ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συμπεπληρώσθω τὰ ΑΞ, ΚΜ παραλληλεπίπεδα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, (χ) ἴσον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΘΚ. τὰ ἄρα παραλληλεπίπεδα ΑΞ, ΚΜ ἐπὶ ἴσων βάσεων καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. ἄρα τὸ ΑΞ = ΚΜ. (ψ) ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΞ ἥμισυ ἐστὶ τὸ ΑΒΕΖΔΓ πρίσμα, τοῦ δὲ ΚΜ, τὸ ΗΘΚΝΟΜ. (ω) τὰ ἄρα ΑΒΕΖΔΓ, ΗΘΚΝΟΜ πρίσματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

ΒΙΒΛΙΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. **Πυραμὶς** ἐστι σχῆμα στερεὸν, ἐπιπέδοις τριγωνικοῖς, οἷον, τοῖς ΖΑΒ, ΖΒΓ, ΖΓΔ, ΖΔΑ περιεχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἐπιπέδου, οἷον τοῦ ΑΒΓΔ, πρὸς ἑνὶ σημείῳ τῷ Ζ συνεστός. καὶ τὸ μὲν ΑΒΓΔ ἐπίπεδον **Βάσις**, τὸ δὲ Ζ σημεῖον **Κορυφὴ** τῆς πυραμίδος ἐστίν. ΚΕ'. σχ. 1.

Σχηματίζεται δὲ ἡ Πυραμὶς, ἐὰν, ληφθέντος τυχόντος ἐπιπέδου, οἷον τοῦ ΑΒΓΔ, ἀπό τινος μετεώρου σημείου, τοῦ Ζ, ἐπὶ πάσας τὰς κορυφὰς τῶν τοῦ ἐπιπέδου γωνιῶν εὐθεῖαι ἐπιζευχθῶσιν, οἷον αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ.

Β'.

(χ) Κατὰ τὴν μα. τοῦ α. (ψ) Κατὰ τὴν λα. τοῦ ια. (ω) Ἐκ τοῦ κη. τοῦ ια. δῆλον.

Β'. Ἐὰν ἀπό τινος τῶν ἐν μετεώρῳ σημείȣ, τȣ̃ Α, ἐπὶ τὴν τȣ̃ κύκλȣ ΓΑΔ περιφέρειαν ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ ΑΓ· καὶ μένοντος τȣ̃ Α σημείȣ, περιενεχθῇ περὶ τὴν περιφέρειαν, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασαθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ μὲν ἐπιφάνεια ἡ παρὰ τῆς εὐθείας καταγραφομένη, **Κωνικὴ** λέγεται· τὸ δὲ σερεὸν τὸ ὑπὸ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ τȣ̃ κύκλȣ περιεχόμενον, **Κῶνος**· καὶ ἡ μὲν εὐθεῖα ΑΓ, **πλευρὰ** τȣ̃ Κώνȣ· τὸ δὲ σημεῖον Α, **Κορυφή**· ὁ δὲ κύκλος ΓΑΔ, **Βάσις**· ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τȣ̃ κύκλȣ ἐπιζευγνυμένη, ἡ ΑΚ, **Ἄξων**. καὶ ἐὰν μὲν ὁ Ἄξων πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει, **ὀρθὸς ὁ Κῶνος** καλείσθω· (σχ. 2.) ἐὰν δὲ μὴ, **Πλάγιος** 3.

Γίνεται δὲ ὁ Κῶνος, κ̀ ὅταν ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ μενȣ́σης πλευρᾶς, τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασαθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι.

Γ'. Ἐὰν εὐθεῖά τις, ἡ ΓΖ, δύω κύκλων ἴσωντε κ̀ παραλλήλων καὶ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ὄντων ἐπιπέδῳ, τῶν ΓΓ, ΖΖ, ἐφάπτηται, καὶ περιενεχθεῖσα, ἀποκατασαθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ μὲν ὑπ' αὐτῆς καταγραφομένη ἐπιφάνεια, **Κυλινδρικὴ** λέγεται· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κ̀ τῶν δύω κύκλων περιληφθὲν σερεὸν, **Κύλινδρος**· καὶ ἡ μὲν εὐθεῖα ἡ ΓΖ, **πλευρὰ** τȣ̃ κυλίνδρȣ· οἱ δὲ ΓΓ, ΖΖ, κύκλοι

κύκλοι, **Βάσεις**· ἡ δὲ τὰ κέντρα τῶν κύκλων ἐπιζευγνῦσα ΒΑ, **Ἄξων**· καὶ ἐὰν μὲν ὁ ἄξων πρὸς ὀρθὰς ᾖ ἑκατέρᾳ τῶν βάσεων, **ὀρθὸς ὁ Κύλινδρος** (σχ. 4) ἐὰν δὲ μή, **Πλάγιος**. σχ. 5.

Γίνεται δὲ ὁ Κύλινδρος, καὶ ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενέσης μιᾶς πλευρᾶς, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι.

