ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ ΑΘ, ΕΓ, ΑΚ, ΖΘ, ΕΗ, ΚΓ παραλληλόγραμμά εἰσιν. αἱ ἄρα ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. (α) καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΔ, ΑΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν (β) ἔστι δὲ ἡ μὲν ΑΕ ἡμίσεια τῆς ΑΔ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΑΒ· ἄρα ΑΕ = ΑΖ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΑΕ = ΖΚ, ἡ δὲ ΑΖ = ΕΚ. (γ) ἄρα καὶ ἡ ΖΚ = ΕΚ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΘ, ΚΗ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΖΚ, ΚΕ. αἱ τέσσαρες ἄρα ΕΚ, ΖΚ, ΚΘ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἑνὶ αὐτῶν γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Ε, Ζ, Θ, Η σημείων ἥξει, καὶ ἐγγεγραμμένος ἔσται εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ΄.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ. σχ. 16.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Κ. λέγω, ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΚΑ, ΚΔ, ΚΓ, ΚΒ, γραφόμενος κύκλος ἐστὶν ὁ ζητούμενος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΔΑΒ, ΔΓΒ, ἡ μὲν ΔΑ = ΔΓ, ἡ δὲ ΑΒ = ΒΓ, ἡ δὲ ΔΒ κοινή. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΔΒ = ΓΔΒ, καὶ ἡ ΑΒΔ = ΓΒΔ. (δ) ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔΓ, ΑΒΓ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΔΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΑΒ, ΔΓΒ, δίχα

(α) Κατὰ τὴν λδ. τοῦ α. (β) Ἐξ ὑποθ. (γ) Κατὰ τὴν λδ. τοῦ α. (δ) Κατὰ τὴν η. τοῦ α.

δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ ἐν τοῖς ΑΔΚ, ΓΔΚ τριγώνοις, ἡ μὲν ΑΔ = ΔΓ, ἡ δὲ ΔΚ, κοινή, καὶ γωνία ἡ ΑΔΚ = ΓΔΚ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ΑΚ = ΚΓ. (ε) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΚ, ΚΒ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΚΓ. αἱ τέσσαρες ἄρα ΑΚ, ΚΓ, ΔΚ, ΚΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἑνὶ αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ περιγεγραμμένος ἔσται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείσθω τὶς εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ. (ζ) καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς αὐτὸν ἡ ΒΔ ἴση τῇ ΑΓ, (η) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΓ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΔΓΑΕ. Σχ. 17.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΑΒ = ΑΔ. ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ ΑΔΒ τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ ΑΒ. ΒΓ = $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2$. (θ) ἔστι δὲ $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 = \overline{\Delta\mathrm{B}}^2$. ἡ γὰρ ΑΓ = ΔΒ. (ι) ἄρα καὶ ΑΒ. ΒΓ = $\overline{\Delta\mathrm{B}}^2$. (κ) ἐφαπτομένη ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τοῦ ΔΓΑΕ κύκλου. (λ) ἡ γωνία ἄρα ΒΔΓ = ΔΑΓ: (μ) κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΔΓ. ἄρα

(ε) Κατὰ τὴν δ. τοῦ α. (ζ) Κατὰ τὴν ια. τοῦ β. (η) Κατὰ τὴν α. τοῦ δ: (θ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ι) Ὡσαύτως. (κ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (λ) Κατὰ τὴν λζ. τοῦ γ. (μ) Κατὰ τὴν λβ. τοῦ γ.

ΑΔΓ + ΒΔΓ, ἤτοι ΑΔΒ = ΑΔΓ + ΔΑΓ. (ν) ἀλλ' ἡ ΔΓΒ = ΑΔΓ + ΔΑΓ. (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΑΔΒ = ΔΓΒ. (ο) ἀλλ' ἡ ΑΔΒ = ΑΒΔ. (π) ἄρα καὶ ἡ ΑΒΔ = ΔΓΒ. ἄρα καὶ ΔΒ = ΔΓ. (ϱ) ἀλλὰ ΔΒ = ΑΓ. ἄρα καὶ ἡ ΑΓ = ΔΓ. ἄρα καὶ γωνία ἡ ΓΑΔ = ΓΔΑ. (σ) ἡ ἄρα ΔΓΒ διπλασίων ἐστὶ τῆς ΔΑΒ. ἀλλὰ τῇ ΔΓΒ ἴση δέδεικται ἡ ΑΒΔ. καὶ ἡ ΑΒΔ ἄρα διπλασίων τῆς ΔΑΒ. ἀλλὰ τῇ ΑΒΔ ἴση ἡ ΑΔΒ. (τ) καὶ ἡ ΑΔΒ ἄρα διπλασίων τῆς ΔΑΒ. ἰσοσκελὲς ἄρα συνέστη τρίγωνον τὸ ΑΔΒ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. σχ. 18.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει ΗΘ γωνιῶν τῆς λοιπῆς τῆς πρὸς τῷ Ζ. (υ) καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τρίγωνονον τὸ ΑΓΔ ἰσογώνιον τὸ ΖΗΘ. (φ) καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν ΑΓΔ, ΑΔΓ γωνιῶν ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ ἐστὶ τὸ ζητούμενον πεντάγωνον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΑΓΔ, ΑΔΓ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ

(ν) Κατὰ τὸ β. ἀξ. (ξ) Κατὰ τὴν λβ. τοῦ α. (ο) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (π) Κατὰ τὴν ε. τοῦ α. (ϱ) Κατὰ τὴν ϛ. τοῦ α. (σ) Κατὰ τὴν ε. τοῦ α. (τ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (υ) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (φ) Κατὰ τὴν β. τοῦ δ.

ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι ΓΑΔ, ΒΔΓ, ΒΔΑ, ΑΓΕ, ΕΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ αἱ περιφέρειαι ἄρα ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις. (χ) ἄρα καὶ αἱ πέντε εὐθεῖαι ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις. (ψ) ἰσόπλευρον ἄρα τὸ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια ἴση τῇ ΑΕ. ἔστι δὲ ἡ μὲν ΑΒΓΔ περιφέρεια τριπλασία τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΑΕΔΓ τριπλασία τῆς ΑΕ. ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ἴση τῇ ΑΕΔΓ περιφερείᾳ. καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΕΔ = ΑΒΓ. (ω) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ, ΒΑΕ γωνιῶν ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΕΔ, ΑΒΓ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ πεντάγωνον, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἔστιν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ΑΒΓΔΕ. χ. 19.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα τὰ, Α, Β, Γ, Δ, Ε. καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ΗΘ, ΘΖ, ΖΛ, ΛΜ, ΜΗ. Λέγω, ὅτι τὸ ΗΘΖΛΜ ἐστὶ τὸ ζητούμενον πεντάγωνον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὰ Β, Ζ, Γ, Λ, Δ σημεῖα αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΓ, ΚΛ, ΚΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ, σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. (α) ἄρα $\overline{ZK}^2 = \overline{KB}^2 + \overline{BZ}^2$. ἀλλὰ $\overline{ZK}^2 = \overline{K\Gamma}^2 + \overline{\Gamma Z}^2$. (β)

(χ) Κατὰ τὴν κς. τοῦ γ. (ψ) Κατὰ τὴν κθ. τοῦ γ. (ω) Κατὰ τὴν κζ. τοῦ γ. (α) Κατὰ τὴν ιη. τοῦ γ.

(β) ἄρα $\overline{\mathrm{KB}}^2 + \overline{\mathrm{BZ}}^2 = \overline{\mathrm{K\Gamma}}^2 + \overline{\mathrm{\Gamma Z}}^2$. (γ) ἀλλὰ $\overline{\mathrm{KB}}^2 = \overline{\mathrm{K\Gamma}}^2$. καὶ γὰρ ἡ ΚΒ = ΚΓ. ἄρα καὶ $\overline{\mathrm{BZ}}^2 = \overline{\mathrm{\Gamma Z}}^2$. (δ) ἄρα ἡ ΒΖ = ΓΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΛ = ΛΔ. ἐν τοῖς τριγώνοις οὖν ΖΒΚ, ΖΓΚ, ἡ μὲν ΚΒ = ΚΓ, ἡ δὲ ΒΖ = ΖΓ, ἡ δὲ ΚΖ κοινή. ἡ γωνία ἄρα ἡ ΒΚΖ = ΖΚΓ. (ε) ἡ ἄρα ΒΚΓ διπλασία τῆς ΖΚΓ. ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΔΚΓ διπλασία ἐστὶ τῆς ΛΚΓ. ἀλλ' ἡ ΒΚΓ = ΔΚΓ. (ζ) ἄρα καὶ ἡ ΖΚΓ = ΛΚΓ. καὶ ἐν τοῖς τριγώνοις οὖν ΚΖΓ, ΚΛΓ, ἡ μὲν γωνία ΖΚΓ = ΛΚΓ, ἡ δὲ ΚΓΖ = ΚΓΛ, ἡ δὲ ΚΓ κοινή. ἄρα καὶ ἡ γωνία ΚΖΓ = ΚΛΓ, καὶ ἡ ΖΓ = ΓΛ. (η) ἡ ἄρα ΖΛ διπλασία τῆς ΖΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΘ διπλασία τῆς ΖΒ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ΒΖ = ΖΓ, καὶ ἡ ΘΖ ἄρα ἴση τῇ ΖΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΛΜ, ΜΗ, ΗΘ ἴση ἑκατέρα τῶν ΘΖ, ΖΛ. αἱ πέντε ἄρα ΛΖ, ΖΘ, ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ πεντάγωνον. ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τριγώνοις ΖΒΚ, ΖΓΚ, ἡ μὲν ΒΚ = ΓΚ, ἡ δὲ ΒΖ = ΓΖ, ἡ δὲ ΖΚ κοινή, καὶ γωνία ἄρα ἡ ΚΖΒ = ΚΖΓ. (θ) ἡ ἄρα ΒΖΓ διπλασία τῆς ΚΖΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΔΛΓ διπλασία τῆς ΚΛΓ. ἀλλ' ἡ ΚΖΓ = ΚΛΓ, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ ἡ ΒΖΓ = ΔΛΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΛΜΗ, ΜΗΘ, ΗΘΖ ἴση ἑκατέρα τῶν ΘΖΛ, ΖΛΜ. ἄρα αἱ πέντε γωνίαι Η, Θ, Ζ, Λ, Μ τοῦ πενταγώνου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα τὸ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν δοθέντα κύκλον· τὸ ζητούμενον ἄρα ἐστὶ πεντάγωνον.

