ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεστάτω ἡ μὲν ΖΔΗ, γωνία ἴση ἑποτέρᾳ τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἡ δὲ ΔΖΗ τῇ ΑΓΒ. (ω) λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση (α)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΔΗΖ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΑΓ :: ΔΗ : ΔΖ. (β) ἀλλ' ὡς ΑΒ : ΑΓ :: ΕΔ : ΔΖ. (γ) ὡς ἄρα ΕΔ : ΔΖ :: ΔΗ : ΔΖ. (δ) ἄρα ἡ ΕΔ = ΔΗ. (ε) ἐν τοῖς τριγώνοις ἓν ΔΕΖ, ΔΖΗ, ἡ μὲν ΔΕ = ΔΗ, ἡ δὲ ΔΖ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΕΔΖ = ΖΔΗ. (ζ) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΔΖΕ = ΔΖΗ, καὶ ἡ ΔΕΖ = ΔΗΖ (η) ἀλλ' ἡ μὲν ΔΖΗ = ΑΓΒ, (θ) ἡ δὲ ΔΗΖ = ΑΒΓ, (ι) ἄρα ἡ μὲν ΑΓΒ = ΔΖΕ, ἡ δὲ ΑΒΓ = ΔΕΖ, ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Ἐὰν δύω τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἔστω δύω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ΒΑΓ γωνίαν τῇ ΕΔΖ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας, τὰς ΑΒΓ,

---

(ω) Κατὰ τὴν κγ. τῦ α. (α) Κατὰ τὴν ζ. συνίπ. τῆς λβ. τῦ α. (β) Κατὰ τὴν δ. τῦ ϛ. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν ι. τῦ ε. (ε) Κατὰ τὴν β. τῦ ε. (ζ) Ἐκ τῆς κατασκ. (η) Κατὰ τὴν δ. τῦ β. (θ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ι) Κατὰ τὴν [illegible] συνίπ.

ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἤγουν ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ. τῶν δὲ λοιπῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ σημείοις ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς. λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἔσται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. καὶ ἴση ἔσται ἡ ΑΒΓ γωνία τῇ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση. πίν. ΙΖ. σχ. 7.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒΓ γωνία τῇ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒΓ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεστάτω ἡ ΑΒΗ γωνία ἴση τῇ ΔΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΗ, ΔΕΖ ἡ μὲν γωνία Α = Δ, (κ) ἡ δὲ ΑΒΗ = ΔΕΖ. (λ) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗΒ ἴση λοιπῇ τῇ ΔΖΕ. ἰσογώνια ἄρα τὰ ΑΒΗ, ΔΕΖ τρίγωνα. ἄρα ὡς ΑΒ : ΒΗ :: ΔΕ : ΕΖ. (μ) ἀλλ᾽ ὡς ΔΕ : ΕΖ :: ΑΒ : ΒΓ. (ν) ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΗ :: ΑΒ : ΒΓ. (ξ) ἡ ἄρα ΒΗ = ΒΓ. (ο) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΒΗΓ = ΒΓΗ. (π) ἐὰν οὖν ἑκατέρα τῶν Γ, Ζ γωνιῶν ἐλάσσων ὀρθῆς, καὶ ἡ ΒΗΓ ἔσται ἐλάσσων ὀρθῆς· καὶ γὰρ ἡ Γ = ΒΗΓ, ὡς δέδεικται. ἀλλ᾽ αἱ ΒΗΓ, ΒΗΑ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ρ) ἡ ἄρα ΒΗΑ, ἤγουν ΑΗΒ μείζων ὀρθῆς, καὶ ἡ Ζ ἄρα μείζων ὀρθῆς· δέδεικται γὰρ ἡ ΑΗΒ = Ζ. ἡ ἄρα Ζ γωνία καὶ μείζων καὶ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν δὲ ἑκατέρα τῶν Γ, Ζ μείζων ὀρθῆς, ἐπεὶ ἡ ΒΗΓ = ΒΓΗ, ὡς δέδεικται· αἱ δύω ἄρα γωνίαι ΒΗΓ, ΒΓΗ τοῦ τριγώνου ΗΒΓ μείζονες δύω ὀρθῶν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ ἄνισος τῇ

(κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ ϛ. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (ο) Κατὰ τὴν β. τοῦ ε. (π) Κατὰ τὴν ε. τοῦ α. (ρ) Κατὰ τὴν ιγ. τοῦ α.

