ἤχθωσαν γὰρ εἰ δυνατὸν αἱ ΒΑ, ΒΓ. (χ. τὸ αὐτ.) ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. οὐκοῦν αἱ τοῦ ΒΑΓ τριγώνου γωνίαι μείζονες δύω ὀρθῶν. ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω. λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα. χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Θ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΘΗ. ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΒΗ, ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΘΗ παράλληλος τῇ ΑΒ· (β) ἐστι δὲ ἡ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ· (γ) ϗ ἡ ΘΗ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ. (δ) ὀρθὴ ἄρα ἡ Θ γωνία. ἐν τοῖς τριγώνοις οὖν ΑΘΗ, ΑΒΗ, ἡ μὲν γωνία Θ=Β, ἡ δὲ ΑΗΘ=ΗΑΒ, (ε) ἡ δὲ ΑΗ κοινή. ἄρα καὶ ἡ ΘΗ=ΑΒ. (ζ) ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι πᾶσαι αἱ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων παράλληλοι τῇ ΑΒ, πρός τε ὀρθάς εἰσι τοῖς ἐπιπέδοις, ϗ ἀλλήλαις ἴσαι. τὰ ἄρα ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἀσύμπτωτά εἰσιν. ἄρα παράλληλα. (η)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων περὶ δύω εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων παράλλη-

---

(β) Ἐκ τῆς κατασκ. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν η. τοῦ ια. (ε) Κατὰ τὴν κθ. τοῦ α. (ζ) Κατὰ τὴν κς. τοῦ α. (η) Κατὰ τὸν η. ὁρισμ. τοῦ ια.

ληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὖσαι, παράλληλά ἐςι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύω εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων, αἱ ΑΒ, ΒΓ, περὶ δύω εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ, ἔςωσαν παράλληλοι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὖσαι. λέγω, ὅτι τὰ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδα παράλληλά εἰσι. χ. 23.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διὰ μὲν τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἤχθω τὸ ἐπίπεδον ΑΓ, διὰ δὲ τῶν ΔΕ, ΕΖ, ἤχθω τὸ ΔΖ. καὶ ἀπὸ τῦ Β ἤχθω ἡ ΒΗ κάθετος τῷ ΔΖ. καὶ διὰ τῦ Η ἤχθω ἡ μὲν ΗΚ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΕΔ παράλληλος ἐν τῷ ΔΖ ἐπιπέδῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΗΚ, ΗΘ παράλληλοί εἰσι ταῖς ΕΖ, ΕΔ. (θ) ἀλλὰ ταῖς ΕΖ, ΕΔ παράλληλοι αἱ ΒΓ, ΒΑ. (ι) αἱ ἄρα ΗΚ, ΗΘ παράλληλοι ταῖς ΒΓ, ΒΑ. (κ) ἄρα ἡ μὲν γωνία ΒΗΚ = ΗΒΓ, ἡ δὲ ΒΗΘ = ΗΒΑ. (λ) ἀλλ' ἑκατέρα τῶν ΒΗΚ, ΒΗΘ ὀρθή. (μ) καὶ τῶν ΗΒΓ, ΗΒΑ ἄρα ἑκατέρα ὀρθή. ἄρα ἡ ΗΒ κάθετός ἐςι ταῖς ΒΓ, ΒΑ. καὶ τῷ δι αὐτῶν ἄρα ἐπιπέδῳ τῷ ΑΓ κάθετος ἡ ΗΒ. (ν) τὰ ἄρα ΑΓ, ΔΖ ἐπίπεδα παράλληλά εἰσι. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ'.

Ἐὰν δύω ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδυ τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι.

Δύω

(θ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν θ. τῦ ια. (λ) Κατὰ τὴν κθ. τῦ α. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ν) Κατὰ τὴν δ. τῦ ια. (*) Κατὰ τὴν προλ.

