ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔςω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη, ἡ ΑΒ. σχ. 39.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε, ὥςε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης ΑΒ καὶ τῦ ἑτέρυ τῶν τμημάτων ΒΕ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ τῦ λοιπῦ τμήματος ΑΕ τετραγώνῳ. (ψ) λέγω, ὅτι γέγονε τὸ ἐπιταχθέν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ τὸ ΑΒ. ΒΕ=ΑΕ. ΑΕ, (ω) ὡς ἄρα ΑΒ: ΑΕ:: ΑΕ : ΒΕ. (α) ἡ δοθεῖσα ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται. (β)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινύσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχυσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἔςω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ΒΑΓ γωνίαν. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις, τετέςιν ὅτι Ρ=Ξ+Χ. σχ. 40.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἡ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ.

ΔΕΙ-

(ψ) Κατὰ τὴν ια. τῦ β. (ω) Ἐκ τῆς κατασκ. (α) Κατὰ τὴν ς. τῦ ς. (β) Κατὰ τὴν γ. ὁρισμ. τῦ ς.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ΓΒ : ΒΑ :: ΒΑ : ΒΔ. (γ) ἡ ἄρα ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. (δ) ἀλλὰ καὶ τὸ Ρ πρὸς τὸ Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. (ε) ὡς ἄρα Ρ : Ξ :: ΓΒ : ΒΔ. (ζ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς Ρ : Χ :: ΓΒ : ΓΔ. ἄρα καὶ ὡς Ρ : Ξ + Χ :: ΓΒ : ΒΔ + ΓΔ. (η) ἀλλὰ ἡ ΓΒ = ΒΔ + ΓΔ. ἄρα καὶ τὸ Ρ = Ξ + Χ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ΄.

Ἐὰν δύω τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύω πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Ἔστω δύω τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύω πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ταῖς ΔΓ, ΔΕ, ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς ΑΒ : ΑΓ :: ΔΓ : ΔΕ. καὶ συντεθέντα κατὰ μίαν γωνίαν, τὴν πρὸς τῷ Γ, ἐχέτωσαν τὴν μὲν ΑΒ παράλληλον τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. σχ. 41.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία Α = Χ. (θ) ἀλλὰ καὶ ἡ Δ = Χ. (ι) ἄρα ἡ Α = Δ. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΒΑ : ΑΓ :: ΔΓ : ΔΕ. (κ) ἰσο-

(γ) Κατὰ τὴν α συνέπ. τὴν μετὰ τὴν η. τοῦ ϛ. (δ) Κατὰ τὸ β. πόρ. τὸ μετὰ τὴν η. τοῦ ε. (ε) Κατὰ τὴν κ. τοῦ ϛ. (ζ) Κατὰ τὸ ζ. θεώρ. τὸ μετὰ τὸ ε. βιβλ. (η) Κατὰ τὴν κγ. τοῦ ε. (θ) Κατὰ τὴν κθ. τοῦ α. (ι) Κατὰ τὴν αὐτήν. (κ) Ἐξ ὑποθ.

ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ. (λ) ἄρα ἡ γωνία ἡ Β = ω. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι ω + χ + ν = Β + Α + ν. ἀλλὰ αἱ Β + Α + ν δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. (μ) ἄρα ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ αἱ ω + χ + ν. ἡ ἄρα ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΕ. (ν) ο. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν Κ, Λ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ΑΚΓ, ΔΛΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. λέγω, Α'. ὅτι ὡς ἡ ΑΓ περιφέρεια, πρὸς τὴν ΔΖ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΑΚΓ γωνία, πρὸς τὴν ΔΛΖ γωνίαν, καὶ ἡ ΑΒΓ πρὸς τὴν ΔΕΖ. Β'. ὅτι ὁ ΑΚΓ τομεύς, πρὸς τὸν ΔΛΖ τομέα, οὕτως ἡ ΑΓ περιφέρεια, πρὸς τὴν ΔΖ περιφέρειαν. χ. 42.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διῃρήσθω ἡ ΑΓ εἰς ὁποσαδήποτε ἴσα μέρη, τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΓ, ὁμοίως καὶ ἡ ΔΖ, εἰς τὰ ΔΜ, ΜΖ. (ξ) καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΗ, ΚΘ, ΚΙ, ΛΜ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΑΚΗ, ΗΚΘ, ΘΚΙ, ΙΚΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, (ο) τοσαύτας ἄρα ἴσας γωνίας περιέχει ἡ ΑΚΓ

(λ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ ς. (μ) Κατὰ τὴν λβ. τοῦ α. (ν) Κατὰ τὴν ιδ. τοῦ α. (ξ) Κατὰ τὴν λ. τοῦ γ. (ο) Κατὰ τὴν κζ. τοῦ γ.