Δ΄. **Ὅμοιοι** Κῶνοι καὶ Κύλινδροι εἰσίν, ὧν εἴτε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἴσας περιέχουσι γωνίας.

Ε΄. **Σφαῖρά** ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου τοῦ ΑΓΒ μενέσης τῆς διαμέτρου ΑΒ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν στερεόν. καὶ **Ἐπιφάνεια** μὲν τῆς σφαίρας, ἡ ὑπὸ τῆς περιφερείας τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφομένη· **Κέντρον** δὲ τὸ αὐτὸ Κ, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου· **Ἄξων** δέ ἐστιν ἡ μένουσα εὐθεῖα ΑΒ, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται· **Διάμετρος** δὲ τῆς σφαίρας, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. σχ. 6.

Ϛ΄. Σχῆμα εἰς σχῆμα, ἐπίπεδον εἰς ἐπίπεδον, ἢ στερεὸν εἰς στερεὸν ἀπολήγειν, ἢ σχεδὸν ταυτίζεσθαι, λέγεται, ὅταν ἡ αὐτῶν διαφορὰ ἐλάσσων ᾖ πάσης δοθείσης ποσότητος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλα ἐςὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔςωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, ϗ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα, τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔςωσαν αἱ ΑΔ, ΗΛ. λέγω, ὅτι ἐςὶν ὡς ΑΒΓΔΕΖ πολύγωνον, πρὸς ΗΘΚΛΜΝ πολύγωνον, ὅτω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τετράγωνον. Σχ. 7.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΒΖ, καὶ αἱ ΘΛ, ΘΝ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΖ, ΘΗΝ, ἡ μὲν ΒΑΖ γωνία ἴση τῇ ΘΗΝ· ἔςι δὲ ϗ ὡς ΒΑ : ΑΖ :: ΘΗ : ΗΝ· (α) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΖΒ = ΗΝΘ. (β) ἀλλ' ἡ μὲν ΑΖΒ = ΒΔΑ, ἡ δὲ ΗΝΘ = ΘΛΗ. (γ) ἄρα καὶ ἡ ΒΔΑ = ΘΛΗ. ἐν τοῖς τριγώνοις ἓν ΑΒΔ, ΗΘΛ, ἡ μὲν γωνία ΑΒΔ = ΗΘΛ, (δ) ἡ δὲ ΒΔΑ = ΘΛΗ, ὥςε ϗ λοιπὴ ἡ ΒΑΔ λοιπῇ τῇ ΘΗΛ ἴση. ὡς ἄρα ΒΑ : ΑΔ :: ΘΗ : ΗΛ. (ε) καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΒΑ : ΘΗ :: ΑΔ : ΗΛ. (ζ) ἀλλὰ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, πρὸς πολύγωνον ΗΘΚΛΜΝ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΘΗ. (η) ἄρα πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ πρὸς πολύγωνον ΗΘΚΛΜΝ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΗΛ. εἴτον ὡς πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, πρὸς πολύγωνον ΗΘΚΛΜΝ, ὅτω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τετράγωνον. (θ) ο. ε. δ.

ΣΥ-

(α) Κατὰ τὸν α. ὁρισμ. τοῦ ϛ. (β) Κατὰ τὴν ϛ. τοῦ ϛ. (γ) Κατὰ τὴν κα. τοῦ γ. (δ) Κατὰ τὴν λα. τοῦ γ. (ε) Κατὰ τὴν δ. τοῦ ϛ. (ζ) Κατὰ τὴν ζ. τοῦ ε. (η) Κατὰ τὴν κ. τοῦ ϛ. (θ) Θέα τὴν ε. σημ. τὴν ἐν τοῖς ὁρισμ. τοῦ ε. βιβλ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων τῶν εἰς τοὺς κύκλους ἐγγεγραμμένων ἀνάλογόν εἰσι ταῖς διαμέτροις τῶν κύκλων, ἤγουν ὡς ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΑ : ΗΘ + ΘΚ + ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΗ :: ΑΔ : ΗΛ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΒ : ΗΘ :: ΑΔ : ΗΛ, ὡς δέδεικται καὶ ἔστιν, ὡς ΑΒ : ΗΘ :: ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΑ : ΗΘ + ΘΚ + ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΗ. (ι) ἄρα καὶ ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΑ : ΗΘ + ΘΚ + ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΗ :: ΑΔ : ΗΛ. (κ)

ΛΗΜΜΑ Α'.

Ἡ περίμετρος τῶν πολυγώνων τῶν εἰς τὸν κύκλον περιγεγραμμένων τε καὶ ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἀπολήγει· αὐτὰ δὲ τὰ πολύγωνα εἰς τὸν κύκλον.