ΠΡΟ-

(β) Κατὰ τὴν μζ. τοῦ α. (γ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (δ) Κατὰ τὸ γ. ἀξ. (ε) Κατὰ τὴν η. τοῦ α. (ζ) Κατὰ τὴν κϛ. τοῦ γ. (η) Κατὰ τὴν κϛ. τοῦ α. (θ) Κατὰ τὴν η τοῦ α.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ. σχ. 20.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἑκατέρας τῶν ΓΚ, ΔΚ. καὶ ἀπὸ τοῦ Κ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΚ, ΔΚ εὐθεῖαι ἤχθωσαν ταῖς ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ κάθετοι αἱ ΚΖ, ΚΘ, ΚΗ, ΚΜ, ΚΛ. λέγω, ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τούτων γραφόμενος κύκλος ἐστὶν ὁ ζητούμενος. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΒΓ, ΚΔΓ, ἡ μὲν ΒΓ = ΓΔ, (ι) ἡ δὲ ΓΚ κοινή, καὶ γωνία ἡ ΚΓΒ = ΚΓΔ. (κ) ἄρα καὶ ἡ γωνία ΚΒΓ = ΚΔΓ. (λ) ἀλλ' ἡ ΓΔΕ διπλασία τῆς ΚΔΓ. (μ) διπλασία ἄρα καὶ τῆς ΚΒΓ. ἀλλ' ἡ ΓΒΑ = ΓΔΕ, (ν) ἄρα καὶ ἡ ΓΒΑ διπλασία τῆς ΚΒΓ. ἡ ἄρα ΚΒ δίχα τέμνει τὴν ΓΒΑ γωνίαν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέραν τῶν ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέμνει ἑκατέρα τῶν ΚΑ, ΚΕ. ἐν τοῖς τριγώνοις οὖν ΚΓΖ, ΚΓΘ, ἡ μὲν γωνία ΚΖΓ = ΚΘΓ, (ξ) ἡ δὲ ΚΓΖ = ΚΓΘ, ἡ δὲ ΚΓ κοινή. ἄρα καὶ ἡ ΚΖ = ΚΘ. (ο) ὁμοίως δὴ δειχθήσεται τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἡ ΚΗ, τῇ δὲ ΚΗ ἡ ΚΜ, τῇ δὲ ΚΜ ἡ ΚΛ. αἱ πέντε ἄρα ΚΖ, ΚΘ, ΚΗ, ΚΜ, ΚΛ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Κ διαστήματι δὲ ἑνὶ τούτων γραφό-

(ι) Ἐξ ὑποθ. (κ) Ἐκ τῆς κατασκ. (λ) Κατὰ τὴν δ. τοῦ α (μ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Ἐκ τῆς κατασκ (ο) Κατὰ τὴν κϛ. τοῦ α.

φόμενος κύκλος ἐγγεγραμμένος ἔςαι τῷ δοθέντι ΑΒΓΔΕ πενταγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐςιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον περιγράψαι.