τῇ ΔΕΖ. ἄρα ἴση. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση. ἰσογώνια ἄρα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐςι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔςω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ΒΑΓ γωνίαν. καὶ ἤχθω ἀπὸ τῆς Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι ὅμοιόν ἐςιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ, καὶ ἔτι ἀλλήλοις. Σχ. 8.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ, ΑΒΔ, ἡ μὲν γωνία ΒΑΓ = ΒΔΑ, (σ) ἡ δὲ πρὸς τῷ Β κοινή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπῇ τῇ ΒΑΔ ἴση. (τ) ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ἀνάλογον ἔχει τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας, (υ) ὅμοιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. (φ) ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅμοιόν ἐςι τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων, ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐςι. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν γωνία ΒΔΑ = ΑΔΓ, (χ) ἡ δὲ ΒΑΔ = Γ, ὡς δέδεικται, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β, λοιπῇ τῇ ΔΑΓ ἴση. ἰσογώνιον ἄρα καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἄρα ὅμοιον. (ψ)

ΣΥ.

(σ) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν β. συνέπ. τῆς λβ. τῦ α. (υ) Κατὰ τὴν δ. τῦ ϛ. (φ) Κατὰ τὸν α. ὁρισμ. τῦ ϛ. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν δ. καὶ τὸν α. ὁρισμ. τῦ ϛ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογός ἐστιν. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΔΓ, ΑΔΓ ὡς ΒΔ : ΔΓ : : ΔΓ : ΔΑ. καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογός ἐστι. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ, ὡς ΒΑ : ΑΓ : : ΑΓ : ΑΔ. ὡσαύτως διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΒΓ, ὁμοιότητα, ὡς ΑΒ : ΒΓ : : ΒΓ : ΒΔ.

Β'. Ἡ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Γ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΓΒ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΑΒ ἀγομένη ΓΔ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς διαμέτρου τμημάτων ΑΔ, ΔΒ, ἤτουν ἐστὶν ὡς ΑΔ : ΔΓ : : ΔΓ : ΔΒ. ἢ $ΔΓ^2 = ΑΔ.\ ΔΒ$. (ω) ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ΑΓ, ΓΒ εὐθειῶν, ἡ γωνία ΑΓΒ ὀρθή ἐστι. (α) τὸ ἄρα ΑΓΒ τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστιν. ἐξ οὗ δῆλον τὸ προκείμενον.

Γ'. Ἐὰν τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τινὶ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τὸ ἀπὸ τῶν τμημάτων ΑΔ, ΔΒ τῆς ΑΒ ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, ἤτουν ἐὰν ᾖ $ΓΔ^2 = ΑΔ.\ ΑΒ$, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἔσται ἡ ΑΓΒ γωνία ὀρθή. ἐπεὶ γὰρ $ΓΔ^2 = ΑΔ.\ ΔΒ$, (β) ὡς ἄρα ΑΔ : ΓΔ : : ΓΔ : ΔΒ. τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΔΓ, ΒΔΓ ἀνάλογον ἔχει τὰς πλευράς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας ΓΔΑ, ΓΔΒ. ἡ ἄρα γωνία $ΓΑΔ = ΒΓΔ$. (γ) ἀλλ' ἡ ΓΑΔ σὺν τῇ ΑΓΔ ἴση μιᾷ ὀρθῇ. (δ) ἄρα καὶ ἡ ΒΓΔ σὺν τῇ ΑΓΔ ἴση μιᾷ ὀρθῇ. ἡ ἄρα ΑΓΒ ὀρθή ἐστιν.

Λ Δ'.

(ω) Κατὰ τὴν ς. τοῦ ε. (α) Κατὰ τὴν λα. τοῦ γ. (β) Ἐξ ὑποθ.
(γ) Κατὰ τὴν ς. τοῦ ς. (δ) Κατὰ τὴν δ. συνεπ. τῆς λβ. τοῦ α.