Ἔστω περὶ τὸν κύκλον ΖΗΘΛΜ περιγεγραμμένον πολύγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπιζευχθεισῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὰ Α, Ο, Β σημεῖα τῶν ΚΑ, ΚΟ, ΚΒ, ἐγγεγράφθω ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΖΗΘΛΜ. λέγω, Α'. ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ περιγεγραμμένου, ὁμοίως καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἰς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἀπολήγει· Β'. ὅτι καὶ αὐτὰ τὰ πολύγωνα ἀπολήγει εἰς τὸν κύκλον. κ. δ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἡ ΚΖΑ δίχα τέμνει τήν τε ΒΑΕ καὶ τὴν ΗΖΜ γωνίαν. (λ) ἔστι δὲ ἡ ΒΑΕ = ΗΖΜ, διὰ τὴν τῶν πολυγώνων ὁμοιότητα. ἄρα καὶ ἡ ΒΑΚ γωνία ἴση τῇ ΗΖΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΒΚ = ΖΗΚ. τὰ τρίγωνα ἄρα ΚΑΒ,

(ι) Κατὰ τὴν η. τοῦ ε. (κ) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ε. (λ) Ὅρα τὴν δεῖξιν τῆς ιβ. προτ. τοῦ δ. βιβλ.

ΚΑΒ, ΚΖΗ ἰσογώνιά εἰσιν. ὡς ἄρα ΒΑ : ΑΚ : : ΗΖ : ΖΚ. (μ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΒΑ : ΗΖ : : ΑΚ : ΖΚ. (ν) ἀλλ' ὡς ΒΑ : ΗΖ ὕτως ἡ περίμετρος τȣ̃ περιγεγραμμένȣ, πρὸς τὴν περίμετρον τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ πολυγώνȣ. (ξ) ἡ ἄρα τȣ̃ περιγεγραμμένȣ πολυγώνȣ περίμετρος, πρὸς τὴν τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ λόγον ἔχει ὃν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΖΚ. ἀλλ' ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΖΚ παντὸς δοθέντος λόγȣ ἐλάσσων γενήσεται, ἐὰν ἀπειράκις ὅμοια πολύγωνα περὶ τὸν κύκλον περιγραφῇ καὶ ἐγγραφῇ. ὁ λόγος ἄρα ὃν ἕξει ἡ περίμετρος τȣ̃ περιγεγραμμένȣ πολυγώνȣ, πρὸς τὴν τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ ἐλάσσων ἔσται παντὸς δοθέντος λόγȣ. ὅπερ ἐςὶν, ὅτι ἡ ὑπεροχὴ καθ' ἣν ἡ περίμετρος τȣ̃ περιγεγραμμένȣ ὑπερέχει τὴν τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ ἐλάσσων ἔςαι πάσης δοθείσης ποσότητος. ἡ ἄρα περίμετρος τȣ̃ περιγεγραμμένȣ ἀπολήξει εἰς τὴν τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ περίμετρον. (ο) πολλῷ μᾶλλον ἄρα ἑκατέρα τῶν εἰρημένων περιμέτρων εἰς τὴν τȣ̃ κύκλȣ περιφέρειαν ἀπολήξει, τὴν μεταξὺ ἑκατέρας κειμένην.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β′.

Τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ΖΗΘΛΜ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ. (π) ἀλλ' ὡς ΒΑ : ΗΖ : : ΑΚ : ΖΚ, ὡς δέδεικται. τὸ ἄρα ΑΒΓΔΕ πρὸς τὸ ΖΗΘΛΜ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΖΚ. ὅπερ ἐςὶν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ περιγεγραμμένον πολύγωνον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ΖΗΘΛΜ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ τετράγωνον. ἀλλ' ὁ λόγος ὃν ἔχει $\overline{AK}^2 : \overline{ZK}^2$ ἐλάσσων παντὸς δοθέντος λόγȣ

(μ) Κατὰ τὴν δ. τȣ̃ ς. (ν) Κατὰ τὴν ζ τȣ̃ ε. (ξ) Κατὰ τὴν προλ. συνέπ. (ο) Κατὰ τὸν ε ὁρισμ. τȣ̃ ιβ. (π) Κατὰ τὴν κ. τȣ̃ ς.

γε ἔσαι, ἐὰν ἀπειροάριθμα πολύγωνα περιγραφῇ ϗ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον. ϗ ὁ λόγος ἄρα ὃν ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἐλάσσων ἔσαι παντὸς δοθέντος λόγε, τετέσιν ἡ ὑπεροχὴ καθ᾽ ἣν τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ὑπερέχει τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσων ἔσαι πάσης δοθείσης ποσότητος. τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πολύγωνον εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον ἀπολήξει. ὥσε πολλῷ μᾶλλον ἑκάτερον τέτων εἰς τὸν κύκλον ἀπολήξει, τὸν μεταξὺ ἑκατέρε κείμενον.

ΛΗΜΜΑ Β΄.