Ἔςω τὸ δοθὲν πεντάγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ. χ. 21.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΚ, ΔΚ. καὶ ἀπὸ τῦ Κ σημείῦ, καθ' ὃ συμβάλλῦσιν αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ. λέγω ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαςήματι δὲ ἑνὶ τῦτων γραφόμενος κύκλος ἐςὶν ὁ ζητῦμενος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁμοίως τῷ πρὸ τῦτῦ δειχθήσεται, ὅτι ἑκάςη τῶν ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάςης τῶν ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ εὐθειῶν. ἐπεὶ ὖν ἡ γωνία ΒΓΔ = ΓΔΕ, (π) καὶ τῆς μὲν ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ΚΓΔ, τῆς δὲ ΓΔΕ ἡ ΚΔΓ, (ρ) ἄρα καὶ ἡ ΚΓΔ = ΚΔΓ. ἄρα καὶ ἡ ΚΓ = ΚΔ. (σ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάςη τῶν ΚΒ, ΚΑ, ΚΕ ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΚΓ, ΚΔ. αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ, ΚΑ, ΚΒ ἴσαι ἀλλήλαις. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαςήματι δὲ ἑνὶ τῦτων γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔςαι περιγεγραμμένος περὶ τὸ δοθὲν ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔςω

(π) Ἐξ ὑποθ. (ρ) Ἐκ τῆς κατασκ. (σ) Κατὰ τὴν ϛ. τῦ α.

Ἔϛω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ. χ. 22.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω τȣ̃ ΑΒΓΔΕΖ κύκλȣ διάμετρος ἡ ΑΔ. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τȣ̃ κύκλȣ τὸ Κ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαϛήματι δὲ τῷ ΔΚ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΚΓΘ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι ἀπὸ τῶν τομῶν Ε, Γ ἐπὶ τὸ κέντρον αἱ ΕΚ, ΓΚ, διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιόν ἐϛι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΔΚ = ΔΕ. ἀλλὰ τῇ ΚΔ = ΚΕ. (τ) ἄρα καὶ ἡ ΚΕ = ΔΕ. (υ) ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΚΕΔ τρίγωνον. ἄρα καὶ ἰσογώνιον. (φ) ἡ ἄρα ΕΚΔ γωνία ἴση τριτημορίῳ δύω ὀρθῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΚΓ ἴση τριτημορίῳ δύω ὀρθῶν. (χ) ἀλλ' αἱ τρεῖς ΕΚΔ, ΔΚΓ, ΓΚΒ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς. (ψ) ἄρα καὶ ἡ ΓΚΒ ἴση τριτημορίῳ δύω ὀρθῶν. αἱ ἄρα ΕΚΔ, ΔΚΓ, ΓΚΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν ἄρα ΒΚΑ, ΑΚΖ, ΖΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις. (ω) καὶ αἱ περιφέρειαι ἄρα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. (α) καὶ αἱ αὐτὰς ὑποτείνȣσαι ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ἐϛίν. (β) ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ἑξάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια ἴση τῇ ΑΖ, καὶ ἔϛι τῆς μὲν ΑΒ τετραπλασία ἡ ΑΒΓΔΕ, τῆς δὲ ΑΖ ἡ ΑΖΕΔΓ. ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔΕ = ΑΖΕΔΓ. (γ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΖΕ = ΑΒΓ. (δ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάϛη τῶν λοιπῶν τȣ̃ ἑξαγώνȣ γωνιῶν ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖΕ, ΑΒΓ. ἰσογώ-

(τ) Κατὰ τὸ δ. πόρ. τȣ̃ α (υ) Κατὰ τὸ α. ἀξ. (φ) Κατὰ τὴν συνέπ. τῆς ε. τȣ̃ α. (χ) Κατὰ τὴν ι. συνέπ. τῆς λβ. τȣ̃ α. (ψ) Κατὰ τὴν ιγ. τȣ̃ α. (ω) Κατὰ τὴν κϛ. τȣ̃ α. (α) Κατὰ τὴν κϛ. τȣ̃ γ. (β) Κατὰ τὴν κθ. τȣ̃ γ. (γ) Κατὰ τὸ ι. ἀξ. (δ) Κατὰ τὴν κζ. τȣ̃ γ.

γώνιον ἄρα τὸ ἑξάγωνον, δέδεικται δὲ ὅτι καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τὸ ζητέμενον ἄρα ἐςί.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Ἑκάςη ἑξαγώνε γωνία ἴση ἐςὶ δυσὶ τριτημορίοις δύο ὀρθῶν. ἑκάςη γὰρ ἴση δυσὶ γωνίαις ἰσοπλεύρων τριγώνων.