ΑΚΓ γωνία, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας περιέχει τὸ ΑΓ τόξον. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοσαύτας ἴσας γωνίας περιέχει ἡ ΔΛΖ γωνία, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας τὸ ΔΖ τόξον. ὡς ἄρα ΑΓ : ΑΚΓ :: ΔΖ : ΔΛΖ. ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΑΓ : ΔΖ :: ΑΚΓ : ΔΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΚΓ διπλασία ἐςὶ τῆς ΑΒΓ, ἡ δὲ ΔΛΖ τῆς ΔΕΖ, (π) ἔςιν ἄρα ὡς ΑΚΓ : ΑΕΓ :: ΔΛΖ : ΔΕΖ. (ρ) ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΑΚΓ : ΔΛΖ :: ΑΒΓ : ΔΕΖ. ἄρα καὶ ὡς ΑΓ : ΔΖ :: ΑΒΓ : ΔΕΖ. (σ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Οἱ τομεῖς ΑΚΗ, ΗΚΘ, ΘΚΙ, ΙΚΓ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν, ὡς δῆλον. τοσούτους ἄρα ἴσους τομεῖς περιέχει ὁ ΑΚΓ τομεὺς, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας τὸ ΑΓ τόξον. ὡσαύτως τοσούτους ἴσους τομεῖς περιέχει ὁ ΔΛΖ τομεὺς, ὅσα ἴσα μέρη τῆς ὅλης περιφερείας τὸ ΔΖ τόξον. ὡς ἄρα τομεὺς ΑΚΓ, πρὸς ΑΓ τόξον, οὕτω ΔΛΖ τομεὺς, πρὸς ΔΖ τόξον. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΑΚΓ : ΔΛΖ :: ΑΓ : ΔΖ.

ΒΙΒΛΙΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Στερεόν ἐςι, τὸ μῆκος, καὶ πλάτος, καὶ βάθος ἔχον.

Β'. Στερεοῦ πέρας, ἐπιφάνεια.

Γ'. Εὐθεῖα, ἡ ΑΒ πρὸς ἐπίπεδον τὸ ΖΔ ὀρθή ἐςιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῇ εὐθείας, τὰς

(π) Κατὰ τὴν κ. τοῦ γ. (ρ) Κατὰ τὴν η. τοῦ ε. (σ) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ε.

τας ΖΔ, ΓΕ, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τῷ ΖΔ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας, οἷον τὰς ΑΒΓ, ΑΒΕ, ΑΒΔ, ΑΒΖ. πίν. Κ. χ. 1.

Δ'. Ἐπίπεδον, τὸ ΕΗ, πρὸς ἐπίπεδον, τὸ ΑΓ, ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τομῇ, τῇ ΕΖ, πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι, αἱ ΟΚ, ΠΞ, ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ ΕΗ, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ, τῷ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν. χ. 2.

Ε'. Εὐθείας, τῆς ΑΒ, πρὸς ἐπίπεδον, τὸ ΔΕ, κλίσις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος, τοῦ Α, τῆς εὐθείας ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΕ κάθετος ἀχθῇ, ἡ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου σημείου Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος Β τῆς εὐθείας, εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀξεῖα γωνία, ἡ ΑΒΓ. χ. 3.

ϛ'. Ἐπιπέδου, τοῦ ΕΚ, πρὸς ἐπίπεδον, τὸ ΑΓ κλίσις ἐστὶν ἡ ὀξεῖα γωνία ΘΖΕ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΘΖ, ΕΖ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ΒΔ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ Ζ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων. χ. 4.

Ζ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

Η'. Παράλληλα ἐπίπεδα ἐστὶ τὰ ἀσύμπτωτα.

Θ'. Ὅμοια στερεὰ σχήματα ἐστὶ τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τὸ πλῆθος.

Ι'. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ΙΑ'. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ Β, ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν, οἷον τῶν ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΑ, περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων, τῷ Β. χ. 5.