Ἐὰν τὰ περιγεγραμμένα ἢ ἐγγεγραμμένα χήματα ἀπολήγῃ εἰς ἃ περιγέγραπται, ἢ ἐγγέγραπται, ὃν λόγον ἔχει τὰ περιγεγραμμένα ἢ ἐγγεγραμμένα πρὸς ἄλλα τινὰ, τὸν αὐτὸν ἔχει ϗ τὰ περὶ ἃ περιγέγραπται, ἢ ἐγγέγραπται.

Νενοήσθω χήματα, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ καλέμενα. ϗ περὶ τὰ Α, Β περιγεγραμμένα ἔσω τὰ Γ, Δ, ὡς ἃ ϗ ἀποληγέτω. ἔσω δὲ ὡς Γ : Δ : : Ε : Ζ. λέγω, ὅτι ἔσαι ϗ ὡς Α : Β : : Ε : Ζ. εἰ γὰρ μὴ, τὸ Α πρὸς τὸ Β ἤτοι μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἢ ἐλάσσονα. ἐχέτω δὴ Α : Β $>$ Ε : Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ Α : Β $>$ Ε : Ζ, ἄρα Β : Α $<$ Ζ : Ε. (ρ) κείσθω, ὡς Θ : Α : : Ζ : Ε. ϗ δῆλον ὅτι τὸ Θ μεῖζον ἐςὶ τῦ Β. (σ) ἐπεὶ δὲ ϗ ὡς Γ : Δ : : Ε : Ζ. (τ) ἄρα ϗ

(ρ) Κατὰ τὴν συνέπ. τῆς α. θεώρ. τῆς μετὰ τὸ ε. βιβλ. (σ) Ἐκ τῆς δ. τῆς ε. δῆλον. (τ) Ἐξ ὑποθ.

καὶ ἀνάπαλιν ὡς Δ : Γ :: Ζ : Ε. (υ) ὥστε καὶ ὡς Θ : Λ :: Δ : Γ. (φ) ἀλλὰ τὸ Θ μεῖζον ὂν τοῦ Β, μεῖζόν ἐστι καὶ τοῦ Δ. (τὸ μὲν γὰρ Θ ὑπερέχει τὸ Β ποσότητά τινα ὡρισμένην ποσότητα, τὸ δὲ Δ τὸ Β ποσότητι πάσης δοθείσης ἐλάσσονι) καὶ τὸ Α ἄρα μεῖζον τοῦ Γ, (χ) εἴτουν τὸ Γ ἔλαττον τοῦ Α. τὸ περιγεγραμμένον ἔλαττον τοῦ ἐγγεγραμμένου. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Ἐχέτω δὴ Α : Β < Ε : Ζ. καὶ κείσθω πάλιν ὡς Θ : Β :: Ε : Ζ. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς Γ : Δ :: Ε : Ζ, (ψ) ἔσται καὶ ὡς Θ : Β :: Γ : Δ. (ω) ἀλλὰ τὸ Θ μεῖζον ὂν τοῦ Α, μεῖζόν ἐστι καὶ τοῦ Γ διὰ τοὺς ἤδη ῥηθέντας λόγους. ἄρα καὶ τὸ Β μεῖζον τοῦ Δ, (α) ὅπερ ἐστὶ τὸ Δ ἔλαττον τοῦ Β. τὸ περιγεγραμμένον ἔλαττον τοῦ ἐγγεγραμμένου. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ Ε πρὸς Ζ, δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ μείζονα λόγον ἔχει. ὡς ἄρα Α : Β :: Ε : Ζ. ὅ. ἔ. δ.

Ἔστω δὲ τὰ Γ, Δ ἐγγεγραμμένα εἰς τὰ Α, Β, εἰς ἃ καὶ ἀποληγέτω. ἔστω δὲ ὡς Γ : Δ :: Ε : Ζ. λέγω, ὅτι καὶ ὡς Α : Β :: Ε : Ζ. εἰ γὰρ μὴ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β ἤτοι μείζονα ἢ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. ἐχέτω δὴ Α : Β > Ε : Ζ. καὶ κείσθω ὡς Θ : Β :: Ε : Ζ. καὶ δῆλον ὅτι τὸ Θ ἔλαττόν ἐστι τοῦ Α. (β) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς Ε : Ζ :: Γ : Δ, (γ) ἔσται καὶ ὡς Θ : Β :: Γ : Δ. ἀλλὰ τὸ Θ ἔλαττον ὂν τοῦ Α, ἔλαττόν ἐστι καὶ τοῦ Γ. ἄρα καὶ Β ἔλαττον τοῦ Δ. (δ) τὸ

(υ) Κατὰ τὴν συνέπ. τῆς ζ. τοῦ ε. (φ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (χ) Κατὰ τὴν ν. τοῦ ε. (ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (α) Κατὰ τὴν κ. τοῦ ε. (β) Ἐκ τῶν εἰρημ. δῆλον. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν κ. τοῦ ε.

τὸ περιγεγραμμένον ἔλαττον τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ. ὅπερ ἄτοπον. ȣ̓κ ἄρα Α : Β $>$ Ε : Ζ.