Δ΄. Ἐὰν διαμέτρῳ τῇ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΓΒ ὑποτεινέσῃ πλευρᾷ ΑΒ τῦ ΑΒΓ τριγώνυ κύκλος γραφῇ, διὰ τῦ Γ ἥξει. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ὕπερθεν, ἢ ἔνερθεν τῦ Γ ἥξει. ἡκέτω δὴ ὕπερθεν. (σχ. 10.) ϗ ἐκβληθεῖσα ἡ ΒΓ, συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ζ. ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ἡ ἄρα ΑΖΒ γωνία ὀρθή. (ε) ἀλλὰ ϗ ἡ ΑΓΒ ὀρθή. (ζ) ἡ ἄρα ΑΖΒ = ΑΓΒ, ὅπερ ἀδύνατον. (η) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὐδὲ ἔνερθεν τῦ Γ (σχ. 11.) ὁ κύκλος ἥξει. ἔσαι γὰρ πάλιν ἡ ΑΖΒ ἴση τῇ ΑΓΒ, ὅπερ ἀδύνατον. (θ) ἥξει ἄρα ὁ κύκλος διὰ τῦ Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προςαχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔσω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. ϗ ἐπιτετάχθω ἀφελεῖν ἀπ' αὐτῆς μέρος τὸ τρίτον. σχ. 12.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Διήχθω τὶς εὐθεῖα ἀπὸ τῦ Α ἡ ΑΓ, γωνίαν περιέχυσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχῦσαν. καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ, τὸ Δ. ϗ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τῦ Δ παράλληλος ἤχθω τῇ ΒΓ ἡ ΔΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΖ τρίτον μέρος ἐςὶ τῆς ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΖΔ παράλληλος τῇ ΒΓ, ὡς ἄρα ΓΔ : ΔΑ :: ΒΖ : ΖΑ. (ι) ἀλλ' ἡ ΓΔ διπλασία τῆς ΑΔ, διπλασία ἄρα ϗ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ. τριπλασία ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΖΑ. τρίτον ἄρα μέρος τῆς ΒΑ ἡ ΖΑ.

ΠΡΟ-

(ε) Κατὰ τὴν λα. τῦ γ. (ζ) Ἐξ ὑποθ. (η) Κατὰ τὴν ις. τῦ α. (θ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ι) Κατὰ τὴν β. τῦ ϛ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, ἡ ΑΓ, χ. 13.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ, ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. καὶ διὰ τῶν Δ, Ε σημείων τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται κατὰ τὰ Ζ, Η σημεῖα. ἤχθω γὰρ ἡ ΔΚ παράλληλος τῇ ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΔΚΓ ἡ ΘΕ παράλληλος τῇ ΚΓ, ὡς ἄρα ΓΕ : ΕΔ :: ΚΘ : ΘΔ. (κ) ἀλλ' ἡ μὲν ΚΘ = ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ = ΗΖ. (λ) ὡς ἄρα ΓΕ : ΕΔ :: ΒΗ : ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΗΕ ἡ ΖΔ τῇ ΗΕ παράλληλος, ἄρα ὡς ΕΔ : ΔΑ :: ΗΖ : ΖΑ. ἡ ἄρα ἄτμητος ΑΒ τῇ τετμημένῃ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι πάνυ ῥάδιον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ἐν τοσούτοις ἴσοις τεμεῖν μέρεσιν, ὅσοις ἄν τις ἐπιτάξῃ. διήχθω γὰρ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀόριστον ἡ ΑΓ γωνίαν τυχοῦσαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ. καὶ κείσθωσαν ἴσαι τῇ ΑΖ αἱ ΖΕ, ΕΔ, ΔΓ, καὶ ἐφεξῆς ἄλλαι ὅσαι ἂν δέοι πρὸς ἀπαρτισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μερῶν εἰς ἃ διελεῖν ἐπετάχθημεν τὴν ΑΒ. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν σημείων Ζ, Ε, Δ, ἤχθωσαν τῇ ΒΓ

Λ 2 παράλ-

(κ) Κατὰ τὴν β. τοῦ ϛ. (λ) Κατὰ τὴν λδ. τοῦ α.

παράλληλοι αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΔΚ. λέγω δὴ, ὅτι ἡ ΑΒ δι᾽ αὐτῶν εἰς τὰ ἐπιταχθέντα τέτμηται μέρη. ὅπερ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται, δι᾽ ὧν καὶ ἡ πρότασις. χ. 14.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

Δύω δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔςωσαν αἱ δοθεῖσαι δύω εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ. χ. 15.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα. καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ τρίτη ἀνάλογός ἐςι τῶν ΑΒ, ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΔΕ ἡ ΔΕ παράλληλος τῇ ΒΓ, ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΔ : : ΑΓ : ΓΕ. (μ) ἀλλ᾽ ἡ ΒΔ = ΑΓ. (ν) ὡς ἄρα ΑΒ : ΑΓ : : ΑΓ : ΓΕ. τρίτη ἄρα ἀνάλογος τῶν ΑΒ, ΑΓ ἡ ΓΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔςωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ Α, Β, Γ. χ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείσθωσαν δύω εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν, τὴν ΕΔΖ. καὶ κείσθω τῇ μὲν Α = ΔΗ, τῇ δὲ Β = ΗΕ, τῇ δὲ Γ = ΔΘ. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ

(μ) Κατὰ τὴν β. τοῦ ϛ. (ν) Ἐκ τῆς κατασκ.

ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΘΖ τῶν Α, Β, Γ τετάρτη ἐστὶν ἀνάλογον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ τριγώνῳ ΔΕΖ ἡ ΗΘ τῇ ΕΖ παράλληλος, ὡς ἄρα ΔΗ : ΗΕ :: ΔΘ : ΘΖ. (ξ) ἀλλ' ἡ μὲν ΔΗ = Α, ἡ δὲ ΗΕ = Β, ἡ δὲ ΔΘ = Γ. (ο) ὡς ἄρα Α : Β :: Γ : ΘΖ. τῶν ἄρα Α, Β, Γ τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΘΖ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἐντεῦθεν καὶ τὸν δοθέντα λόγον τῆς μείζονος ἀνισότητος, ὃν ἔχει εὐθεῖα ἡ ΑΒ, πρὸς εὐθεῖαν τὴν ΒΓ ἐπ' ἄπειρον προαγαγεῖν, καὶ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ἀπείρων ὅρων προσευρεῖν μανθάνομεν· καὶ ἔτι, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τοῦ δευτέρου, αὐτός τε ὁ πρῶτος ὅρος, καὶ πάντων τὸ τῶν ἀπείρων ὅρων κεφάλαιον συνεχῶς εἰσὶν ἀνάλογα. χ. 17.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπ' εὐθείας κείσθω ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ μὲν τοῦ Α ἡ ΑΛ ἴση τε καὶ κάθετος τῇ ΑΒ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β, ἡ ΒΟ ἴση τε καὶ κάθετος τῇ ΒΓ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΛΟ, ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΓ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΚ κάθετος τῇ ΑΖ, καὶ εἰλήφθω ἡ ΓΕ ἴση τῇ ΓΚ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἤχθω ἡ ΕΡ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΖ, καὶ εἰλήφθω ἡ ΕΔ ἴση τῇ ΕΡ. καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθω ἡ ΔΣ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΖ, καὶ εἰλήφθω ἡ ΔΙ ἴση τῇ ΔΣ, καὶ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπ' ἄπειρον γιγνέσθω. λέγω Α', ὅτι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΕ, ΕΔ, ΔΙ, καὶ ἐφεξῆς αἱ λοιπαὶ ἐπ' ἄπειρον συνεχῶς ἀνάλογόν εἰσι. λέγω δὲ Β', ὅτι ἡ ΑΖ ἴση τῷ κεφαλαίῳ τῶν ἀπείρων ὅρων.

(ξ) Κατὰ τὴν 6. τοῦ ς. (ο) Ἐκ τῆς κατασκ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὰ τρίγωνα ΖΑΛ, ΖΒΟ ἰσογώνιά εἰσιν, ὡς ἄρα ΖΑ: ΑΛ :: ΖΒ : ΒΟ. (π) ἀλλ' ἡ μὲν ΑΛ = ΑΒ, ἡ δὲ ΒΟ = ΒΓ. (ρ) ἄρα ὡς ΖΑ : ΑΒ :: ΖΒ : ΒΓ. ἄρα καὶ κατ' ἀναστροφὴν λόγȣ ὡς ΖΑ: ΖΑ — ΑΒ :: ΖΒ : ΖΒ — ΒΓ, (σ) ἤτοι ὡς ΖΑ : ΖΒ :: ΖΒ : ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὡς ΖΑ: ΑΒ :: ΖΒ : ΒΓ, ὡς δέδεικται, καὶ ἐναλλὰξ δὲ, ὡς ΖΑ: ΖΒ :: ΑΒ : ΒΓ, (τ) ἄρα καὶ ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΖΒ: ΖΓ. (υ) καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιά ἐστι τὰ ΖΒΟ, ΖΓΚ τρίγωνα, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΖΒ : ΒΟ :: ΖΓ : ΓΚ. (φ) ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΖΒ : ΖΓ :: ΒΟ : ΓΚ. (χ) ἄρα καὶ ὡς ΑΒ: ΒΓ :: ΒΟ: ΓΚ. (ψ) ἀλλ' ἡ μὲν ΒΟ = ΒΓ, ἡ δὲ ΓΚ = ΓΕ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΓ :: ΒΓ : ΓΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται ὅτι, ὡς ΒΓ: ΓΕ :: ΓΕ: ΕΔ, καὶ ὡς ΓΕ: ΕΔ :: ΕΔ: ΔΙ, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως ἐπ' ἄπειρον. αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΓ, ΓΕ, ΕΔ, ΔΙ, καὶ αἱ ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον συνεχῶς ἀνάλογόν εἰσίν.