Δύω ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΘΗ τεμνέσθω. κοιναὶ δὲ τομαὶ αὐτῶν ἔςωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐςιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ. χ. 24.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η. ἐκβεβλήσθωσαν πρότερον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐςὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἐςίν. ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημεῖον ἐςὶ τὸ Κ. τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐςὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ ἐν τῷ ΓΔ ἐςὶν ἐπιπέδῳ. τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι. οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἄρα παράλληλοί εἰσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

Δύω εὐθεῖαι, αἱ ΑΔ, ΓΒ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τῶν ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Ζ, Δ, Γ, Ε, Β σημεῖα. λέγω, ὅτι ἐςὶν ὡς ΑΖ : ΖΔ :: ΓΕ : ΕΒ. χ. 25.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΒ, ΓΔ. καὶ συμβαλλέτω ἡ ΑΔ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ.

ΔΕΙ-

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΗΘ, ΚΛ, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΓΑΖΞ τέμνονται, ἡ ΖΞ παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ. (ξ) ὡς ἄρα ΑΖ : ΖΔ :: ΑΞ : ΞΓ. (ο) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ΒΕ : ΕΓ :: ΑΞ : ΞΓ. ὡς ἄρα ΔΖ : ΖΑ :: ΒΕ : ΕΓ. (π) ἄρα καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΖΑ : ΔΖ :: ΕΓ : ΒΕ. (ρ) ὅ. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι᾽ αὐτῆς ἐπίπεδα, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖά τις, ἡ ΑΒ τῷ ἐπιπέδῳ ΚΛ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ δι᾽ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. χ. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον τὸ ΔΕ. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ΔΕ, ΚΛ ἐπιπέδων ἡ ΓΕ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἑκατέρα τῶν ΑΒΖ, ΗΖΒ γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. (σ) παράλληλοι ἄρα αἱ ΑΒ, ΗΖ. (τ) ἀλλ᾽ ἡ ΑΒ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ. (υ) καὶ ἡ ΗΖ ἄρα κάθετός ἐστι τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ. (φ) ἐπίπεδον δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων,
τῷ

(ξ) Κατὰ τὴν προλ. πρόν. (ο) Κατὰ τὴν β. τοῦ ϛ. (π) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (ρ) Κατὰ τὴν συνθ. τῆς ζ. τοῦ ε. (σ) Ἐξ ὑποθ. καὶ ἐκ τῆς κατασκ. (τ) Κατὰ τὴν κη. τοῦ α. (υ) Ἐξ ὑποθ. (φ) Κατὰ τὴν η. τοῦ ια.

τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι. τὸ ἄρα ΑΕ ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἐςὶ τῷ ὑποκειμένῳ ΚΛ ἐπιπέδῳ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ἤ, πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Ἐὰν δύω ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔςαι.

Δύω ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἔςω. κοινὴ δ' αὐτῶν τομὴ ἔςω ἡ ΗΘ. λέγω, ὅτι ἡ ΗΘ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΖ πρὸς ὀρθάς ἐςι. μὴ γάρ. πίν. ΚΒ. χ. 27.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῦ Η σημείυ ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΛ εὐθείᾳ ἤχθω πρὸ ὀρθὰς ἡ ΗΜ· ἐν δὲ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῇ ΚΔ εὐθείᾳ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ ἐπίπεδα πρὸς ὀρθάς εἰσι τῷ ἐπιπέδῳ ΕΖ, (χ) καὶ αἱ ΗΜ, ΗΚ ἄρα πρὸς ὀρθάς εἰσι τῷ αὐτῷ ΕΖ ἐπιπέδῳ. (ψ) ἀπὸ μετεώρυ ἄρα σημείυ τῦ Η δύω κάθετοι τῷ ὑποκειμένῳ ἤχθησαν ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἄτοπον. (ω) οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΖ ἀπὸ τῦ Η σημείυ πρὸς ὀρθὰς ἀχθήσεται ἄλλη τὶς, πλὴν τῆς ΗΘ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδων. ἡ ἄρα ΗΘ κάθετός ἐςι τῷ ΕΖ ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟ-

(χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὸν δ. ὁρισμ. τῦ ια. (ω) Κατὰ τὴν ἀνίσ. τῆς ιγ. τῦ ια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύω ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τὸ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ΒΑΓ, ΒΑΔ, ΔΑΓ περιεχέσθω. λέγω, ὅτι δύω ὁποιαιοῦν αὐτῶν μείζονές εἰσι τῆς λοιπῆς, πάντη μεταλαμβανόμεναι. χ. 28.