Ἐχέτω δὴ Α : Β $<$ Ε : Ζ. ἄρα Β : Α $>$ Ζ : Ε. (ε) κείσθω ὡς Θ : Α :: Ζ : Ε. καὶ δῆλον, ὅτι τὸ Θ ἔλαττον τȣ̃ Β. (ζ) ἐπεὶ δὲ ὡς Γ : Δ :: Ε : Ζ, ἔσαι καὶ ὡς Δ : Γ :: Ζ : Ε. (η) ἄρα καὶ ὡς Θ : Α :: Δ : Γ. (θ) ἀλλὰ τὸ Θ ἔλαττον ὂν τȣ̃ Β, ἔλαττόν ἐσι καὶ τȣ̃ Δ. καὶ τὸ Α ἄρα ἔλαττον τȣ̃ Γ. (ι) τὸ περιγεγραμμένον ἔλαττον τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ. ὅπερ ἄτοπον. ȣ̓κ ἄρα Α : Β $<$ Ε : Ζ. ἀλλὰ δέδεικται, ὅτι ȣ̓δὲ Α : Β $>$ Ε : Ζ. ἄρα ὡς Α : Β :: Ε : Ζ. ο. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλȣς εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα τὰ εἰς τȣ̀ς κύκλȣς ἐγγεγραμμένα, ἀπολήγει εἰς τȣ̀ς κύκλȣς. (κ) ἀλλὰ τὰ ὅμοια πολύγωνα τὰ εἰς τȣ̀ς κύκλȣς ἐγγεγραμμένα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. (λ) ἄρα καὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλȣς εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. (μ)

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Αἱ δὲ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσίν, ὡς αἱ διάμετροι. ἐπεὶ γὰρ αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων τῶν εἰς τȣ̀ς κύκλȣς ἐγγεγραμμένων, εἰς τὰς περιφερείας αὐτῶν ἀπολήγȣσιν, (ν) αἱ δὲ περίμετροι πρὸς

Ἀλλή-

(ε) Κατὰ τὴν συνέπ. τȣ̃ α. θεωρ. τȣ̃ μετὰ τὸ ε. βιβλ. (ζ) Ἐκ τῆς δ. τȣ̃ ε. (η) Κατὰ τὴν συνέπ. τῆς ζ. τȣ̃ ε. (θ) Κατὰ τὴν ε. τȣ̃ ε. (ι) Κατὰ τὴν κ. τȣ̃ ε. (κ) Κατὰ τὸ α. λῆμ. (λ) Κατὰ τὴν α. τȣ̃ ιβ. (μ) Κατὰ τὸ β. λῆμ. (ν) Κατὰ τὸ α. λῆμ.

ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι. (ξ) καὶ αἱ τῶν κύκλων ἄρα περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ τῶν κύκλων διάμετροι. (ο)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ', καὶ Δ'.

Εἰσὶν ἐπιμήκιστοι καὶ μόνον δουλεύουσι τῇ τῆς πέμπτης προτάσεως δείξει. ἥτις καὶ ἄνευ αὐτῶν δειχθήσεται.

ΛΗΜΜΑ Γ'.

Τὰ εἰς τὰς πυραμίδας, τὰς τριγώνους βάσεις ἐχούσας, ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα πρίσματα, εἰς αὐτὰς ἀπολήγει.

Ἔστω πυραμὶς ἡ ΖΑΒΣ, καὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς εἰς ἴσα μέρη διαιρεθείσης, τὰ ΖΛ, ΛΗ, ΗΣ, περιγεγραμμένα μὲν περὶ αὐτὴν νενοήσθω πρίσματα, τὰ ΖΨΩΟΠΛ, ΛΜΤΚΧΗ, ΗΛΕΒΑΣ· ἐγγεγραμμένα δὲ τὰ ΛΠΟΘΡΗ, ΗΧΚΦΙΣ, ἐκβληθεισῶν δῆθεν τῶν μὲν ΨΠ, ΩΟ ἐπὶ τὰ Ρ, Θ σημεῖα, τῶν δὲ ΜΧ, ΤΚ ἐπὶ τὰ Γ, Φ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΡΘ, ΙΦ. σχ. 9.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΨΡ, ΩΘ ἐπὶ τὰ Ξ, Ν σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΝ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ πρίσμα ΖΨΩΟΠΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΠΟΘΡΗ πρίσματι. (π) ἐπεὶ δὲ τὸ ΛΠΟΘΡΗ ἴσον τῷ ΗΡΘΝΞΣ, (ρ) ἄρα καὶ τὸ ΖΨΩΟΠΛ ἴσον τῷ ΗΡΘΝΞΣ. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν πρίσ-

(ξ) Κατὰ τὴν συνέπ. τὴν μετὰ τὴν α. τοῦ ιβ (ο) Κατὰ τὸ β. λῆμ. (π) Κατὰ τὴν λα. τοῦ ια. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτήν.

