Ἔστω τρία μεγέθη, τὰ Α, Β, Γ, ϗ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Δ, Ε, Ϛ. ϗ ἔστω, ὡς Α : Β : : Ε : Ϛ, ϗ ὡς Β : Γ : : Δ : Ε. λέγω, ὅτι ἐὰν Α $>$ Γ, καὶ Δ $>$ Ϛ· κἂν Α $=$ Γ, ϗ Δ $=$ Ϛ· κἂν Α $<$ Γ, ϗ Δ $<$ Ϛ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς Α : Β : : Ε : Ϛ, καὶ ὡς Β : Γ : : Δ : Ε, ἄρα καὶ δι' ἴσου τεταραγμένως ὡς Α : Γ : Δ : Ϛ. (υ) ὅθεν φανερὸν τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ΄, ϗ ΚΔ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· ἔχῃ δὲ ϗ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, ϗ συντεθὲν πρῶτον ϗ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ϗ τρίτον ϗ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Ἔστω ὡς Α : Β : : Γ : Δ, καὶ ὡς Ε : Β : : Ϛ : Δ. λέγω, ὅτι ὡς Α + Ε : Β : : Γ + Ϛ : Δ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς Α : Β : : Γ : Δ, ἄρα ϗ ἐναλλὰξ, ὡς Α : Γ : : Β : Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ϗ ὡς Ε : Ϛ : : Β : Δ. ἄρα καὶ ὡς Α : Γ : : Ε : Ϛ. (φ) ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς Α : Ε : : Γ : Ϛ. ἄρα καὶ συντεθέντα ὡς Α + Ε : Ε : : Γ + Ϛ : Ϛ. (χ) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς Ε : Β : : Ϛ : Δ, (ψ) ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς Α + Ε : Β : : Γ + Ϛ : Δ. (ω) ὃ ἔδει δεῖξαι.

(υ) Κατὰ τὴν ιγ. τοῦ ε. (φ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (χ) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ε. (ψ) Ἐξ ὑποθ. (ω) Κατὰ τὴν ιβ. τοῦ ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ΄, ϗ ΚΕ΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιςον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιςον, δύω τῶν λοιπῶν μείζονά ἔςαι.

Ἔςω ὡς ΑΒ : ΓΔ : : Ε : Ζ. ϗ μέγιςον μὲν αὐτῶν ἔςω τὸ ΑΒ, ἐλάχιςον δὲ τὸ Ζ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ + Ζ > ΓΔ + Ε. χ. 3.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω τὸ μὲν ΑΗ = Ε, τὸ δὲ ΓΘ = Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΑΒ : ΓΔ : : Ε : Ζ· ἔςι δὲ τὸ μὲν Ε = ΑΗ, τὸ δὲ Ζ = ΓΘ· ἄρα ϗ ὡς ΑΒ : ΓΔ : : ΑΗ : ΓΘ. ἄρα καὶ ὡς ΑΒ : ΓΔ : : ΒΗ : : ΔΘ. (α) ἀλλὰ τὸ ΑΒ > ΓΔ. ἄρα ϗ ΒΗ > ΔΘ. ἐπεὶ δὲ ΑΗ = Ε, ϗ ΓΘ = Ζ. ἐὰν ἄρα τῷ μὲν ΑΗ προςεθῇ τὸ Ζ, τῷ δὲ ΓΘ τὸ Ε, ἔςαι ΑΗ + Ζ = ΓΘ + Ε. προσκείσθω τοῖς μὲν ΑΗ + Ζ τὸ ΗΒ, τοῖς δὲ ΓΘ + Ε, τὸ ΔΘ, ϗ ἔςαι ΑΗ + Ζ + ΒΗ > ΓΘ + Ε + ΔΘ· δέδεικται γὰρ τὸ ΒΗ > ΔΘ· ὅτων ΑΒ + Ζ > ΓΔ + Ε. ὃ ἔδει δεῖξαι.

Τὰ ἑξῆς Θεωρήματα, πλὼ τȣ̃ ἐχάτȣ, ἐκ τῶν τȣ̃ Πάππȣ εἰσὶ τȣ̃ Ἀλεξανδρέως.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων γινόμενον μεῖζον τȣ̃ ἐκ τῶν μέσων ἔςαι

καὶ

(α) Κατὰ τὴν ιζ. τȣ̃ ε.