Εἰ μὲν αἱ ΒΑΓ, ΒΑΔ, ΔΑΓ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι δύω ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. εἰ δ᾽ οὔ· ἔστω μείζων ἡ ΒΑΓ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεστάτω ἡ ΒΑΕ γωνία ἴση τῇ ΒΑΔ. καὶ εἰλήφθω ἡ ΑΕ $=$ ΑΔ. καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ, τεμνέτω τὰς ΑΒ, ΑΓ, κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΕ, ΒΑΔ, ἡ μὲν ΑΕ $=$ ΑΔ, (α) ἡ δὲ ΑΒ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΒΑΕ $=$ ΒΑΔ. (β) ἄρα καὶ ἡ ΒΕ $=$ ΒΔ. (γ) ἀλλ᾽ αἱ δύω ΔΒ, ΔΓ μείζονες τῆς λοιπῆς τῆς ΒΓ· (δ) ἡ δὲ ΒΔ δέδεικται ἴση τῇ ΒΕ· ἡ ἄρα ΔΓ μείζων τῆς ΕΓ. ἐν τοῖς τριγώνοις οὖν ΑΕΓ, ΑΓΔ, ἡ μὲν ΑΕ $=$ ΑΔ, ἡ δὲ ΑΓ κοινὴ, ἡ δὲ ΕΓ ἐλάσσων τῆς ΔΓ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΕΑΓ ἐλάσσων τῆς ΔΑΓ. (ε) ἔστι δὲ ἡ ΒΑΔ ἴση τῇ ΒΑΕ. αἱ ἄρα ΒΑΔ, ΔΑΓ μείζονές εἰσι τῆς ΒΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι.

ΠΡΟ-

(α) Ἐκ τῆς κατασκ. (β) Ἐκ τῆς κατασκ. (γ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ α. (δ) Κατὰ τὴν κ. τοῦ α. (ε) Κατὰ τὴν κε. τοῦ α.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄.

Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α, περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν Τ, Υ, Λ, Ρ, Σ. λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι Τ, Υ, Λ, Ρ, Σ ἐλάσσονές εἰσι τεσσάρων ὀρθῶν. σχ. 29.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ μὲν Η, Θ, γωνίαι μείζονές εἰσι τῆς ΕΖΒ, αἱ δὲ Ι, Κ τῆς ΖΒΓ, αἱ δὲ Μ, Λ τῆς ΒΓΔ, αἱ δὲ Ν, Ξ τῆς ΓΔΕ, αἱ δὲ Ο, Π τῆς ΔΕΖ. (ζ) ἀλλ' αἱ ΕΖΒ, ΖΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἓξ ὀρθαῖς. (η) αἱ ἄρα Η, Θ, Ι, Κ, Μ, Λ, Ν, Ξ, Ο, Π μείζονες ἓξ ὀρθῶν. ἀλλ' αἱ γωνίαι Η, Θ, Ι, Κ, Μ, Λ, Ν, Ξ, Ο, Π μετὰ τῶν Τ, Υ, Λ, Ρ, Σ, ἴσαι εἰσὶ δέκα ὀρθαῖς. (θ) αἱ ἄρα Τ, Υ, Λ, Ρ, Σ ἐλάσσονές εἰσι τεσσάρων ὀρθῶν. ο. ε. δ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Τῶν ἐπιπέδων σχημάτων τῶν ἰσογωνίων τε καὶ ἰσοπλεύρων, τῶν καὶ **Κανονικῶν** λεγομένων, τρία μόνον, τρίγωνον, τετράγωνον, καὶ πεντάγωνον, σῶμα συγκροτοῦσι **Κανονικὸν** καλούμενον. Εἰσὶ δὲ **σώματα κανονικὰ** μόνα πέντε· **Πυραμὶς**, ὑπὸ τεσσάρων· **Ὀκτάεδρον**, ὑπὸ ὀκτώ· **Εἰκοσάεδρον**, ὑπὸ εἴκοσι ἰσοπλεύρων τε

Ξ καὶ

(ζ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (η) Κατὰ τὴν ιϛ. συν. τὴν μετὰ τὴν λβ. τοῦ α. (θ) Κατὰ τὴν λβ. τοῦ α.