πρίσμα ΛΜΤΚΧΗ ἴσον τῷ ΗΧΚΦΓΣ, τὸ δὲ ΛΠΟΘΡΗ ἴσον τῷ ΗΡΘΝΞΣ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΟΠΜΤΚΧΡΘ ἴσον λοιπῷ τῷ ΘΡΧΚΦΓΞΝ. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρίσμα ΗΔΕΒΛΣ ἴσον τοῖς ΖΨΩΟΗΛ, ΟΠΜΤΚΧΡΘ, καὶ τῷ ΚΧΔΕΒΛΓΦ. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ, καθ' ἣν πάν-τα τὰ περιγεγραμμένα πρίσματα ὑπερέχει τὰ ἐγγε-γραμμένα ἴση ἐστὶ τοῖς ΖΨΩΟΗΛ, ΟΠΜΤΚΧΡΘ, ΚΧ-ΔΕΒΛΓΦ. αὕτη ἄρα ἡ ὑπεροχὴ ἴση τῷ περιγεγραμ-μένῳ πρίσματι ΗΔΕΒΛΣ. ἀλλὰ τὸ πρίσμα τῦτο ἐλαττ-τον πάσης δοθείσης ποσότητος γενήσεται, ἐὰν εἰς ἄπα-ρα τὸν ἀριθμὸν μέρη τῆς ΖΣ πλευρᾶς διαιρεθείσης, ἀπειροάριθμα πρίσματα περὶ τὴν πυραμίδα περι-γραμμένα τε καὶ ἐγγεγραμμένα νοηθῇ. ἡ ὑπεροχὴ ἄρα καθ' ἣν τὰ περιγεγραμμένα πρίσματα ὑπερέχει τὰ ἐγγεγραμμένα ἐλάσσων ἔσαι πάσης δοθείσης ποσότη-τος. τὰ ἄρα περὶ τὴν πυραμίδα περιγεγραμμένα πρίσ-ματα εἰς τὰ ἐγγεγραμμένα ἀπολήξει. (σ) πολλῷ μᾶλ-λον ἄρα τά τε περιγεγραμμένα περὶ τὴν πυραμίδα πρίσ-ματα καὶ τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς αὐτὴν, μεταξὺ αὐ-τῶν κειμένην, ἀπολήξει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὖσαι πυραμίδες, καὶ τριγώνυς ἔχυσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ πρίσματα τὰ εἰς τὰς πυραμίδας, τὰς τριγώ-νυς βάσεις ἐχύσας, ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμ-μένα ἀπολήγει εἰς τὰς πυραμίδας. (τ) ἀλλὰ τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πρίσματα πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς αἱ βά-σεις.

(σ) Κατὰ τὸν ε. ὁρισμ. τῦ ιβ. (τ) Κατὰ τὸ προλ. λῆμ.

ναις. (υ) ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὖσαι πυραμίδες, ᾗ τρίγωνοι ἔχυσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὖσαι πυραμίδες, καὶ πολυγώνυς ἔχυσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες αἱ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ, πολυγώνυς ἔχυσαι βάσεις τὰς ΒΓΔΕ, ΗΘΙΚ, κορυφὰς δὲ τὰ Α, Ζ σημεῖα. λέγω, ὅτι ὡς ΑΒΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ : : ΒΓΔΕ : ΗΘΙΚ. χ. ι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διῃρήσθω ἡ μὲν ΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ Χ, Φ τρίγωνα· ἡ δὲ ΗΘΙΚ, εἰς τὰ Ρ, Τ. καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστυ τριγώνυ πυραμίδες ἰσοϋψεῖς, ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσιν, αἱ ΑΒΓΕ, ΑΓΔΕ, ΖΗΘΚ, ΖΘΙΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΑΒΓΕ : ΖΗΘΚ : : Χ : Ρ. (φ) ὡσαύτως ᾗ ὡς ΑΒΓΕ : ΖΘΙΚ : Χ : Τ. ἄρα ᾗ ὡς ΑΒΓΕ: ΖΗΘΚ + ΖΘΙΚ : : Χ : Ρ + Τ. (χ) ἀλλ' ὡς ΑΒΓΕ : ΑΓΔΕ : : Χ : Φ. (ψ) ἄρα ᾗ ὡς ΖΗΘΚ + ΖΘΙΚ : ΑΓΔΕ : : Ρ + Τ : Φ, (ω) ἤτυν ὡς ΖΗΘΙΚ : ΑΓΔΕ : : ΗΘΙΚ : Φ. ἄρα ᾗ ὡς ΑΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ : : Φ : ΗΘΙΚ. (α) ἔςι δὲ ᾗ ὡς ΑΒΓΕ : ΖΗΘΙΚ : : Χ : Ρ + Τ, ὡς δέδεικται. ἄρα ᾗ ὡς (β) ΑΒΓΕ + ΑΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ : : Χ + Φ : ΗΘΙΚ, ἤτυν ὡς ΑΒΓΔΕ : ΖΗΘΙΚ : : ΒΓΔΕ : ΗΘΙΚ. ο. ε. δ.