Ὅτι δὲ ἐπ' ἄπειρον τȣ̀ς ὅρȣς προαγαγεῖν δυνατὸν, δείξεις ἕτως· ἤχθω ἡ ΙΗ κάθετος τῇ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ἰσογώνια τὰ ΖΑΛ, ΖΙΗ τρίγωνα, ὡς ἄρα ΖΑ: ΑΛ :: ΖΙ : ΙΗ. ἀλλ' ἡ ΖΑ $>$ ΑΛ· ἔστι γὰρ ἡ ΖΑ $>$ ΑΒ, ἡ δὲ ΑΒ = ΑΛ· ἄρα καὶ ἡ ΖΙ $>$ ΙΗ. δυνατὸν ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΙ μέρος λαβεῖν ἴσον τῇ ΙΗ, καὶ ἐφεξῆς πάλιν ἄλλο, καὶ ἕτως ἐπ' ἄπειρον. δῆλον ἄρα, ὅτι ἐπ' ἄπειρον προαγαγεῖν δυνατὸν τȣ̀ς τοιȣ́τȣς ὅρȣς.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὁ ἔσχατος τῆς τοιαύτης συνεχȣ̃ς σειρᾶς ὅρος ἢ ἐντὸς τȣ̃ Ζ πίπτει, ἢ ἐκτὸς, ἢ ἐπ' αὐτȣ̃ τȣ̃ Ζ. ἀλλὰ μὴν

(π) Κατὰ τὴν δ. τȣ̃ ς. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκ. (σ) Κατὰ τὴν συνέπ. τῆς ια. τȣ̃ ε. (τ) Κατὰ τὴν ζ. τȣ̃ ε. (υ) Κατὰ τὴν ε. τȣ̃ ε. (φ) Κατὰ τὴν δ. τȣ̃ ς. (χ) Κατὰ τὴν ζ. τȣ̃ ε. (ψ) Κατὰ τὴν ε. τȣ̃ ε.

μὴν ἔτε ἐντὸς πίπτει· καὶ γὰρ εἰ ἐντὸς πεσεῖται, ἐκ ἔςαι ὁ ἔσχατος· ἔνεςι γὰρ καὶ ἄλλον μετ' αὐτὸν λαβεῖν· ἔτε ἐκτός· ἔτω μὲν γὰρ ἂν εἴη ἡ ZI ἐλάσσων τῆς IH· ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἡ ZI > IH. ἄρα ἐπ' αὐτῶ τῶ Z πεσεῖται ὁ ἔσχατος ὅρος. ἴση ἄρα ἡ ΛZ τῷ κεφαλαίῳ πάντων τῶν ὅρων.

Μὴ ξενιζέτωτε δὲ, εἰ ἡ ΛZ πεπερασμένη ἔσα, ἄπειρα περιέχει μεγέθη. πάντα γὰρ μέρη αὐτῆς εἰσὶν, ἄπειρα μὲν τῷ ἀριθμῷ, ἐμὴν δὲ καὶ τῷ μεγέθει. προϊόντα γὰρ ἐλαττῦται.