καὶ ἴσων ἀλλήλοις τριγώνων περιεχόμενον· **Κύβος**, ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων· καὶ **Δωδεκάεδρον**, ὑπὸ δώδεκα κανονικῶν καὶ ἴσων ἀλλήλοις πενταγώνων. ἐπεὶ γὰρ πᾶσα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων ὀρθῶν ἐπιπέδων γωνιῶν περιέχεται, φανερὸν ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν τὴν στερεὰν περιεχουσῶν, ἔλαττον δεῖ εἶναι τεσσάρων ἐπιπέδων ὀρθῶν. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν τῆς πυραμίδος στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν περιέχεται ἐπιπέδων τριγωνικῶν γωνιῶν, ὧν τὸ κεφάλαιον ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς· (ι) ἡ δὲ τοῦ Ὀκταέδρου, ὑπὸ τεσσάρων, αἵ εἰσιν ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ τριτημορίῳ δύω ὀρθῶν· αἱ δὲ τοῦ Εἰκοσαέδρου, ὑπὸ πέντε, ὧν τὸ ἄθροισμα ἴσον δυσὶν ὀρθαῖς, καὶ δυσὶ τριτημορίοις δύω ὀρθῶν· ἡ δὲ τοῦ Κύβου, ὑπὸ τριῶν ὀρθῶν· ἡ δὲ τοῦ Δωδεκαέδρου ὑπὸ τριῶν πενταγωνικῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν τὸ κεφάλαιον ἴσον τρισὶν ὀρθαῖς, καὶ τρισὶ πεμπτημορίοις μιᾶς ὀρθῆς· (ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου γωνία ἴση μιᾷ ὀρθῇ, καὶ πεμπτημορίῳ ὀρθῆς.) (κ) συσταθήσονται ἄρα ὑπὸ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων σχημάτων στερεαὶ γωνίαι. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι καὶ τὰ προδιαληφθέντα πέντε Κανονικὰ σώματα ἐξ αὐτῶν οἷόν τε συσταθῆναι.

Ὅτι δὲ οὐδ' ὑπὸ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων σχημάτων, οὐδ' ὑπ' ἄλλων τινῶν, Κανονικὰ συνίσταται σώματα, πλὴν τῶν πέντε λεχθέντων, καταμαθεῖν πάνυ ῥᾴδιον. δύω μὲν γὰρ ἰσόπλευρα τρίγωνα στερεὸν οὐ συνιστᾶσι, διὰ τὸ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύω ἐπιπέδων γωνιῶν τὴν στερεὰν περιέχεσθαι γωνίαν. οὐδὲ μὴν ἕξ, διὰ τὸ τὰς ἓξ τριγωνικὰς γωνίας, ἐξ ὧν τὴν στερεὰν συσταθῆναι δεῖ, ἴσας εἶναι τέσσαρσιν ὀρθαῖς· ἐξ οὗ δῆλον, ὡς οὐδὲ πλείονα, ἢ ἕξ· οὐδὲ δὴ ἑξάγωνα, διὰ τὸ τὰς τρεῖς ἑξαγωνικὰς γω-

(ι) Ὅρα τὴν ἐπιδ. σημ. (κ) Κατὰ τὴν αὐτὴν σημ.

γωνίας ἴσας εἶναι τέσσαρσιν ὀρθαῖς· (ἴση ἡ ἑξαγωνικὴ γωνία ὀρθῇ καὶ τριτημορίῳ ὀρθῆς.) οὐδὲ δὴ ἄλλα κανονικὰ σχήματα ἐπίπεδα, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους στερεὸν περιέξουσι Κανονικόν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύω τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύω τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντη μεταλαμβανόμεναι. καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι. λέγω, ὅτι δυνατὸν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας, εἴτουν ἐκ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΚΗ τρίγωνον συστήσασθαι. σχ. 30.

Εἰ μὲν αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΚΘΗ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. (λ) ὅθεν δῆλον ὅτι ἐξ αὐτῶν συσταθήσεται τρίγωνον. ἔστωσαν δὴ αἱ ῥηθεῖσαι γωνίαι ἄνισοι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεστάτω ἡ ΛΘΚ γωνία ἴση τῇ Ε. καὶ κείσθω ἡ ΘΛ = ΕΖ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΚ, ΛΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΔΕΖ, ΛΘΚ, ἡ μὲν ΕΖ = ΛΘ, (μ) ἡ δὲ ΕΔ = ΘΚ, (ν) καὶ γωνία ἡ ΔΕΖ = ΛΘΚ. (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΔΖ = ΛΚ. (ο) καὶ ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΔΕΖ, ΚΘΗ μεί-

(λ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ α. (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ο) Κατὰ τὴν δ. τοῦ α.