 ΠΟ-

(υ) Κατὰ τὴν λβ'. τῦ ια (φ) Κατὰ τὴν ε. τῦ ιβ. (χ) Κατὰ τὴν κγ. τῦ ε. (ψ) Κατὰ τὴν ε. τῦ ιβ. (ω) Κατὰ τὴν ιβ τῦ ε. (α) Κατὰ τὴν ἐννέα. τῆς ζ. τῦ ε. (β) Κατὰ τὴν κγ. τῦ ε.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι αἱ μὲν ἴσας τὰς βάσεις ἔχουσαι πυραμίδες καὶ ἄνισα τὰ ὕψη, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· αἱ δὲ ἄνισα τά τε ὕψη καὶ τὰς βάσεις, ἐν λόγῳ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὕψος, πρὸς ὕψος, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει βάσις πρὸς βάσιν· αἱ δὲ ἴσα τά τε ὕψη καὶ τὰς βάσεις, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. καὶ γὰρ τὰ πρίσματα τὰ ἐγγεγραμμένα τε καὶ περιγεγραμμένα εἰς τὰς τριγώνους ἐχούσας βάσεις πυραμίδας, εἰς αὐτὰς ἀπολήγει· αἱ δὲ πολυγώνους ἐχούσαι βάσεις πυραμίδες, εἰς πυραμίδας τριγώνους ἐχούσας βάσεις διαιροῦνται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΖΔΕ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. σχ. 11.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΔ, ΕΓ, ΓΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΒΔ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΔΒ τριγώνῳ. (γ) καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΔΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ. (δ) ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΔΒ τρίγωνον

(γ) Κατὰ τὴν λδ. τοῦ α. (δ) Κατὰ τὸ προλ. πόρισ.

νον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐςι τῇ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐςι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον ἴση ἐςὶ τῇ πυραμίδι ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἐπεὶ δὲ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ, (ε) καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐςι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον ἴση ἐςὶ τῇ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐςι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐςι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον ἴση ἐδείχθη τῇ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐςι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐςι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐςὶ τῇ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΖΔΕ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐςὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, καὶ τὸ αὐτῆς ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους βάσεις ἔχοντα, ὁμοίως καὶ τὰ αὐτῶν ἀπεναντίον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐκ τούτου καὶ τὴν πυραμίδα καταμετρεῖν μανθάνομεν. ἐπεὶ γὰρ καταμετρεῖται τὸ παραλληλεπίπεδον, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ὕψους αὐτοῦ διὰ τῆς βάσεως· (ζ) πᾶν δὲ παραλληλεπίπεδον εἰς δύω ἴσα διαιρεῖται πρίσ-

(ε) Κατὰ τὴν λδ. τοῦ α. (ζ) Κατὰ τὸ λῆμ. τὸ μετὰ τὴν κδ. τοῦ ια.

πρίσματα, (η) καὶ τὸ πρίσμα ἄρα καταμετρηθήσεται, τῦ ὕψυς αὐτῦ διὰ τῆς βάσεως πολλαπλασιαθέντος. ἐπεὶ δὲ ἡ πυραμὶς τρίτον μέρος ἐςὶ τῦ πρίσματος, τῦ τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. καταμετρηθήσεται ἄρα καὶ ἡ πυραμὶς, τριτημορίῳ τῦ ὕψυς αὐτῆς πολλαπλασιαθέντος διὰ τῆς βάσεως· ἢ τὸ ἀνάπαλιν, τριτημορίῳ δηλαδὴ τῆς βάσεως πολλαπλασιαθέντος διὰ τῦ ὕψυς· ἢ τῦ ὕψυς διὰ τῆς βάσεως, καὶ τριτημορίῳ ἀπὸ τῦ γινομένυ ληφθέντος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ηʹ.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνυς ἔχυσαι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔςωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες αἱ ΗΑΒΓ, ΘΔΕΖ. ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα. λέγω, ὅτι ἡ ΗΑΒΓ πυραμὶς, πρὸς τὴν ΘΔΕΖ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. πίν. ΚϚ. σχ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συμπεπληρώσθω τὰ ΒΛ, ΕΟ παραλληλεπίπεδα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ = ΔΕΖ, ἡ δὲ ΗΒΓ = ΘΕΖ, ἡ δὲ ΑΒΗ = ΔΕΘ. ἐςὶ δὲ καὶ ὡς ΑΒ : ΔΕ :: ΒΓ : ΕΖ, καὶ ὡς ΒΗ : ΕΘ :: ΑΒ : ΔΕ, καὶ ὡς ΑΒ : ΔΕ :: ΒΗ : ΕΘ. (θ) ὅμοιον ἄρα τὸ μὲν ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΒΝ τῷ ΕΡ, τὸ δὲ ΚΒ τῷ ΕΞ. (ι) τὰ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ΒΜ, ΒΝ, ΒΚ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΡ, ΕΞ ὅμοιά ἐςιν. ἀλλὰ

(η) Κατὰ τὴν κη τῦ ια. (θ) Κατὰ τὸν θ. ὁρισμ. τῦ ια. (ι) Ἐκ τῆς ϛ. τῦ ϛ. δῆλον.