Β΄. Ἡ τε ἑξαγώνε πλευρὰ ἴση ἐςὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τε κύκλε.

Γ΄. Ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων ἐφαπτομένας τε κύκλε ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἀκολέθως τοῖς ἐπὶ τε πενταγώνε εἰρημένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τε πενταγώνε εἰρημένοις εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔςω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. χ. 23.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Γεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνε μὲν ἰσοπλεύρε εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένε πλευρὰ, ἡ ΑΓ, πενταγώνε δὲ ἰσοπλεύρε ἡ ΑΒ. καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ. καὶ ἐναρμοσθήτωσαν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἴσαι αὐταῖς εὐθεῖαι κατὰ τὸ συνεχές. λέγω, ὅτι ἐγγεγραμμένον ἔςαι τὸ ζητέμενον πεντεκαιδεκάγωνον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οἵων ἐςὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιέτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια, τρίτον ἔσα τε κύκ-

κύκλȣ, ἔςαι πέντε· ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πέμπτον ἔσα τȣ̃ κύκλȣ, ἐςὶ τριῶν. λοιπὴ ἄρα τῶν ἴσων, δύω. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ πεντεκαιδεκαγώνȣ πλευρά.

ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Λόγος ἐςὶ δύω μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ πρὸς ἄλληλα ποιὰ χέσις.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Διττὴ ἡ ποιὰ χέσις, κατὰ πηλικότητα, εἴτȣν περιοχὴν, καὶ καθ' ὑπεροχήν. καὶ ἡ μὲν, Γεωμετρικὸς, ἡ δὲ, Ἀριθμητικὸς, καλεῖται λόγος. οἷον, ἐμφαινόντων τῶν Α, Β τὰ ὁποιαȣ̃ν ὁμογενῆ μεγέθη, ἐάν τις θεωρῇ ποσάκις τὸ Α περιέχει ἢ περιέχεται ὑπὸ τȣ̃ Β, τὸν Γεωμετρικὸν πολυπραγμονεῖ λόγον· ἐὰν δὲ, πόσον ὑπερέχει ἢ ὑπερέχεται τὸ Α ὑπὸ τȣ̃ Β, τὸν Ἀριθμητικόν. καὶ τὸ μὲν Α Ἡγȣ́μενον, τὸ δαὶ Β Ἑπόμενον τȣ̃ λόγȣ λέγεται.

Β'. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον τὸ Α, πρὸς δεύτερον τὸ Β, καὶ τρίτον τὸ Γ, πρὸς τέταρτον τὸ Δ, ἐὰν τὸ Α τοσάκις περιέχει ἢ περιέχεται ὑπὸ τȣ̃ Β, ὁσάκις καὶ τὸ Γ ὑπὸ τȣ̃ Δ. καὶ τὰ μὲν τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, Ἀνάλογον καλείσθω· οἱ δὲ λόγοι, ἴσοι.

Γ'. Μὴ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη εἶναι λέγεται, ὅταν πρῶτον τὸ Α ȣ̓ τοσάκις περιέχει ἢ περιέχεται ὑπὸ δευτέρȣ τȣ̃ Β, ὁσάκις καὶ τρίτον τὸ Γ ὑπὸ τετάρτȣ τȣ̃ Δ. καὶ ἐὰν μὲν πρῶτον, τὸ Α πλεονάκις περιέχει ἢ ἐλαττονάκις περιέχεται ὑπὸ δευτέρȣ, τȣ̃ Β, ἢ τρίτον, τὸ Γ ὑπὸ τετάρτȣ τȣ̃ Δ, τὸ πρῶτον, τὸ Α, πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ τρίτον τὸ Γ, πρὸς τέταρτον τὸ Δ. καὶ τὰ μὲν μὴ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη, μὴ Ἀνάλογα καλείσθω· οἱ δὲ λόγοι, ἄνισοι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α.

Ἐπειδὴ τὸ περιέχειν, ἢ περιέχεσθαι λόγȣ διαφορὰν ȣ̓ ποιεῖ, διὰ τȣ̃το ἐν τοῖς ἑξῆς ἤτοι μόνον τῷ περιέχειν, ἢ μόνον τῷ περιέχεσθαι χρώμεθα.