Ἔτι δὲ λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶ πρώτω ὅρω καὶ τῶ δευτέρω, αὐτός τε ὁ πρῶτος ὅρος, καὶ πάντων τὸ τῶν ἀπείρων ὅρων κεφάλαιον συνεχῶς εἰσὶν ἀνάλογον. ἤχθω γὰρ ἡ OX παράλληλος τῇ ΛZ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ΛXO, ΛΛZ τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, ὡς ἄρα ΛX : XO : : ΛΛ : ΛZ. (ω) ἀλλ' ἡ μὲν ΛX ἡ διαφορά ἐςι τῶν ΛΛ, BO, ἤτοι τῶν AB, BΓ, (α) ὅπερ ἐςὶ τῶ πρώτω καὶ δευτέρω ὅρω, ἡ δὲ XO = AB. (β) ἡ δὲ ΛΛ = AB. ἄρα ΛX : AB : : AB : ΛZ. ὅπερ ἦν τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Δύω δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔςωσαν αἱ δύω δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ AB, BΓ. σχ. 18.

(ω) Κατὰ τὴν δ. τῶ ϛ. (α) Ἐκ τῆς κατασκ. (β) Κατὰ τὴν λδ. τῶ α.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κείθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΑΒ, ΒΓ. καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τῦ Β ἡ ΒΔ κάθετος τῇ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ ἐςὶν ἡ ζητυμένη. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΔ, ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΔΓ γωνία ὀρθή ἐςι. (γ) τὸ ἄρα ΑΔΓ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἐςίν. ἡ ἄρα ΔΒ κάθετος μέση ἀνάλογός ἐςι τῶν ΑΒ, ΒΓ. (δ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Τῶν ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσlω ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσlω ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐςὶν ἐκεῖνα.

Ἔςω ἴσα παραλληλόγραμμα, τὰ ΑΒ, ΒΓ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας. λέγω, ὅτι ἐςὶν ὡς ΔΒ : ΒΕ :: ΗΒ : ΒΖ. καὶ ἐὰν ΔΒ : ΒΕ :: ΗΒ : ΒΖ, λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐςὶ τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ. Σχ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κείθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ, καὶ δῆλον ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔσονται καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. (ε) ἐκβληθεισῶν δὲ τῶν ΑΖ, ΓΕ, καὶ συμβαλυσῶν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ, συμπεπληρώσθω τὸ Ξ παραλληλόγραμμον.

ΔΕΙ-

(γ) Κατὰ τὴν λα. τῦ γ. (δ) Κατὰ τὴν α. συνέπ. τῆς η. τῦ ϛ.
(ε) Ἐκ τῆς ιε. τῦ α. δῆλον.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ὡς Χ : Ξ :: ΔΒ : ΒΕ. (ζ) ὡσαύτως ὡς Ρ : Ξ :: ΗΒ : ΒΖ. (η) ἀλλὰ Ρ = Χ. (θ) ἄρα καὶ ὡς Χ : Ξ : ΗΒ : ΒΖ. ἄρα ὡς ΔΒ : ΒΕ :: ΗΒ : ΒΖ. (ι)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὡς ΔΒ : ΒΕ :: ΗΒ : ΒΖ. (κ) ἀλλ' ὡς ΔΒ : ΒΕ :: Χ : Ξ. ἄρα ὡς Χ : Ξ :: ΗΒ : ΒΖ. (λ) ἀλλ' ὡς ΗΒ : ΒΖ :: Ρ : Ξ. (μ) ἄρα καὶ ὡς Χ : Ξ :: Ρ : Ξ. (ν) ἄρα Χ = Ρ. (ξ)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ, ΑΔΖ ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Α γωνίας. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ΓΑ : ΑΔ :: ΕΑ : ΑΒ. καὶ ἐὰν ὡς ΓΑ : ΑΔ :: ΕΑ : ΑΒ, ἔσται τὸ τρίγωνον Ξ = Χ. σχ. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Κείσθω, ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ. καὶ δῆλον ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔσται καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. (ο) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

(ζ) Κατὰ τὴν α. τοῦ ς. (η) Κατὰ τὴν αὐτήν. (θ) Ἐξ ὑποθ. (ι) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ε. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ε. (μ) Κατὰ τὴν α. τοῦ ς. (ν) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ε. (ξ) Κατὰ τὴν β. τοῦ ε. (ο) Ἐκ τῆς ιε. τοῦ α.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ὡς Ξ : Ρ :: ΓΑ : ΑΔ. (π) ὡσαύτως ὡς Χ : Ρ :: ΕΑ : ΑΒ. (ρ) ἀλλὰ Χ = Ξ. (σ) ἄρα ὡς Ξ : Ρ :: ΕΑ : ΑΒ. ἄρα ὡς ΓΑ : ΑΔ :: ΕΑ : ΑΒ. (τ)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὡς ΓΑ : ΑΔ :: ΕΑ : ΑΒ. (υ) ἀλλ' ὡς Ξ : Ρ :: ΓΑ : ΑΔ. (φ) ἄρα ὡς Ξ : Ρ :: ΕΑ : ΑΒ. (χ) ἀλλὰ καὶ ὡς Χ : Ρ :: ΕΑ : ΑΒ. (ψ) ἄρα ὡς Ξ : Ρ :: Χ : Ρ. (ω) ἄρα Ξ = Χ. (α)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ ἀνάλογον, ὡς ΑΒ : ΓΔ :: Ε : Ζ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐὰν δὲ ΑΒ. Ζ = ΓΔ. Ε, ἔσται ὡς ΑΒ : ΓΔ :: Ε : Ζ. πίν. ΙΗ. σχ. 21.