ΙΒ'.

ΙΒ΄. Στερεαὶ γωνίαι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ἴσων ϰ͵ ἰσαριθμων ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχόμεναι.

ΙΓ΄. Πρίσμα ἐςὶ σχῆμα ςερεὸν, οἷον τὸ ΑΒΓΗΕΖ, ἢ τὸ ΑΔΘΙΓΗΕΚΖΛΜ, ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύω τὰ ἀπεναντίον, οἷον τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ, ἢ τὰ ΑΔΒΘΙΓ, ΗΕΚΖΛΜ ἴσα τε ϰαὶ ὅμοιά ἐςι ϰαὶ παράλληλα. χ. 6. ϰαὶ 7.

ΙΔ΄. Παραλληλεπίπεδον ἐςὶ σχῆμα ςερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραπλεύρων περιεχόμενον, ὧν τὰ ἀπ᾽ ἐναντίον παράλληλα. χ. 8.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέντι ἐκ ἔςιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

Εἰ δυνατὸν εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔσω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΖ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεώρῳ. χ. 9.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῆς ἄρα ΑΒΓ εὐθείας τὰ ἄκρα ἐκ ἐπιπροσθεῖ τοῖς μέσοις, ἐδὲ δὴ αὐτὴ ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα ἐξ ἴσȣ τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται, ἐδὲ ἡ ἐλαχίςη ἐςὶ τῶν τὰ αὐτὰ ἐχȣσῶν πέρατα Α, ϰ͵ Γ. ἐκ ἄρα εὐθεῖα ἡ ΑΒΓ. (α) ἐκ ἄρα εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Ἐὰν δύω εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ. ϰαὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐςὶν ἐπιπέδῳ.

(α) Κατὰ τὸν γ. ὁρισμ. τȣ α.

Δύω εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον. λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Σχ. 10.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε, εἰ ἐν τῷ αὐτῷ οὐκ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, μέρος μέν τι αὐτῶν ἔσται ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, μέρος δέ τι ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἀδύνατον. (β) αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Ἐὰν δύω ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι.

Δύω ἐπίπεδα τὰ ΑΓ, ΗΘ τεμνέτωσαν ἄλληλα· κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμή. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ γραμμή, εὐθεῖά ἐστιν. εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐν μὲν τῷ ΑΓ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖα ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΗΘ, ἡ ΔΖΒ. Σχ. 11.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ ἄρα εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ εὐθεῖαί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἔσται, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς. ἡ ΔΒ ἄρα γραμμή, εὐθεῖά ἐστι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα

(β) Κατὰ τὴν α. πρότ. τοῦ ια.

Εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ δύω εὐθείαις, ταῖς ΑΒ, ΓΔ, τεμνέσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Χ. ΙΑ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπειλήφθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις. καὶ διήχθω διὰ τῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ. καὶ ἀπὸ τυχόντος τῆς ΖΕ σημείου τῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΕΑΔ, ΕΓΒ, ἡ μὲν ΕΔ = ΕΓ, ἡ δὲ ΕΑ = ΕΒ, (γ) καὶ γωνία ἡ ΑΕΔ = ΓΕΒ. (δ) ἄρα καὶ ἡ ΑΔ = ΓΒ, καὶ γωνία ἡ μὲν ΔΑΕ = ΓΒΕ, ἡ δὲ ΑΔΕ = ΒΓΕ. (ε) Ἐν τοῖς τριγώνοις ὧν ΑΕΗ, ΒΕΘ, ἡ μὲν γωνία ΗΑΕ = ΕΒΘ, ὡς δέδεικται, ἡ δὲ ΑΕΗ = ΒΕΘ, (ζ) ἡ δὲ ΑΕ = ΕΒ. (η) ἄρα καὶ ἡ ΑΗ = ΒΘ, καὶ ἡ ΕΗ = ΕΘ. (θ) ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΓΕ, ΖΔΕ, ἡ μὲν ΕΓ = ΕΔ, ἡ δὲ ΕΖ κοινή, καὶ γωνία ἡ ΖΕΓ = ΖΕΔ, (ι) ἄρα καὶ ἡ ΖΓ = ΖΔ. (κ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΑ = ΖΒ. ὁκῦν ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΓΒ, ΖΑΔ, ἡ μὲν ΖΓ = ΖΔ, ἡ δὲ ΖΒ = ΖΑ, ἡ δὲ ΓΒ = ΑΔ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΖΒΓ = ΖΑΔ. ἐν τοῖς τριγώνοις ἄρα ΖΑΗ, ΖΒΘ, ἡ μὲν ΑΗ = ΒΘ, ἡ δὲ ΑΖ = ΖΒ, καὶ γωνία ἡ ΖΑΗ = ΖΒΘ. ἄρα καὶ ἡ ΖΗ = ΖΘ. ἐν τοῖς τριγώνοις ὧν ΖΗΕ, ΖΘΕ, ἡ μὲν ΖΗ = ΖΘ, ἡ δὲ ΗΕ = ΘΕ, ἡ δὲ ΕΖ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΖΕΗ = ΖΕΘ. (λ) ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν

 ΖΕΗ,

(γ) Ἐκ τῆς κατασκ. (δ) Κατὰ τὴν ιε. τῦ α. (ε) Κατὰ τὴν δ. τῦ α. (ζ) Κατὰ τὴν ιε. τῦ α. (η) Ἐκ τῆς κατασκ. (θ) Κατὰ τὴν κς. τῦ α. (ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν δ. τῦ α. (λ) Κατὰ τὴν η. τῦ α.

ΖΕΗ, ΖΕΘ. ἡ ἄρα ΖΕ κάθετός ἐστι τῇ ΗΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΖΕ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῇ εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἡ ἄρα ΖΕ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. (μ) ἀλλὰ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ τρισὶν εὐθείαις, ταῖς ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἐφεστάτω. λέγω, ὅτι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ τῷ ΘΚ. χ. 13.

ΔΕΙΞΙΣ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τῷ ΘΚ, ἡ δὲ ΒΓ ἐν μετεώρῳ τῷ ΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ κάθετός ἐστι ταῖς ΒΔ, ΒΕ, (ν) κάθετός ἐστι καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ, (ξ) εἴτουν τῷ ΘΚ. κάθετος ἄρα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΒΖ. (ο) ἡ ἄρα γωνία ΑΒΖ ὀρθή ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒΓ ὀρθή. (π) ἡ ἄρα ΑΒΖ=ΑΒΓ. τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ ἐν μετεώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι, αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

ΠΡΟ-

(μ) Κατὰ τὸν γ. ὁρισμ. τῦ ια. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὴν δ τῦ ια. (ο) Κατὰ τὸν γ. ὁρισμ. τῦ ια. (π) Ἐξ ὑποθ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Δύω εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τῷ ΕΖ, πρὸς ὀρθὰς ἔςωσαν. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐςιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. χ. 14.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τοῦ σημείου Β, καθ' ὃ ἡ ΑΒ τῷ ἐπιπέδῳ ΕΖ συμβάλλει, ἐπὶ τὸ Δ, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ΓΔ, ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΓΔΒ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. (ϱ) ἡ ἄρα ΑΒ παράλληλός ἐςι τῇ ΓΔ. (σ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Ἐὰν ὦσι δύω εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐςὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἔςωσαν δύω εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ ΑΒ, ΓΔ. καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐςὶ ταῖς παραλλήλοις. πίν. ΚΑ. χ. 15.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔςω ἐν τῷ μετεώρῳ, ὡς ἡ ΕΗΖ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω ἐν τῷ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδῳ ἡ ΕΖ.

(ϱ) Ἐξ ὑποθ. (σ) Κατὰ τὴν κη. τοῦ α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δύω ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἄρα ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη οὐκ ἔστιν ἐν μετεώρῳ ἐπιπέδῳ. ἄρα ἐν τῷ τῶν παραλλήλων, ΑΒ, ΓΔ ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

Ἰστέον δὲ, ὅτι ἀληθὴς ἡ πρότασις, κἂν μὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι ὦσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Ἐὰν ὦσι δύω εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσαι.