μείζονές εἰσι τῆς ΑΒΓ· (π) ἔστι δὲ ἡ ΛΘΚ ἴση τῇ ΔΕΖ· (ρ) ἄρα καὶ αἱ ΛΘΚ, ΚΘΗ, ὥστε ἡ ΛΘΗ μείζων τῆς ΑΒΓ. ἐν τοῖς τριγώνοις οὖν ΛΘΗ, ΑΒΓ, ἡ μὲν ΛΘ = ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΛΘ τῇ ΕΖ, (σ) ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΒΓ· (τ) ἡ δὲ ΘΗ τῇ ΒΔ, καὶ γωνία ἡ ΛΘΗ μείζων τῆς ΑΒΓ. ἄρα καὶ ἡ ΛΗ μείζων τῆς ΑΓ. (υ) ἀλλ᾽ αἱ ΛΚ, ΚΗ μείζονες τῆς ΛΗ, (φ) πολλῷ ἄρα μείζονες τῆς ΑΓ. δέδεικται δὲ ἡ ΛΚ ἴση τῇ ΔΖ. αἱ ἄρα ΔΖ, ΚΗ μείζονες τῆς λοιπῆς ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ ΑΓ, ΔΖ μείζονες τῆς ΚΗ, καὶ αἱ ΑΓ, ΚΗ μείζονες τῆς ΔΖ. τῶν τριῶν ἄρα ΑΓ, ΔΖ, ΚΗ αἱ δύω μείζονές εἰσι τῆς λοιπῆς, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. δῆλον ἄρα, ὅτι ἐξ αὐτῶν συσταθήσεται τρίγωνον. (χ)

ΛΗΜΜΑ Α΄.

Ἐὰν τρεῖς γωνίαι, αἱ Β, Ε, Θ (χ. 31.) ἐλάσσονες μὲν ὦσι τεσσάρων ὀρθῶν, δύω δὲ τῆς λοιπῆς μείζονες, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· περιέχωνται δὲ ὑπὸ ἴσων εὐθειῶν, τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ, ΘΚ, ΘΗ· καὶ συσταθῇ μὲν ὑπὸ τῶν αὐτὰς ἐπιζευγνυουσῶν τρίγωνον ὁποιονοῦν, οἷον τὸ ΛΜΝ, (χ. 32.) περὶ ὃ κύκλος περιγραφθῇ· ἐφαρμοσθῇ δὲ, ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΘΗ τῇ ΑΒ, ὥστε ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν Β, Ε, Θ στερεὰν γωνίαν συσταθῆναι

(π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκ. (σ) Ὡσαύτως. (τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Κατὰ τὴν κδ. τοῦ α. (φ) Κατὰ τὴν κ. τοῦ α. (χ) Κατὰ τὴν κβ. τοῦ α.

νοι τὴν Ο· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ο σημείου ἀγομένη τῷ κύκλῳ κάθετος ΟΚ ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ πεσεῖται.

Ἔστω πρῶτον ὀξυγώνιον τὸ ΛΜΝ τρίγωνον.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΚΝ, ΚΜ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΟΚΛ γωνία ὀρθή ἐστι, (ψ) τὸ ἄρα $\overline{ΛΟ}^2 = \overline{ΟΚ}^2 + \overline{ΚΛ}^2$. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ $\overline{ΟΝ}^2 = \overline{ΟΚ}^2 + \overline{ΚΝ}^2$. ἀλλ' ἡ $ΛΟ = ΟΝ$. (α) καὶ $\overline{ΛΟ}^2$ ἄρα ἴσον $\overline{ΟΝ}^2$. ἄρα καὶ $\overline{ΟΚ}^2 + \overline{ΚΛ}^2 = \overline{ΟΚ}^2 + \overline{ΚΝ}^2$. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ $\overline{ΟΚ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΚΛ}^2 = \overline{ΚΝ}^2$. ἄρα καὶ $ΚΛ = ΚΝ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΚΜ = ΚΝ$. αἱ τρεῖς ἄρα ΚΛ, ΚΝ, ΚΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. τὸ σημεῖον ἄρα Κ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐστίν. (β) ἡ ἄρα κάθετος ΟΚ ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου κέντρον πίπτει.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ἡ ΟΚ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου πίπτει, κἂν τε ὀρθογώνιον ᾖ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον, (χ. 33.) κἂν ἀμβλυγώνιον. χ. 34.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἡ πλευρὰ ἄρα τῶν τοιούτων ἰσοσκελῶν τριγώνων, οἷον ἡ ΟΝ μείζων τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΝ τοῦ κύκλου, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ τρίγωνον, τὸ ἐκ τῶν βάσεων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων συνιστάμενον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΟΚΝ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ΚΟΝ ὀξεῖα. (γ) ἡ ἄρα ΟΝ μείζων τῆς ΚΝ.

(ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν μζ. τοῦ α. (α) Ἴσαι γὰρ αἱ ΛΟ, ΟΝ ταῖς ΒΓ, ΕΖ. (β) Κατὰ τὴν θ. τοῦ γ. (γ) Κατὰ τὴν β συνέπ. τὴν μετὰ τὴν λβ. τοῦ α.

ΛΗΜΜΑ Β΄.

Δύω δοθεισῶν εὐθειῶν, τῶν ΑΒ, ΑΓ, τρίτη εὑρεθήσεται ἡ ΒΓ, ἧς τὸ τετράγωνον σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ΑΓ τετραγώνῳ ἴσα ἔσονται τῷ ἀπὸ τῆς μείζονος ΑΒ τετραγώνῳ, ἐὰν ἐπὶ τῆς μείζονος ΑΒ ἡμικύκλιον γραφθῇ τὸ ΑΓΒ, κ̀ εἰς αὐτὸ ἐναρμοσθῇ ἡ ἐλάσσων ΑΓ, καὶ ἀπὸ τῦ Γ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΒ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΓΒ γωνία ὀρθή ἐςι, (δ) τὸ ἄρα $\overline{AB}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{\Gamma B}^2$. (ε) χ. 35.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ΄.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύω τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ςερεὰν γωνίαν συςήσασθαι. δεῖ δὴ δὲ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔςωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, χ. 36. 37.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπειλήφθησαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. καὶ συνεςάτω τὸ ΛΜΝ τρίγωνον, ὥςε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΛΝ, τὴν δὲ ΗΚ τῇ ΜΝ. κ̀ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΛΜΝ. κ̀ ἀπὸ τῦ κέντρυ Κ ἐπὶ τὸ Λ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ. κ̀ ἐπεὶ

(δ) Κατὰ τὴν λα. τῦ γ. (ε) Κατὰ τὴν μζ. τῦ α.

ἐπεὶ ἡ ΑΒ, ἡ τȣ̃ ἰσοσκελȣ̃ς ΑΒΓ τριγώνȣ πλευρὰ μείζων τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ΚΛ, (ζ) ἔςαι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον μεῖζον τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΚΛ τετραγώνȣ. κείσθω ἐν εὐθεῖά τις ἡ ΠΡ, ἧς τὸ τετράγωνον σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ΚΛ τετραγώνῳ ἴσα ἔςωσαν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. (η) καὶ ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ Κ ἀνεςάτω ἡ ΚΟ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ ΛΜΝ, καὶ ἴση τῇ ΠΡ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΛ, ΟΝ, ΟΜ. λέγω δὴ, ὅτι γέγονε τὸ ἐπιταχθέν. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΚΝ, ΚΜ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΟΚΛ γωνία ὀρθή ἐςι, (θ) τὸ ἄρα $\overline{ΛΟ}^2 = \overline{ΟΚ}^2 + ΚΛ^2$. (ι) ἔςι δὲ καὶ $ΑΒ^2 = ΟΚ^2 + ΚΛ^2$. (κ) ἄρα $\overline{ΛΟ}^2 = ΑΒ^2$. ὥςε καὶ ἡ $ΛΟ = ΑΒ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΟΜ = ΒΓ$. ἐπεὶ ȣ̃ν ἐν τοῖς τριγώνοις ΛΟΜ, ΑΒΓ, ἡ μὲν $ΛΟ = ΑΒ$, ἡ δὲ $ΟΜ = ΒΓ$, ἔςι δὲ καὶ ἡ $ΛΜ = ΑΓ$. (λ) καὶ γωνία ἄρα ἡ $ΛΟΜ = ΑΒΓ$. (μ) ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ μὲν $ΛΟΝ = ΔΕΖ$, ἡ δὲ $ΝΟΜ = ΗΘΚ$. συνέςη ἄρα ςερεὰ γωνία ἡ Ο ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, αἳ ἴσαι ταῖς δοθείσαις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Ἐὰν ςερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτȣ̃ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐςι.