Ἡ πρότασις αὕτη προὐτέθη τε καὶ δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ. (β) ἀλλὰ δὴ καὶ ἄλλως δειχθήσεται.

ΚΑ-

(π) Κατὰ τὴν α. τοῦ ς. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (σ) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (υ) Ἐξ ὑποθ. (φ) Κατὰ τὴν α. τοῦ ς. (χ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (ψ) Κατὰ τὴν α. τοῦ ς. (ω) Κατὰ τὴν θ. τοῦ ε. (α) Κατὰ τὴν β. τοῦ ε. (β) Ἡ ἕκτη τοῦ ε. ὅρ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΗ, ΓΘ. καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὰ Χ, Ρ παραλληλόγραμμα.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α′.

Ὡς ΑΒ : ΓΔ : : Ε : Ζ. (γ) ἀλλ' ἡ μὲν Ε = ΓΘ, ἡ δὲ Ζ = ΑΗ. (δ) ἄρα ὡς ΑΒ : ΓΔ : : ΓΘ : ΑΗ. ἀντιπεπόνθασιν ἄρα τῶν Χ, Ρ παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί. ἄρα ἴσα εἰσὶ τὰ Χ, Ρ παραλληλόγραμμα. (ε)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β′.

Ἐπεὶ Χ = Ρ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αὐτῶν αἱ πλευραί, ὅτεν ἐστὶν ὡς ΑΒ : ΓΔ : : ΓΘ : ΑΗ. (ζ) ἀλλ' ἡ μὲν ΓΘ = Ε, ἡ δὲ ΑΗ = Ζ. (η) ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ : : Ε : Ζ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐντεῦθεν δῆλος ὁ τῆς τῶν τριῶν Μεθόδυ, τῆς καὶ χρυσῆς Μεθόδυ καλυμένης, λόγος. ὅτι γὰρ ὁ τέταρτος τῆς ἀναλογίας ὅρος ἴσος τῷ πηλίκῳ τῷ προκύπτοντι ἐκ τῦ γινομένου ἐκ τῶν μέσων διὰ τῦ πρώτυ διαιρεθέντος, δείκνυται ὅτως. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΒ : ΓΔ : : Ε : Ζ. ἄρα ΑΒ. Ζ = ΓΔ. Ε. ἑκατέρυ δὲ τέτων τῶν ἴσων διὰ τῦ αὐτῦ ΑΒ διαιρεθέντος, ἔςαι $\frac{ΑΒ.Ζ}{ΑΒ} = \frac{ΓΔ.Ε}{ΑΒ}$. (θ) ἀλλ' $\frac{ΑΒ}{ΑΒ} = 1$. (ι) ἄρα $Ζ = \frac{ΓΔ.Ε}{ΑΒ}$. ὁ ἄρα τέταρτος ὅρος ὁ Ζ ἴσος τῷ πηλίκῳ τῷ προκύπτον-

---

(γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ε) Κατὰ τὴν ιδ. τῦ ϛ. (ζ) Κατὰ τὴν αὐτήν (η) Ἐκ τῆς κατασκ. (θ) Κατὰ τὸ η ἀξ. (ι) Κατὰ τὸ ζ. ἀξ. τῦ ι.

πτοντι, διαιρεθέντος τȣ͂ γινομένȣ ἐκ τῶν μέσων ΓΔ. Β. διὰ τȣ͂ πρώτȣ ΑΒ.