Ἔστωσαν δύω εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΘΖ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. λέγω, ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ, ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΘΖ πρὸς ὀρθὰς ἔσαι. χ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΘΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ. καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΔ, ΒΔΕ, ἡ μὲν ΑΒ = ΔΕ, (τ) ἡ δὲ ΒΔ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΑΒΔ = ΒΔΕ· ἑκατέρα γὰρ ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ΑΔ = ΒΕ. (υ) οὐκοῦν ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΕ, ΑΔΕ, ἡ μὲν ΑΒ = ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ = ΑΔ, ἡ δὲ ΑΕ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΒΕ = ΑΔΕ. (φ) ἀλλ' ἡ ΑΒΕ ὀρθή. (χ) ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔΕ. ἡ ΕΔ ἄρα κάθετός ἐσι ταῖς ΑΔ, ΔΒ. καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΒ, κάθετός ἐστιν ἡ ΕΔ

(τ) Ἐκ τῆς κατασκ. (υ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ α. (φ) Κατὰ τὴν η. τοῦ α. (χ) Ἐξ ὑποθ.

ΕΔ. (ψ) ἔστι δὲ ἡ ΓΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΒ. (ω) ἡ ΕΔ ἄρα κάθετός ἐστι καὶ τῇ ΓΔ. (α) ἡ γωνία ἄρα ΓΔΕ ὀρθή ἐστιν· ὀρθὴ δὲ καὶ ἡ ΓΔΒ. (ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒΔ, ΓΔΒ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (β) καὶ ἡ ΑΒΔ ὀρθή. (γ) ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΔΒ.) ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς ΔΒ, ΔΕ. ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΒ, ΔΕ ἐπιπέδῳ. (δ) ἔστι δὲ τὸ διὰ τῶν ΔΒ, ΔΕ ἐπίπεδον, τὸ ΘΖ. ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ἐπιπέδῳ ΘΖ. ὃ. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος τῇ ΕΖ, μὴ οὖσα αὐταῖς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Σχ. 17.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΘ· ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΓΔ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΕΖ κάθετός ἐστι τῷ ἐπιπέδῳ ΘΗΚ. (ε) ἀλλ' ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος τῇ ΕΖ. (ζ) ἑκατέρα ἄρα αὐτῶν κάθετος τῷ ΗΘΚ ἐπιπέδῳ. (η) αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι. (θ) ὃ ἔδει δεῖξαι.

(ψ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ ια. (ω) Κατὰ τὴν β. τοῦ ια. (α) Κατὰ τὸν γ. ὁρισμ. τοῦ ια. (β) Κατὰ τὴν κθ. τοῦ ια. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ ια. (ε) Κατὰ τὴν δ. τοῦ ια. (ζ) Ἐξ ὑποθ. (η) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (θ) Κατὰ τὴν ς. τοῦ ια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων, δυσὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι.

Δύω εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων, αἱ ΑΒ, ΒΓ, δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἁπτομέναις ἀλλήλων, παράλληλοι ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓ γωνία τῇ ΔΕΖ. Σχ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπειλήφθω ἡ μὲν ΒΓ = ΕΖ, ἡ δὲ ΒΑ = ΕΔ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, ΑΓ, ΔΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΓ ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ ΕΖ. (ι) ἄρα καὶ ἡ ΓΖ ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ ΒΕ. (κ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τῇ ΒΕ ἴση τε καὶ παράλληλος ἡ ΑΔ. καὶ αἱ ΓΖ, ΑΔ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι. (λ) καὶ ἡ ΑΓ ἄρα ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ ΔΖ. (μ) ἐπεὶ ἐν τοῖς τριγώνοις ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἡ μὲν ΒΓ = ΕΖ, ἡ δὲ ΒΑ = ΕΔ, ἡ δὲ ΑΓ = ΔΖ. ἄρα καὶ γωνία ἡ ΑΒΓ = ΔΕΖ. (ν) ο. ε. δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω

(ι) Ἐκ τῆς κατασκ. καὶ ἐξ ὑποθ. (κ) Κατὰ τὴν λγ. τοῦ α. (λ) Κατὰ τὸ. α. ἀξ. τοῦ α. καὶ τὴν προλ. πρότ. (μ) Κατὰ τὴν λγ. τοῦ α. (ν) Κατὰ τὴν η. τοῦ α.

