῖς προλαβῶσι. καὶ τῶν αὐτῶν κατασκευασθέν-  
 των, τῶν ἐν τῷ προλαβόντι καταγράμματι, ἐπεξέ-  
 χθωσαν αἰ ΓΖ, ΖΑ, ΒΜ, ΜΗ.

ΔΕΙ.

(ψ) Κατὰ τὸν σ. ὄρισμ. τῷ ιβ. (ω) Κατὰ τὴν κ. τῷ γ.

## ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ  $\Lambda\text{Z}\Gamma$  γωνία ὀρθή ἐστιν, (α) ὡς ἄρα  $\Lambda\text{E} : \text{EZ} :: \text{EZ} : \text{E}\Gamma$ . (β) ἡ ἄρα  $\Lambda\text{E}$  πρὸς τὴν  $\text{E}\Gamma$  διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢπερ ἡ  $\text{EZ}$  πρὸς τὴν  $\text{E}\Gamma$ . (γ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  $\text{H}\Xi$  πρὸς τὴν  $\Xi\text{B}$  διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢπερ ἡ  $\Xi\text{M}$  πρὸς τὴν  $\Xi\text{B}$ . ἀλλ' ὡς  $\Lambda\text{E} : \text{E}\Gamma :: \text{H}\Xi : \Xi\text{B}$ . (δ) ὅμοια γὰρ μέρη αἱ  $\text{E}\Gamma$ ,  $\Xi\text{B}$  τῶν  $\Lambda\text{E}$ ,  $\text{H}\Xi$ . ἄρα καὶ ὡς  $\text{EZ} : \text{E}\Gamma :: \Xi\text{M} : \Xi\text{B}$ . (ε) ἀλλ' ἡ μὲν  $\text{E}\Gamma = \text{E}\rho$ , ἡ δὲ  $\Xi\text{B} = \Xi\text{C}$ . (ς) ἄρα καὶ ὡς  $\text{EZ} : \text{E}\rho :: \Xi\text{M} : \Xi\text{C}$ . οἱ κύλινδροι ἄρα οἱ ἐκ τῶν ὀρθογωνίων  $\Delta\text{E}$ ,  $\Lambda\Xi$  γινόμενοι ὅμοιοι εἰσιν. (η) ὁ κύλινδρος ἄρα ὁ ἐκ τῆ  $\Delta\text{E}$ , πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν ἐκ τῆ  $\Lambda\Xi$  τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢπερ ἡ  $\text{E}\rho$  πρὸς τὴν  $\Xi\text{C}$ . (θ) ἀλλ' ὡς  $\text{E}\rho : \Xi\text{C} :: \Lambda\Gamma : \text{H}\text{B}$ . (ι) ἄρα ὁ ἐκ τῆ  $\Delta\text{E}$  κύλινδρος, πρὸς τὸν ἐκ τῆ  $\Lambda\Xi$  κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢπερ ἡ  $\Lambda\Gamma$  πρὸς τὴν  $\text{H}\text{B}$ . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ἕκαστος τῶν κυλίνδρων, τῶν γινόμενων ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, τῶν εἰς τὸ ἡμικύκλιον  $\text{N}\Gamma\text{I}$  ἐγγεγραμμένων, πρὸς ἕκαστον τῶν κυλίνδρων, τῶν ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, τῶν εἰς τὸ ἡμικύκλιον  $\text{O}\text{B}\Pi$  ἐγγεγραμμένων, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢπερ ἡ  $\Lambda\Gamma$  πρὸς τὴν  $\text{H}\text{B}$ . ἄρα καὶ πάντες οἱ κύλινδροι, οἱ ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, τῶν εἰς τὸ ἡμικύκλιον  $\text{N}\Gamma\text{I}$  ἐγγεγραμμένων, γινόμενοι, πρὸς πάντας τὰς κυλίνδρους, τὰς ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, τῶν εἰς τὸ  $\text{O}\text{B}\Pi$  ἐγγεγραμμένων, τριπλασίονα λόγον ἔχουσιν, ἢπερ ἡ  $\Lambda\Gamma$  πρὸς τὴν  $\text{H}\text{B}$ .

P (κ)

(α) Κατὰ τὴν λα. τῆ γ. (β) Κατὰ τὴν α. συνίπ. τὴν μετὰ τὴν η. τῆ ε. (γ) Κατὰ τὸ β. πόρ. τὸ μετὰ τὴν η. τῆ ε. (δ) Κατὰ τὴν η. τῆ ε. (ε) Κατὰ τὸ ζ. θιώρ. τῶν μετὰ τὸ ε. βιβλ. (ς) Ἐκ τῆς κατασκευ. (η) Κατὰ τὸν δ. ὄρισμ. τῆ ιβ. (θ) Κατὰ τὸν ιβ. τῆ ιβ. (ι) Κατὰ τὴν η. τῆ ε.

(κ) ἀλλ' ἐκείνοι μὲν οἱ κύματα εἰς τὸ ἡμισφαίριον ἀπὸ λήγεσι, τὸ ἐκ τῆς ἡμικυκλίου ΝΓΙ γινόμενον ἔτσι δὲ, εἰς τὸ ἐκ τῆς ΟΒΠ ἡμισφαίριον. (λ) ἄρα καὶ τὸ ἡμισφαίριον, τὸ ἐκ τῆς ΝΓΙ, πρὸς τὸ ἡμισφαίριον, τὸ ἐκ τῆς ΟΒΠ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΗΒ. (μ) ἀλλ' ὡς τὸ ἐκ τῆς ΝΓΙ ἡμισφαίριον, πρὸς τὸ ἐκ τῆς ΟΒΠ ἡμισφαίριον, ἔτσι ἢ ἐκ τῆς ΝΓΙ σφαῖρα, πρὸς τὴν ἐκ τῆς ΟΒΠ σφαῖραν. (ν) ἄρα καὶ ἢ ἐκ τῆς ΝΓΙ σφαῖρα, πρὸς τὴν ἐκ τῆς ΟΒΠ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἢ ΑΓ, πρὸς τὴν ΗΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(κ) Κατὰ τὴν ε. λ. θ. τῆ ε. (λ) Κατὰ τὸ προλ. λῆμ. (μ) Κατὰ τὸ β. λῆμ. τὸ μετὰ τὴν α. τῆ ιβ. (ν) Κατὰ τὴν η. τῆ ι.

Τ Ε Λ Ο Σ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