Ἐκ τῆς προτάσεως δὲ ταύτης ᾗ τὸ ἑξῆς τȣ͂ Πτολεμαίȣ θεώρημα δείκνυται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Παντὸς τετραπλεύρȣ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένȣ τὸ ἐκ τῶν διαγωνίων αὐτȣ͂ ὀρθογώνιον, ΑΙ. ΒΔ ἴσον ἐςὶ τοῖς δυσὶν ὀρθογωνίοις τοῖς ἐκ τῶν ἀντικειμένων τȣ͂ τετραπλεύρȣ πλευρῶν, ἤτοι τοῖς ΑΒ. ΔΓ + ΑΔ. ΒΓ χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰ ȣ̓κ ἔςιν ἡ ΒΑΓ γωνία ἴση τῇ ΓΑΔ, συνεςάτω ἡ ΒΑΖ ἴση τῇ ΓΑΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΖ, ΑΓΔ, ἡ μὲν γωνία ΑΒΖ = ΑΓΔ, (κ) ἡ δὲ ΒΑΖ = ΓΑΔ. (λ) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΒ, ἴση λοιπῇ τῇ ΑΔΓ. (μ) ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΖ :: ΑΓ : ΓΔ. (ν) ἄρα ΑΒ. ΓΔ = ΒΖ. ΑΓ. (ξ) ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία ΒΑΖ = ΕΑΔ, (ο) ἀφαιρεθείσης ἄρα κοινῆς τῆς ΕΑΖ, ἔσεται ἡ ΒΑΕ, ἤτȣν ἡ ΒΑΓ = ΖΑΔ. ἐν τοῖς τριγώνοις ȣ̓ν ΑΖΔ, ΑΒΓ, ἡ μὲν γωνία ΑΓΒ = ΑΔΖ, (π) ἡ δὲ ΖΑΔ = ΒΑΓ, ὡς δέδεικται. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΔ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΒΓ. (ρ) ὡς ἄρα ΑΔ: ΔΖ :: ΑΓ : ΓΒ. (σ) ἄρα ΑΔ. ΓΒ = ΔΖ. ΑΓ. προσκείσθω τῷ μὲν ΑΒ. ΓΔ τὸ ΑΔ. ΓΒ, τῷ δὲ ΒΖ. ΑΓ τὸ ΔΖ. ΑΓ. ἔσεται ἄρα ΑΒ. ΓΔ + ΑΔ. ΓΒ = ΒΖ. ΑΓ

(κ) Κατὰ τὴν κα. τȣ͂ γ. (λ) Ἐκ τῆς κατασκ. (μ) Κατὰ τὴν ζ. συνέπ. τῆς λβ. τȣ͂ α. (ν) Κατὰ τὴν δ. τȣ͂ ϛ. (ξ) Κατὰ τὴν τ. τȣ͂ ε. (ο) Ἐκ τῆς κατασκ. (π) Κατὰ τὴν κα. τȣ͂ γ. (ρ) Κατὰ τὴν ϛβ. συνέπ. (σ) Κατὰ τὴν. δ. τȣ͂ ϛ.

ΑΓ + ΔΖ. ΑΓ. ἀλλὰ ΒΖ. ΑΓ + ΔΖ. $\overline{\text{ΑΓ} = \text{ΒΖ} + \text{ΖΔ}}$. ΑΓ = ΒΔ. ΑΓ. ἄρα ΒΔ. ΑΓ = ΑΒ. ΔΓ + ΑΔ. ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔςωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς Α : Β : : Β : Γ. λέγω ὅτι Α. Γ = Β. Β. καὶ ἐὰν Α. Γ = Β. Β, ἔςαι ὡς Α : Β : : Β : Γ. ϗ. 23.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείσθω τὶς εὐθεῖα ἡ Δ ἴση τῇ Β.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Ὡς Α : Β : : Β : Γ. (τ) ἀλλὰ Β = Δ. (υ) ἄρα ὡς Α : Β : : Δ : Γ. ἄρα Α. Γ = Β. Δ. (φ) καὶ ἐπεὶ Β = Δ, ἄρα καὶ Α. Γ = Β. Β.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Ἐπεὶ Α. Γ = Β. Β, ἔςι δὲ Β = Δ. ἄρα Α. Γ = Β. Δ. ἄρα ὡς Α : Β : : Δ : Γ. (χ) ἀλλὰ Β = Δ. ἄρα καὶ ὡς Α : Β : : Β : Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ΄.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἔςω

(τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Ἐκ τῆς κατασκ. (φ) Κατὰ τὴν ϛ. τῆ ϛ. (χ) Κατὰ τὴν αὐτήν.