Ἔσω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α. τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ ΕΜ. σχ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΜ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΒΓ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. (ξ) εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δ᾽ οὔ, ἤχθω τῇ ΒΔ κάθετος ἡ ΔΖ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΖ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΗ. (ο) λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ΕΜ. ἤχθω γὰρ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΗΘ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΔ κάθετός ἐστι τῶν ΑΔ, ΔΖ. (π) ἄρα κάθετός ἐστι καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἐπιπέδῳ. (ρ) καὶ ἡ ΘΗ ἄρα παράλληλος οὖσα τῇ ΒΔ, (σ) κάθετός ἐστι τῷ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ἐπιπέδῳ. (τ) κάθετος ἄρα ἡ ΘΗ καὶ τῇ ΑΗ τῇ οὔσῃ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΖ. (υ) ἡ ἄρα ΑΗ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΗΘ, ἔστι δὲ πρὸς ὀρθὰς καὶ τῇ ΗΖ, (φ) πρὸς ὀρθὰς ἄρα ἐστὶ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΖ. (χ) ἀλλὰ τὸ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΖ ἐπίπεδον, ἐστὶ τὸ ὑποκείμενον ΕΜ. ἡ ἄρα ΑΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ΕΜ ἐπίπεδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

(ξ) Κατὰ τὴν ιβ. τοῦ α. (ο) Κατὰ τὴν αὐτήν. (π) Ἐκ τῆς κατασκ. (ρ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ ια. (σ) Ἐκ τῆς κατασκ. (τ) Κατὰ τὴν η. τοῦ ια. (υ) Κατὰ τὸν γ. ὁρισμ. τοῦ ια. (φ) Ἐκ τῆς κατασκ. (χ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ ια.

Ἔςω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον, το ΕΜ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον, τὸ Α. χ. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Νενοήσθω τὶ σημεῖον μετέωρον, τὸ Β. κὴ ἀπὸ τȣ̃ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ. κὴ διὰ τȣ̃ Α σημείȣ ἤχθω ἡ ΑΔ παράλληλος τῇ ΒΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ κάθετός ἐςι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΜ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΒΓ κάθετός ἐςι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΜ. (ψ) ἀλλὰ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΔ. (ω) κὴ ἡ ΑΔ ἄρα καθετός ἐςι τῷ ὑποκειμένῳ ΕΜ ἐπιπέδῳ. (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύω εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἐκ ἀναςήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ Δ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΕΖ δύω εὐθεῖαι αἱ ΔΘ, ΔΗ πρὸς ὀρθὰς ἀνεςάθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Θ, Η. χ. 21.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω τὸ διὰ τῶν ΔΘ, ΔΗ ἐπίπεδον, τὸ ΘΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΘΔΚ γωνία ὀρθή ἐςιν. ἀλλὰ κὴ ἡ ΗΔΚ ὀρθή. ἡ ἄρα ΘΔΚ = ΗΔΚ. τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. ἐκ ἄρα ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύω εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναςαθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Οὔτε μὴν ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ μετεώρȣ, τȣ̃ Β, δύω εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀχθήσονται.

ἤχθω-

(ψ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκ. (α) Κατὰ τὴν 8. τȣ̃ ια.

ἤχθωσαν γὰρ εἰ δυνατὸν αἱ ΒΑ, ΒΓ. (χ. τὸ αὐτ.) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. οὐκοῦν αἱ τοῦ ΒΑΓ τριγώνου γωνίαι μείζονες δύω ὀρθῶν. ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω. λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα. χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Θ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΘΗ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΒΗ, ΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΘΗ παράλληλος τῇ ΑΒ· (β) ἔστι δὲ ἡ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ· (γ) καὶ ἡ ΘΗ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ. (δ) ὀρθὴ ἄρα ἡ Θ γωνία. ἐν τοῖς τριγώνοις οὖν ΑΘΗ, ΑΒΗ, ἡ μὲν γωνία Θ = Β, ἡ δὲ ΑΗΘ = ΗΑΒ, (ε) ἡ δὲ ΑΗ κοινή. ἄρα καὶ ἡ ΘΗ = ΑΒ. (ζ) ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι πᾶσαι αἱ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων παράλληλοι τῇ ΑΒ, πρός τε ὀρθάς εἰσι τοῖς ἐπιπέδοις, καὶ ἀλλήλαις ἴσαι. τὰ ἄρα ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἀσύμπτωτά εἰσιν. ἄρα παράλληλα. (η)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων περὶ δύω εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων παράλλη-

(β) Ἐκ τῆς κατασκ. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν η. τοῦ ια. (ε) Κατὰ τὴν κθ. τοῦ α. (ζ) Κατὰ τὴν κς. τοῦ α. (η) Κατὰ τὸν η. ὁρισμ. τοῦ ια.