Δ΄. Ἀναλογία ἐςὶν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης ἢ ἰσότης, ἥτις ἐν τρισὶν ὅροις τȣ̓λάχιςόν ἐςι. καὶ ὅταν μὲν τὸ ἑπόμενον τȣ̃ ἑνὸς λόγȣ, ἡγȣ́μενον τȣ̃ ἄλλȣ τȣ̃ ἐγγὺς τυγχάνῃ, Συνεχὴς ἡ Ἀναλογία καλεῖται, καὶ τὰ μεγέθη Συνεχῶς ἀνάλογα, ἢ ἐν Συνεχεῖ λόγῳ· ὅταν δὲ ἄλλως ἔχῃ, Κεχωρισμένη ἢ Διακεκριμένη, καὶ τὰ μεγέθη, Διακεκριμένως ἀνάλογα, ἢ ἐν Διακεκριμένῳ λόγῳ.

Ε΄. Ἐὰν τὸ ἡγȣ́μενον μεῖζον ᾖ τȣ̃ ἑπομένȣ, Μείζονος Ἀνισότητος ὁ λόγος λέγεται· ἐὰν δὲ ἔλαττον, Ἐλάσσονος.

ϛ΄. Ἐκθέτης λόγȣ ἐςὶν ὁ ἀριθμὸς ὁ ποσάκις μέγεθός τι ὑπὸ τȣ̃ ὁμογενȣ̃ς μεγέθȣς περιέχεται ἐμφαίνων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τȣ́τȣ δῆλον, ὡς οἱ τῶν ἴσων λόγων ἐκθέται ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. καὶ ὧν λόγων οἱ ἐκθέται ἴσοι εἰσὶν, ἴσοι κἀκεῖνοι.

ΣΗ-

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β.

Ιςέον ὅτι τὸ πηλίκον ταὐτὸν τῷ ἐκθέτῃ· ὅςις δὴ προκύπτει, τοῦ ἑπομένου διὰ τοῦ ἡγουμένου διαιρεθέντος, ἢ τὸ ἀνάπαλιν.

Ζ′. Τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἡγουμένων ὁποιωνοῦν λόγων, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἑπομένων αὐτῶν, **λόγον** ἔχειν λέγεται **Συγκείμενον** ἐκ τῶν λόγων οὓς πρὸς ἄλληλα ἔχει τὰ μεγέθη, τουτέςι τὰ ἡγούμενα, πρὸς τὰ ἑπόμενα· ἕκαςος δὲ τῶν ἐξ ὧν ὁ συγκείμενος σύγκειται, **Ἁπλοῦς**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐὰν Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ, καὶ Ε πρὸς Ζ λόγους τοὺς ὁποιουσοῦν πρὸς ἄλληλα ἔχῃ, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν Α, Γ, Ε, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν Β, Δ, Ζ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ, καὶ Ε πρὸς Ζ. ὁ λόγος δὲ ὃν ἔχει Α πρὸς Β, ἢ Γ πρὸς Δ, ἢ Ε πρὸς Ζ ἁπλοῦς ἐςὶ τῷ συγκειμένῳ λόγῳ παρατιθέμενος. ἔςω $A = 2$, $B = 4$, $\Gamma = 3$, $\Delta = 9$, $E = 1$, $Z = 8$. τὸ ἄρα γινόμενον ἐκ τῶν Α, Γ, Ε, ἴσον 6· τὸ δὲ ἐκ τῶν Β, Δ, Ζ ἴσον 288. ὁ οὖν 6 πρὸς τὸν 288 λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει 2 πρὸς 4, 3 πρὸς 9, καὶ 1 πρὸς 8. ἔχει γὰρ ὁ 6 πρὸς τὸν 288 λόγον ὃν 1 πρὸς 48· ὅτου ὁ 288 ἐςὶ τεσσαρακονταοκταπλάσιος τοῦ 6. ἐὰν δὲ τοὺς τῶν λόγων ἐκθέτας πολλαπλασιάσῃς, ἤτοι τὸν τοῦ 2 πρὸς 4, καὶ τὸν τοῦ 3 πρὸς 9, καὶ τὸν τοῦ 1 πρὸς 8, προκύψει ὁ 48. ἁπλοῦς δὲ ὁ λόγος τοῦ 2 πρὸς 4, ἢ τοῦ 3 πρὸς 9, ἢ τοῦ 1 πρὸς 8, τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ὁ 6 πρὸς τὸν 288 παρατιθέμενος.