καὶ ἐὰν τὸ ἐκ τῶν ἄκρων μεῖζον τοῦ ἐκ τῶν μέσων, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

Ἐχέτω Α : Β > Γ : Δ, λέγω, ὅτι Α. Δ > Β. Γ. ἐὰν δὲ Α. Δ > Β. Γ, Α : Β > Γ : Δ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Ἐπειδὴ Α : Β > Γ : Δ, τὸ Α ἄρα περιέχεται ὑπὸ τοῦ Β ἐλαττονάκις ἤπερ τὸ Γ ὑπὸ τοῦ Δ. (β) εἰλήφθω μέγεθος τὸ Ε ἔλαττον τοῦ Α, τοσάκις ὑπὸ τοῦ Β περιεχόμενον, ὁσάκις καὶ τὸ Γ ὑπὸ τοῦ Δ. ἔσται ἄρα ὡς Ε : Β :: Γ : Δ. (γ) ἄρα Ε. Δ = Β. Γ. (δ) ἀλλ' Α. Δ > Ε. Δ· ἔλαττον γὰρ τὸ Ε τοῦ Α. ἄρα Α. Δ > Β. Γ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ἐπεὶ Α. Δ > Β. Γ, εἰλήφθω μέγεθος τὸ Ε ἔλαττον τοῦ Α, ὥστε εἶναι Ε. Δ = Β. Γ. ἄρα ὡς Ε : Β :: Γ : Δ, (ε) ἤτουν τὸ Ε τοσάκις περιέχεται ὑπὸ τοῦ Β, ὁσάκις καὶ τὸ Γ ὑπὸ τοῦ Δ. ἀλλὰ τὸ Α > Ε, τὸ Α ἄρα ὑπὸ τοῦ Β ἐλαττονάκις περιέχεται, ἤπερ τὸ Γ ὑπὸ τοῦ Δ. ἄρα Α : Β > Γ : Δ. ο. ε. δ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν Α : Β > Γ : Δ, καὶ ἐναλλὰξ Α : Γ > Β : Δ. καὶ τούτου γὰρ κειμένου, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων γινόμενον, ἤτουν τὸ Α. Δ μεῖζον τοῦ ἐκ τῶν μέσων, ἤτοι τοῦ Β. Γ. ἀνάπαλιν δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Α ἐλάττονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ, ἤτουν Β : Α < Δ : Γ. ὅπερ ἐστὶ ὅτι τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Α, ἤτοι Δ : Γ > Β : Α. τούτου γὰρ κειμένου, πάλιν Α. Δ > Β. Γ.

(β) Κατὰ τὸν γ. ὁρισμ. τοῦ ε. (γ) Κατὰ τὸν β: ὁρισμ. τοῦ ε.
(δ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (ε) Κατὰ τὴν αὐτήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β′.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ δεύτερον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τρίτον καὶ τέταρτον πρὸς τέταρτον.

Ἐχέτω $A : B > \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι καὶ $A + B : B > \Gamma + \Delta : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $A : B > \Gamma : \Delta$, ἄρα $A . \Delta > B . \Gamma$. (ζ) κοινὸν προσκείσθω τὸ $B . \Delta$. ἄρα $A . \Delta + B . \Delta > B . \Gamma + B . \Delta$, τετέστιν $\overline{A + B} . \Delta > B . \overline{\Gamma + \Delta}$. ἄρα $A + B : B > \Gamma + \Delta : \Delta$. (η)

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ′.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ διαιρεθέντα μείζονα λόγον ἕξει.

Ἐχέτω $A : B > \Gamma : \Delta$. λέγω, ὅτι καὶ $A - B : B > \Gamma - \Delta : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ $A : B > \Gamma : \Delta$, ἄρα $A . \Delta > B . \Gamma$. (θ) κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ $B . \Delta$. ἄρα $A . \Delta - B . \Delta > B . \Gamma - B . \Delta$, τετέστι $\overline{A - B} . \Delta > B . \overline{\Gamma - \Delta}$. ἄρα $A - B : B > \Gamma - \Delta : \Delta$. (ι)

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ′.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, κατὰ ἀναστροφὴν λόγου ἐλάττονα λόγον ἕξει.