(ζ) Κατὰ τὴν συνέπ. τȣ̃ α. λήμ. (η) Κατὰ τὸ β λήμ. (θ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ι) Κατὰ τὴν μζ. τȣ̃ α. (κ) Ἐκ τῆς κατασκ ἡ γὰρ $ΠΡ = ΟΚ$. (λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Κατὰ τὴν η τȣ̃ α.

Στερεὸν τὸ ΑΒΓΔΕΖΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω, τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΖΒ, ΑΕ. λέγω Α', ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτῦ ἐπίπεδα παραλληλόγραμμά εἰσι. Β', ὅτι καὶ ἴσα. Χ. 38.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΔΖ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ δύω ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδε τῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ΑΒ, ΓΔ παράλληλοί εἰσι. (ν) πάλιν ἐπεὶ δύω ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδε τῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ΑΔ, ΒΓ παράλληλοί εἰσι. παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ, παραλληλόγραμμόν ἐστι.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΘ παράλληλοί εἰσι ταῖς ΔΓ, ΓΖ, (ξ) ἡ ἄρα γωνία ΑΒΘ = ΔΓΖ. (ο) ἐκῦν ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΘ, ΔΓΖ, ἡ μὲν ΑΒ = ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ = ΓΖ, (π) καὶ γωνία ἡ ΑΒΘ = ΔΓΖ. καὶ τὸ ΑΒΘ ἄρα τρίγωνον ἴσον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ. (ρ) ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τῦ ΑΒΘ τριγώνε, τὸ δὲ ΔΖ τῦ ΔΓΖ. (σ) τὸ ἄρα ΒΗ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΔΖ παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΑΓ = ΗΖ, τὸ δὲ ΖΒ = ΑΕ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον δὲ ὅτι τὰ ἀπεναντίον παραλληλόγραμμα καὶ ὅμοιά εἰσιν. ἔχυσι γὰρ ἴσας τὰς γωνίας, καὶ ἀναλόγυς τὰς πλευράς. ΔΗΜ-

(ν) Κατὰ τὴν ις. τῦ ια. (ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὴν ι. τῦ ια. (π) Κατὰ τὴν λδ. τῦ α. (ρ) Κατὰ τὴν δ. τῦ α. (σ) Κατὰ τὴν μα. τῦ α.

ΛΗΜΜΑ Γ'.

Πᾶν παραλληλεπίπεδον ἐμφαίνεται ὑπὸ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ ὕψους αὐτοῦ καὶ τῆς βάσεως.