Η΄. Ἐὰν μὲν οἱ ἐξ ὧν ὁ συγκείμενος λόγος δύω ὦσι, ϗ ἴσοι, ὁ μὲν συγκείμενος **διπλασίων** λέγεται ἑκατέρου τῶν ἐξ ὧν σύγκειται· ἑκάτερος δὲ αὐτῶν, **ὑποδιπλασίων**· ἐὰν δὲ τρεῖς, ϗ ἴσοι, ὁ μὲν συγκείμενος **τριπλασίων**, ἕκαστος δὲ τῶν ἐξ ὧν σύγκειται **ὑποτριπλασίων**· ἐὰν δὲ τέτταρες, ϗ ἴσοι, **τετραπλασίων**, καὶ ἕκαστος τῶν ἐξ ὧν σύγκειται, **ὑποτετραπλασίων**, ϗ ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄.

Τετράγωνος ἀριθμός ἐστι τὸ γινόμενον ἐξ ἀριθμοῦ τινὸς ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντος· ὁ δὲ δι᾽ οὗ, **Ῥίζα τετραγωνικὴ** ἀκούει. οἷον ὁ μὲν 36, τετράγωνος τοῦ 6, ὡς ἐξ αὐτοῦ πολλαπλασιαζομένου γινόμενος· ὁ δὲ 6, ῥίζα τετραγωνικὴ τοῦ 36.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ΄.

Κύβος ἀριθμός ἐστι τὸ γινόμενον ἐξ ἀριθμοῦ τινὸς ἐπὶ τὸ ἑαυτοῦ τετράγωνον πολλαπλασιαθέντος. ὁ δὲ πρῶτον ληφθεὶς ἀριθμὸς **κυβικὴ Ῥίζα**. οἷον, ὁ μὲν 216, κύβος τοῦ 6: ὁ δὲ 6, κυβικὴ ῥίζα τοῦ 216.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ε΄.

Οὐδ᾽ ὁ διπλασίων λόγος τὸν διπλάσιον ἐμφαίνει, οὐδ᾽ ὁ τριπλασίων τὸν τριπλάσιον. ὁ μὲν γὰρ διπλασίων ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ λόγου ἐμφαίνεται· ὁ δὲ τριπλασίων, ὑπὸ τοῦ κύβου. ἐχέτω μὲν γὰρ ἴσους λόγους 2 πρὸς 1, καὶ 8 πρὸς 4. δῆλον ἄρα ὅτι τὸ 16, τὸ ἐκ τῶν ἡγουμένων γινόμενον, πρὸ τὸ 4, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἑπομένων, οὐκ ἔχει λόγον διπλάσιον, ἀλλὰ τετραπλάσιον, ὅπερ οὖν λόγον ἔχει, ὃν ἐμφαίνει τὸ τοῦ ἐκθέτου 2 τετράγωγωνον, ἀμέλει τοι τὸ 4. ἔστωσαν πάλιν λόγοι τρεῖς ἴσοι, ὃν ἔχει 2 πρὸς 1, καὶ 8 πρὸς 4, καὶ 6 πρὸς 3. καὶ δῆλον, ὅτι τὸ 96, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἡγουμένων, πρὸς τὸ 12, τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἑπομένων, οὐκ ἔχει λόγον τριπλάσιον, ἀλλ' ὀκταπλάσιον, τὸν ἐμφαινόμενον δηλαδὴ ὑπὸ τοῦ κύβου τοῦ ἐκθέτου 2, εἴτουν τοῦ 8. λέγοντες οὖν ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ἐννοοῦμεν τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχειν ὃν τὸ τετράγωνον τοῦ Γ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ Δ. ὁμοίως ταυτόν ἐστιν εἰπεῖν Α πρὸς Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ Ε πρὸς Ζ, τῷ εἰπεῖν Α πρὸς Β λόγον ἔχει ὃν ὁ κύβος τοῦ Ε πρὸς τὸν κύβον τοῦ Ζ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ ϛʹ.

Σύγκειται πολλάκις ὁ λόγος οὐ μόνον ἐξ ἁπλῶν, ἀλλὰ καὶ ἐκ διπλασιόνων καὶ τριπλασιόνων καὶ ὑποδιπλασιόνων καὶ ὑποτριπλασιόνων, καὶ ἄλλων ὁποσωνοῦν καὶ ὁποιωνοῦν λόγων.

Θʹ. **Ἐναλλὰξ λόγος** ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον. οἷον ἐὰν τὸ Α ἡγούμενον ᾖ τοῦ Β, καὶ τὸ Γ τοῦ Δ, καὶ ληφθῇ τὸ μὲν Α ἡγούμενον τοῦ Γ, τὸ δὲ Β τοῦ Δ.

Ιʹ. **Ἀνάπαλιν λόγος** ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον. οἷον, ἐὰν τὸ Α ἡγούμενον ᾖ τοῦ Β, καὶ τὸ Γ τοῦ Δ, καὶ ληφθῇ τὸ μὲν Β ἡγούμενον τοῦ Α, τὸ δὲ Δ τοῦ Γ.