ἀλλὰ τὰ μὲν τρία, ΒΜ, ΒΝ, ΒΚ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοια· τὰ δὲ τρία, τὰ ΕΠ, ΕΡ, ΕΞ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοια. (κ) ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΛ στερεὸν τῷ ΕΟ στερεῷ. (λ) τὸ ἄρα ΒΛ πρὸς τὸ ΕΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. (μ) ὡς δὲ ΒΛ πρὸς ΕΟ ὅτως ἡ ΗΑΒΓ πυραμὶς, πρὸς τὴν ΘΔΕΖ πυραμίδα. ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τῦ στερεῦ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τῦ στερεῦ παραλληλεπιπέδυ, (ν) τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ ΗΑΒΓ ἄρα πυραμὶς, πρὸς τὴν ΘΔΕΖ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ, πρὸς τὴν ΕΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ αἱ πολυγώνυς ἄρα ἔχυσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. εἰς πυραμίδας γὰρ διαιρῦνται τριγώνυς ἐχέσας βάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων, καὶ τριγώνυς βάσεις ἐχυσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνυς βάσεις ἐχυσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Ἔστωσαν ἴσαι πυραμίδες, αἱ ΗΑΒΓ, ΘΔΕΖ, τριγώνυς ἔχυσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα. λέγω, ὅτι ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις, πρὸς τὴν ΔΕΖ

(κ) Κατὰ τὴν κδ. τῦ ια. καὶ τὴν μετ' αὐτὴν σημ. (λ) Κατὰ τὸν θ. ὁρισμ. τῦ ια. (μ) Κατὰ τὴν λγ. τῦ ια. (ν) Κατὰ τὴν κη. τῦ ια.

ΔΕΖ βάσιν, ὅτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος. ἐὰν δὲ ᾖ ὡς ΑΒΓ : ΔΕΖ, ὅτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος, ἔςαι ἡ ΗΑΒΓ = ΘΔΕΖ. χ. 13.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συμπεπληρώσθω τὰ ΒΛ, ΕΟ παραλληλεπίπεδα.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ ἴση ἐςὶν ἡ ΗΑΒΓ πυραμὶς τῇ ΘΔΕΖ πυραμίδι, (ξ) καὶ ἔςι τῆς μὲν ΗΑΒΓ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΛ ςερεὸν, τῆς δὲ ΘΔΕΖ τὸ ΕΟ, ἴσον ἄρα τὸ ΒΛ τῷ ΕΟ. ὡς ἄρα ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, ὅτω τῦ ΕΟ ςερεῦ τὸ ὕψος, πρὸς τὸ τῦ ΒΛ ςερεῦ ὕψος. (ο) ἀλλ' ὡς ΒΜ : ΕΠ : : ΑΒΓ : ΔΕΖ. (π) ὡς ἄρα ΑΒΓ : ΔΕΖ, ὅτω τὸ τῦ ΕΟ ὕψος, πρὸς τὸ τῦ ΒΛ ὕψος. (ρ) ἀλλὰ τὸ μὲν τῦ ΕΟ ὕψος τὸ αὐτό ἐςι τῷ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τῦ ΒΛ τῷ τῆς ΗΑΒΓ. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις, πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, ὅτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ ὡς ΑΒΓ : ΔΕΖ, ὅτω τὸ τῆς ΘΔΕΖ πυραμίδος ὕψος, πρὸς τὸ τῆς ΗΑΒΓ πυραμίδος ὕψος· (σ) ἔςι δὲ ὡς ΑΒΓ : ΔΕΖ : : ΒΜ : ΕΠ· (τ) καὶ τὰ τῶν πυραμίδων δὲ ὕψη τὰ αὐτά εἰσι τοῖς τῶν παραλληλεπιπέδων· ἄρα ὡς ΒΜ : ΕΠ, ὅτω τὸ τῦ ΕΟ ὕψος, πρὸς τὸ τῦ ΒΛ. (υ) ἴσον ἄρα τὸ ΒΛ τῷ ΕΟ. (φ) καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα ΗΑΒΓ = ΘΔΕΖ. ἕκτον γὰρ μέρος τῶν παραλληλεπιπέδων εἰσὶν αἱ πυραμίδες.

ΠΟ.

(ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὴν λδ. τῦ ια. (π) Κατὰ τὴν λδ. τῦ α. καὶ τὴν η. τῦ ε. (ρ) Κατὰ τὴν ε. τῦ ε. (σ) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν λδ. τῦ α. καὶ τὴν ε. τῦ ε. (υ) Κατὰ τὴν θ. τῦ ε. (φ) Κατὰ τὸ λδ. τῦ ια.