ΔΕΙ-

(ζ) Κατὰ τὸ κ. θεώρ. (η) Κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρ. (θ) Κατὰ τὸ αὐτ. θεώρ. (ι) Κατὰ τὸ αὐτ. θεώρ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ Α : Β $>$ Γ : Δ, ἄρα Α. Δ $>$ Β. Γ. τούτων ἑκάτερον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ Α. Γ. ἄρα Α. Γ — Α. Δ $<$ Α. Γ — Β. Γ, ἤτοι Α. Γ — Δ $<$ Γ. Α — Β, ὅπερ ἐστὶν Α — Β. Γ $>$ Α. Γ — Δ. ἄρα Α — Β : Α $>$ Γ — Δ : Γ. (κ) ἄρα ἀνάπαλιν. Α : Α — Β $<$ Γ : Γ — Δ. (λ)

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ δεύτερον πρὸς πέμπτον μείζονα ἤπερ τέταρτον πρὸς ἕκτον, δι' ἴσου καὶ πρῶτον πρὸς πέμπτον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τρίτον πρὸς ἕκτον.

Ἐχέτω Α : Β $>$ Γ : Δ, καὶ Β : Ε $>$ Δ : ϛ. λέγω, ὅτι καὶ Α : Ε $>$ Γ : ϛ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ Α : Β $>$ Γ : Δ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα Α : Γ $>$ Β : Δ· ὡσαύτως ἐπεὶ Β : Ε $>$ Γ : Δ, καὶ ἐναλλὰξ Β : Δ $>$ Ε : ϛ· ὁ λόγος ἄρα ὃν ἔχει τὸ Β πρὸς τὸ Δ μείζων τοῦ ὃν ἔχει τὸ Ε πρὸς πρὸς τὸ ϛ. ἀλλὰ τοῦ λόγου ὃν ἔχει τὸ Β πρὸς τὸ Δ μείζων ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Γ· καὶ γὰρ δέδεικται Α : Γ $>$ Β : Δ· ἄρα ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Γ πολλῷ μείζων τοῦ ὃν ἔχει τὸ Ε πρὸς τὸ ϛ. ἄρα Α : Γ $>$ Ε : ϛ. ἄρα καὶ ἐναλλὰξ, Α : Ε $>$ Γ : ϛ.

(κ) Κατὰ τὸ α. θεώρ. (λ) Κατὰ τὴν μετὰ τὸ α. θεώρ. συνέπ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ϛʹ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ δεύτερον πρὸς πέμπτον μείζονα ἤπερ ἕκτον πρὸς τρίτον, καὶ δι' ἴσου τεταραγμένως πρῶτον πρὸς πέμπτον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Ἐχέτω Α : Β > Γ : Δ, καὶ Β : Ε > ϛ : Γ. λέγω, ὅτι καὶ Α : Ε > ϛ : Δ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ Α : Β > Γ : Δ, ἄρα Α. Δ > Β. Γ. (μ) ἀλλὰ Β. Γ > Ε. ϛ. ἔχει γὰρ Β : Ε > ϛ : Γ. ἄρα πολλῷ μᾶλλον Α. Δ > Ε. ϛ. ἄρα Α : Ε > ϛ : Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ζʹ.

Ὧν διπλασιόνων λόγων οἱ ὑποδιπλασίονες ἴσοι, κἀκεῖνοί εἰσιν ἴσοι· καὶ ὧν ὑποδιπλασιόνων οἱ διπλασίονες ἴσοι, κἀκεῖνοί εἰσιν ἴσοι.

Ἔστω ὡς Α : Β :: Β : Γ, καὶ ὡς Ε : Ζ :: Ζ : Ο. ἔστωσαν δὲ οἱ ὑποδιπλασίονες ἴσοι, (ν) εἴτουν ὡς Α : Β :: Ε : Ζ. λέγω, ὅτι καὶ οἱ διπλασίονες αὐτῶν ἴσοι, ἤτοι ὡς Α : Γ :: Ε : Ο. καὶ ἐὰν ὡς Α : Γ :: Ε : Ο, ἔσται καὶ ὡς Α : Β :: Ε : Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Αʹ.

Ἐπεὶ ὡς Α : Β :: Β : Γ, ἔστι δὲ καὶ ὡς Α : Β :: Ε : Ζ, (ξ) ἄρα καὶ ὡς Β : Γ :: Ε : Ζ. (ο) ἀλλ' ὡς Ε : Ζ :: Ζ : Ο. (π) ἄρα καὶ ὡς Β : Γ :: Ζ : Ο. (ρ) ἀλλὰ καὶ ὡς Α : Β :: Ε : Ζ. ἄρα δι' ἴσου καὶ ὡς Α : Γ :: Ε : Ο (σ)

ΔΕΙ-

(μ) Κατὰ τὸ α. θεώρ. (ν) Ὅρα τὸ β. πόρ. τὸ μετὰ τὴν κ. τοῦ ι. (ξ) Ἐξ ὑποθ. (ο) Κατὰ τὴν ε τοῦ ε. (π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτ. ε. (σ) Κατὰ τὴν ιβ. τοῦ ε.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Εἰ γὰρ μὴ ὡς Α : Β :: Ε : Ζ, εἰλήφθω ἄλλο τὶ ἤτοι μεῖζον ἢ ἔλαττον τοῦ Ζ, οἷον τὸ Ξ, ὥστε εἶναι, ὡς Α : Β :: Ε : Ξ, καὶ γεγονέτω ὡς Ε : Ξ :: Ξ : Χ. καὶ ἐπεὶ καὶ ὡς Α : Β :: Β : Γ· (τ) ἔστι δὲ καὶ ὡς Α : Β :: Ε : Ξ, (υ) εἶτουν οἱ ὑποδιπλασίονος ἴσοι, καὶ οἱ τούτων διπλασίονες ἄρα ἴσοι, τουτέστιν ὡς Α : Γ :: Ε : Χ. (φ) ἀλλ' ὡς Α : Γ :: Ε : Ο. (χ) ἄρα καὶ ὡς Ε : Χ :: Ε : Ο. (ψ) ἄρα Χ = Ο. (ω) ἄρα καὶ ὡς Ε : Ξ :: Ξ : Ο. ἄρα Ε.Ο = Ξ.Ξ. (α) ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς Ε : Ζ :: Ζ : Ο, (β) ἄρα Ε.Ο = Ζ.Ζ. ἄρα Ζ.Ζ = Ξ.Ξ. ἄρα καὶ Ζ = Ξ. τὸ Ξ ἄρα καὶ ἴσον, καὶ ἔλαττον ἢ μεῖζον τοῦ Ζ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς Α : Β :: Ε : Ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ πρὸς ἄλλο τὶ τὸ Ε πλὴν ἢ πρὸς τὸ Ζ ἕξει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Α πρὸς τὸ Β. ἄρα ὡς Α : Β :: Ε : Ζ. ὃ ἔδει δεῖξαι.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ὧν λόγων οἱ ὑποτριπλασίονές εἰσιν ἴσοι, καὶ οἱ τριπλασίονες, ἢ τετραπλασίονες αὐτῶν εἰσὶν ἴσοι, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

ΒΙΒΛΙΟΥ ΕΚΤΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

Β. Ἀντιπεπονθότα σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγέμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

(τ) Ἐξ ὑποθ. (υ) Ἐκ τῆς κατασκ. (φ) Κατὰ τὸ α. μέρ. τοῦδε τοῦ θεωρήμ. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (ω) Κατὰ τὴν β. τοῦ ε. (α) Κατὰ τὴν ϛ. τοῦ ε. (β) Ἐξ ὑποθ.

Γ'. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτω τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

Δ'. Ὕψος παντὸς σχήματός ἐστιν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα καὶ τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ ὕψη ἔχοντα ἴσα, τὰς ἀπὸ τῶν Β, Ζ ἀγομένας καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΕΗ, ἤτοι τὰς ΒΔ, ΖΘ. λέγω, ὅτι ὡς ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς ΕΖΗ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΗ βάσιν. πίν. ιϛ'. σχ. 1.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν τρίγωνον $ΑΒΓ = \frac{ΒΔ.\ ΑΓ}{2}$, τὸ δὲ $ΕΖΗ = \frac{ΖΘ.\ ΕΗ}{2}$. (γ) ἄρα ὡς ΑΒΓ : ΕΖΗ : : $\frac{ΒΔ.\ ΑΓ}{2}$: $\frac{ΖΘ.\ ΕΗ}{2}$ ἀλλ' ὡς $\frac{ΒΔ.\ ΑΓ}{2}$: $\frac{ΖΘ.\ ΕΗ}{2}$: : ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ. (δ) ἄρα ὡς ΑΒΓ : ΕΖΗ : : ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ. (ε) ἀλλ' ὡς ΒΔ. ΑΓ : ΖΘ. ΕΗ : : ΑΓ : ΕΗ. (ζ) τὸ γὰρ ΒΔ = ΖΘ. (η) ἄρα ὡς ΑΒΓ : ΕΖΗ : : ΑΓ : ΕΗ. (θ)

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἐπεὶ δὲ τὰ παραλληλόγραμμα διπλάσιά εἰσι τῶν τριγώνων τῶν τὸ αὐτὸ ὕψος ἐχόντων καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν,

(γ) Κατὰ τὸ γ. πρόβλ. τὸ μετὰ τὴν ιδ. τοῦ β. (δ) Κατὰ τὴν η. τοῦ ε. (ε) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (ζ) Κατὰ τὴν η. τοῦ ε. (η) Ἐξ ὑποθ. (θ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε.

σιν. (ι) καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ἄρα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς. καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος.

Ἔστω τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ΒΔ: ΔΑ: ΓΕ: ΕΑ. Ἐὰν δὲ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ὥστε εἶναι ὡς ΒΔ: ΔΑ :: ΓΕ: ΕΑ, λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. σχ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΓ, ΕΒ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ τρίγωνον ΒΕΔ = ΓΕΔ. (κ) ἄρα ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ :: ΓΕΔ: ΔΕΑ. (λ) ἀλλ' ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ :: ΒΔ: ΔΑ. (μ) ἄρα ὡς ΒΔ: ΔΑ :: ΓΕΔ: ΔΕΑ. (ν) ἀλλ' ὡς ΓΔΕ: ΕΔΑ :: ΓΕ: ΕΑ. (ξ) ὡς ἄρα ΒΔ: ΔΑ :: ΓΕ: ΕΑ. (ο)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ὡς ΒΔ: ΔΑ :: ΓΕ: ΕΑ. (π) ἀλλ' ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ :: ΒΔ: ΔΑ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΒΕΔ: ΔΕΑ :: ΓΕ: ΕΑ.

(ι) Κατὰ τὴν μα. τοῦ α. (κ) Κατὰ τὴν λζ. τοῦ α. (λ) Κατὰ τὴν α τοῦ ε. (μ) Κατὰ τὴν α. τοῦ ϛ. (ν) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (ξ) Κατὰ τὴν α. τοῦ ϛ. (ο) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Κατὰ τὴν α. τοῦ ϛ.

(σ) ἀλλ' ὡς ΓΔΕ : ΕΔΑ :: ΓΕ : ΕΑ. (τ) ἄρα κ) ὡς ΒΕΔ : ΔΕΑ :: ΓΔΕ : ΕΔΑ. (υ) ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΕΔ = ΓΔΕ. (φ) εἰσὶ δὲ κ) ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἄρα εἰσὶ παραλλήλοις. (χ) ἡ ἄρα ΔΕ παράλληλος τῇ ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνει καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βασεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΓ. Ἐὰν δὲ ᾖ ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΓ· λέγω, ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. σχ. 3.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἡ ΓΕ παράλληλος τῇ ΑΔ, (ψ) καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ, συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

ΔΕΙ-

(σ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (τ) Κατὰ τὴν α. τοῦ ϛ. (υ) Κατὰ τὴν (φ) Κατὰ τὴν β. τοῦ ε. (χ) Κατὰ τὴν λθ. τοῦ α. (ψ) Κατὰ τὴν λα. τοῦ α.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Η' μὲν γωνία ΒΑΔ = ΒΕΓ, ἡ δὲ ΔΑΓ = ΑΓΕ. (ω) ἀλλ' ἡ ΒΑΔ = ΔΑΓ. (α) ἄρα ϗ ἡ ΒΕΓ, ἤτοι ΑΕΓ = ΑΓΕ. ἄρα καὶ ἡ ΑΕ = ΑΓ. (β) ἀλλ' ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΕ. (γ) ἄρα καὶ ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Ω'ς ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΓ. (δ) ἀλλ' ὡς ΒΔ : ΔΓ :: ΒΑ : ΑΕ. (ε) ἄρα ὡς ΒΑ : ΑΓ :: ΒΑ : ΑΕ. (ζ) ἄρα ΑΕ = ΑΓ. (η) ϗ γωνία ἄρα ἡ ΑΕΓ = ΑΓΕ. (θ) ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕΓ = ΒΑΔ, ἡ δὲ ΑΓΕ = ΔΑΓ. (ι) ἄρα καὶ ἡ ΒΑΔ = ΔΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογον εἰσὶν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ϗ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Ἔστωσαν ἰσογώνια τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν γωνίαν Γ τῇ Ζ, τὴν δὲ Β τῇ Ε, τὴν δὲ Α τῇ Δ. λέγω, ὅτι ὡς ΑΒ : ΑΓ :: ΔΕ : ΔΖ, ϗ ὡς ΑΓ : ΓΒ :: ΔΖ : ΖΕ : ϗ ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ. χ. 4.

Ἐὰν μὲν τὰ τρίγωνα ἰσόπλευρα ᾖ, δῆλον τὸ προτεθέν· ἐὰν δὲ μή·

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐφηρμόσθω τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐπὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ τιθέσθω τὸ μὲν Δ σημεῖον ἐπὶ τὸ Α, ἡ δὲ ΔΖ ἐυ-

---

(ω) Κατὰ τὴν κθ. τοῦ α. (α) Ἐξ ὑποθ. (β) Κατὰ τὴν ϛ. τοῦ α. (γ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (δ) Ἐξ ὑποθ. (ε) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ζ) Κατὰ τὴν θ. τοῦ ε. (η) Κατὰ τὴν ε. τοῦ α. (θ) Κατὰ τὴν κθ. τοῦ α. (ι) Κατὰ τὴν κθ. τοῦ α.

εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΑΓ. ἐφαρμόσει δὲ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν Δ γωνίαν τῇ Α. ἡ δὲ ΕΖ ἐντὸς πεσεῖται τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ ἔσεται ἡ μὲν ΑΕ = ΔΕ, ἡ δὲ ΑΖ = ΔΖ, ἡ δὲ ΕΖ αὐτὴ ἡ ΕΖ. καὶ ἡ μὲν ΑΕΖ γωνία αὐτὴ ἡ Ε, ἡ δὲ ΔΖΕ αὐτὴ ἡ Ζ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ ΑΕΖ = Ε, (κ) ἡ δὲ Ε = Β, (λ) ἄρα ἡ ΑΕΖ = Β. ἡ ἄρα ΕΖ παράλληλος τῇ ΒΓ. ὡς ἄρα ΒΕ : ΕΑ :: ΓΖ : ΖΑ. (μ) ἄρα καὶ ὡς ΒΕ + ΕΑ : ΕΑ :: ΓΖ + ΖΑ : ΖΑ, (ν) ἤτουν ΒΑ : ΕΑ :: ΓΑ : ΖΑ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΒΑ : ΓΑ :: ΕΑ : ΖΑ. (ξ) ἀλλ' ἡ μὲν ΕΑ = ΔΕ, ἡ δὲ ΖΑ = ΔΖ. ἄρα ὡς ΒΑ : ΓΑ :: ΔΕ : ΔΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, τοῦ μὲν Ζ σημείου ἐπὶ τὸ Γ ἐφαρμοσθέντος, δειχθήσεται, ὅτι ὡς ΓΑ : ΓΒ :: ΔΖ : ΖΕ. τοῦ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Β, ὅτι ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Εʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ, ὡς δὲ ΒΓ : ΓΑ :: ΕΖ : ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς ΒΑ : ΑΓ :: ΕΔ : ΔΖ. λέγω ὅτι ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι, τὴν μὲν ΑΒΓ τῇ ΔΕΖ, τὴν δὲ ΒΓΑ τῇ ΕΖΔ, καὶ ἔτι τὴν ΒΑΓ τῇ ΕΔΖ. χ. 5.

ΚΑ.

(κ) Ἐκ τῆς κατασκ. (λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Κατὰ τὴν β. τοῦ ε. (ν) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ε. (ξ) Κατὰ τὴν ζ. τοῦ ε.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεςάτω τῇ μὲν γωνίᾳ ΑΒΓ = ΖΕΗ, τῇ δὲ ΑΓΒ = ΕΖΗ. (ο) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΓ ἴση λοιπῇ τῇ ΕΗΖ. (π)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΕΗΖ, ΑΒΓ τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν. ὡς ἄρα ΑΒ : ΒΓ :: ΕΗ : ΕΖ. (ρ) ἀλλ' ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΔΕ : ΕΖ. (σ) ἄρα καὶ ὡς ΔΕ : ΕΖ :: ΕΗ : ΕΖ. (τ) ἡ ἄρα ΔΕ = ΕΗ. (υ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ = ΖΗ. ἔςι δὲ καὶ ἡ ΕΖ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ μὲν ΔΖΕ = ΕΖΗ, ἡ δὲ ΔΕΖ = ΖΕΗ, καὶ ἡ ΕΔΖ = ΕΗΖ. (φ) ἀλλ' ἡ μὲν ΕΖΗ = ΑΓΒ, ἡ δὲ ΖΕΗ = ΑΒΓ. (χ) ἡ δὲ ΕΗΖ = ΒΑΓ. (ψ) ἄρα ἡ μὲν ΔΖΕ = ΑΓΒ, ἡ δὲ ΔΕΖ = ΑΒΓ, ἡ δὲ ΕΔΖ = ΒΑΓ. ἰσογώνιον ἄρα ἐςὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύω τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔςαι τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔςω δύω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν τὴν ΒΑΓ, μιᾷ γωνίᾳ τῇ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, εἴτουν ὡς ΒΑ : ΑΓ :: ΕΔ : ΔΖ. λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐςι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἕξει τὴν μὲν ΑΒΓ γωνίαν τῇ ΔΕΖ, τὴν δὲ ΑΓΒ τῇ ΔΖΕ. χ. 6.

ΚΑ-

(ο) Κατὰ τὴν κγ. τοῦ α. (π) Κατὰ τὴν ζ. συνέπ. τῆς λβ. τοῦ α. (ρ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (σ) Ἐξ ὑποθ. (τ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε. (υ) Κατὰ τὴν β. τοῦ ε. (φ) Κατὰ τὴν η. τοῦ α. (χ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ψ) Κατὰ τὴν ῥηθ. συνέπ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Συνεστάτω ἡ μὲν ΖΔΗ, γωνία ἴση ἑποτέρᾳ τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἡ δὲ ΔΖΗ τῇ ΑΓΒ. (ω) λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση (α)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΔΗΖ. ὡς ἄρα ΑΒ : ΑΓ : : ΔΗ : ΔΖ. (β) ἀλλ' ὡς ΑΒ : ΑΓ : : ΕΔ : ΔΖ. (γ) ὡς ἄρα ΕΔ : ΔΖ : : ΔΗ : ΔΖ. (δ) ἄρα ἡ ΕΔ = ΔΗ. (ε) ἐν τοῖς τριγώνοις ἐν ΔΕΖ, ΔΖΗ, ἡ μὲν ΔΕ = ΔΗ, ἡ δὲ ΔΖ κοινὴ, καὶ γωνία ἡ ΕΔΖ = ΖΔΗ. (ζ) ἄρα καὶ γωνία ἡ ΔΖΕ = ΔΖΗ, καὶ ἡ ΔΕΖ = ΔΗΖ (η) ἀλλ' ἡ μὲν ΔΖΗ = ΑΓΒ, (θ) ἡ δὲ ΔΗΖ = ΑΒΓ, (ι) ἄρα ἡ μὲν ΑΓΒ = ΔΖΕ, ἡ δὲ ΑΒΓ = ΔΕΖ, ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Ἐὰν δύω τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσαι τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἔστω δύω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ΒΑΓ γωνίαν τῇ ΕΔΖ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας, τὰς ΑΒΓ,

---

(ω) Κατὰ τὴν κγ. τῦ α. (α) Κατὰ τὴν ζ. συνέπ. τῆς λβ. τῦ α. (β) Κατὰ τὴν δ. τῦ ς. (γ) Ἐξ ὑποθ. (δ) Κατὰ τὴν ι. τῦ ε. (ε) Κατὰ τὴν β. τῦ ε. (ζ) Ἐκ τῆς κατασκ. (η) Κατὰ τὴν δ. τῦ β. (θ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ι) Κατὰ τὴν ἀξιώ. συνέπ.