ΙΑʹ. **Σύνθεσις λόγου** ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνός, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. οἷον ἐὰν τὸ Α ἡγούμενον ᾖ τοῦ Β, καὶ ληφθῇ Α + Β ἡγούμενον τοῦ Β.

ΙΒʹ. **Διαίρεσις λόγου** ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. οἷον ἐὰν τὸ Α ἡγούμενον ᾖ τοῦ Β, καὶ ληφθῇ Α — Β ἡγούμενον τοῦ Β.

ΙΓʹ.

ΙΓ'. **Ἀναστροφὴ λόγου** ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου. οἷον, ἐὰν τὸ Α ἡγούμενον ᾖ τοῦ Β, καὶ ληφθῇ Α πρὸς Α – Β.

ΙΔ'. **Δι' ἴσου λόγος** ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. οἷον ὄντων μεγεθῶν τῶν Α, Β, Γ, καὶ τῶν Δ, Ε, Ζ· καὶ Α πρὸς Β τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντος ὃν καὶ Δ πρὸς Ε, καὶ Β πρὸς Γ ὃν Ε πρὸς Ζ· ὅταν ᾖ καὶ Α πρὸς Γ, οὕτω Δ πρὸς Ζ. τοῦτο δὲ αὐτὸ καὶ **τεταγμένη ἀναλογία** καλεῖται.

ΙΕ'. **Τεταραγμένη ἀναλογία** ἐστὶν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνηται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τὶ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τὶ πρὸς ἡγούμενον. οἷον τριῶν ὄντων μεγεθῶν τῶν, Α, Β, Γ, καὶ ἄλλων ἴσων τὸ πλῆθος τῶν Δ, Ε, Ζ, ὅταν ᾖ Α πρὸς Β οὕτω Δ πρὸς Ε. καὶ Β πρὸς Γ, οὕτω Ζ πρὸς Δ.

ΙϚ'. **Ὁμόλογα** μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ΙΖ'. **Ὅμοια** μέρη εἰσὶ τὰ ὑπὸ τῶν ὅλων ἰσάκις περιεχόμενα.

ΙΗ'. **Πολλαπλάσιόν** ἐστι τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

ΑΞΙ-

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

Α. Τὰ ἴσα ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἰσάκις περιέχονται· καὶ τὸ αὐτὸ, ἰσάκις ὑπὸ τῶν ἴσων.

Β'. Τὰ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἰσάκις περιεχόμενα ἴσα ἀλλήλοις· ὡσαύτως ἴσα καὶ τὰ τὸ αὐτὸ ἰσάκις περιέχοντα.

Γ'. Τὸ μεῖζον ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐλαττονάκις περιέχεται, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πλεονάκις ὑπὸ τοῦ μείζονος ἤπερ ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

Δ'. Τὸ πλεονάκις περιέχον τὸ αὐτὸ, μεῖζον τοῦ ἐλαττονάκις περιέχοντος· ὡσαύτως τὸ ἐλαττονάκις ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ περιεχόμενον μεῖζον τοῦ πλεονάκις περιεχομένου.

Ε'. Τὰ ὑπὸ τῆς μονάδος πολλαπλασιασθέντα ἢ διαιρεθέντα τὰ αὐτά εἰσι τοῖς καὶ πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως.

ς'. Τῶν ἴσων καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια ἴσα. καὶ ὧν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια ἴσα, κἀκεῖνα ἴσα.

Ζ'. Τοῦ δι' ἑαυτοῦ, ἢ δι' ἴσου διαιρεθέντος μονὰς τὸ πηλίκον.

Η'. Τῶν ἴσων δι' ἴσων διαιρεθέντων ἴσα τὰ πηλίκα. καὶ ὧν δι' ἴσων διαιρεθέντων ἴσα τὰ πηλίκα, κἀκεῖνα ἴσα.

Ἑρμηνεία τῶν σημείων, εἰς τὰ ἐν τοῖς μεγέθεσι, τοῖς διὰ τῶν στοιχείων δηλουμένοις, πάθη ἐμφαίνεται.

Τὸ μὲν Α. Β, ἢ Α×Β τὸ γινόμενον δηλοῖ τὸ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β· ἀπαγγέλλεται δὲ οὕτως· Α ἐν τῷ Β· τὸ δὲ $\mathrm{A}.\ \overline{\mathrm{B} \dagger \Gamma \dagger \Delta}$ ἐμφαίνει, ὅτι τὸ Α κοι-