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΘΓ, οὗ αἱ ΛΘ, ΒΗ εὐθεῖαι κάθηνται ἐπὶ τῆς βάσεως ΘΖ. πίν. ΚΓ. σχ. 39.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διαιρεθήτωσαν αἱ τῆς βάσεως πλευραὶ ΘΗ, ΗΖ, καὶ τὸ ΓΗ ὕψος εἰς ἴσα ὁποσαοῦν μέρη. οἷον ἡ μὲν ΘΗ, εἰς τέσσαρα, τὰ ΗΙ, ΙΚ, ΚΛ, ΛΘ· ἡ δὲ ΗΖ, εἰς δέκα, τὰ ΗΠ, ΠΨ, κτ. τὸ δὲ ΒΗ, εἰς ὀκτώ, τὰ ΗΦ, ΦΩ, κτ. καὶ ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Ι ἡ ΙΞ παράλληλος τῇ ΗΖ· διὰ δὲ τῶν Ι, Ξ σημείων, ἐπίπεδον τὸ ΙΜΝΞ παράλληλον τῷ ΗΓ ὀρθογωνίῳ. διὰ δὲ τοῦ Π, ἡ ΠΟ παράλληλος τῇ ΗΙ· διὰ δὲ τῶν σημείων Ο, Π, τὸ ΟΣΡΠ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΙΒ· διὰ δὲ τοῦ Φ, ἡ ΦΧ παράλληλος τῇ ΗΙ· διὰ δὲ τῶν σημείων Χ, Φ, τὸ ΧΦΤΥ ἐπίπεδον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν ΙΖ ὀρθογώνιον τεταρτημόριόν ἐστι τοῦ ΘΖ ὀρθογωνίου· τὸ δὲ ΙΓ παραλληλεπίπεδον τοῦ ΘΓ παραλληλεπιπέδου· τὸ γὰρ ὅλον ΘΓ εἰς τέσσαρα διαμερισθήσεται παραλληλεπίπεδα τῷ ΙΓ ἴσα, ἅτε δὴ ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων περιεχόμενα. πάλιν τὸ μὲν ΙΠ ὀρθογώνιον δεκατημόριον μέν ἐστι τοῦ ΙΖ ὀρθογωνίου, τεσσαρακοστημόριον δὲ τοῦ ΘΖ. ὁμοίως τὸ ΙΡ παραλληλεπίπεδον δεκατημόριον μὲν ἐστι τοῦ ΙΓ παραλληλεπιπέδου· ἅτε δὴ διαιρεθῆναι ἔχοντος εἰς δέκα παραλληλεπίπεδα ἴσα τῷ ΙΡ· τεσσαρακοστημόριον δὲ τοῦ ΘΓ, διὰ τὸ εἰς τεσσαράκοντα τοιαῦτα τὸ ὅλον ΘΓ μερίζεσθαι. διὰ τὰ αὐτὰ δή, κύβος ΙΓ ὄγδοον μὲν μέρος τοῦ ΙΡ παραλληλεπιπέδου ἐστί, ὀγδοηκοστὸν δὲ τοῦ ΙΓ, καὶ τριακοσιοεικοστημόριον τοῦ ΘΓ.

ΘΓ. ὅλον ἄρα τὸ ΘΓ παραλληλεπίπεδον ἴσον 320 κύβοις τῷ ΙΓ ἴσοις. ἔστι δὲ τὸ 320 τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ ὕψους ΒΗ, καὶ τῆς βάσεως ΘΖ. τὴν μὲν γὰρ βάσιν ἐμφαίνει ὁ 40 ἀριθμός, τὸ δὲ ὕψος ὁ 8· ὧν τὸ γινόμενον 320. τὸ ἄρα ΘΓ παραλληλεπίπεδον ἐμφαίνεται ὑπὸ τοῦ ΒΗ. ΘΖ, ὅπερ ὑπὸ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπ' ἐναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΗΖ ἐπιπέδῳ τῷ ΚΔ τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπ' ἐναντίον ἐπιπέδοις ΗΒ, ΜΖ. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις, πρὸς τὴν ΔΕ βάσιν, οὕτω τὸ ΗΔ στερεὸν, πρὸς τὸ ΚΖ στερεόν. Σχ. 40.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΗΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ ΑΖ, (τ) τὸ αὐτὸ ἄρα ὕψος ἔχουσι τὰ παραλληλεπίπεδα ΗΔ, ΚΖ. ἐμφαινέτωσαν οὖν τὰ τούτων ὕψη αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΗΑ, ΜΕ. οὐκοῦν ἔσται τὸ μὲν παραλληλεπίπεδον ΗΔ = ΗΑ. ΒΓ, τὸ δὲ ΚΖ = ΜΕ. ΔΕ. (υ) ὡς ἄρα ΗΑ. ΒΓ : ΜΕ. ΔΕ : : ΗΔ : ΚΖ. ἀλλ' ὡς ΗΑ. ΒΓ : ΜΕ ΔΕ : : ΒΓ : ΔΕ. ἐστι γὰρ ἡ ΗΑ = ΜΕ. (φ) ὡς ἄρα ΒΓ : ΔΕ : : ΗΔ : ΚΖ. (χ)

ΠΡΟ

(τ) Κατὰ τὸν ιδ. ὁρισ. τοῦ ια. (υ) Κατὰ τὸ γ. λῆμ. (φ) Κατὰ τὴν η. τοῦ ε. (χ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε.