ρήσομεν καὶ πάντας τοὺς κοινοὺς αὐτῶν διαιρέτας, ἐν οἷς τὸ παραγόμενον ἐκ πάντων τῶν κοινῶν ἁπλῶν παραγόντων ἀείποτε τὸ μέγιςον ἔςαι.

ἐπειδὴ τοίνυν τοῦ $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$· καὶ

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$·

οἱ κοινοὶ ἁπλοῖ παράγοντες εἰσὶ 2, 3, 5· ἄρα καὶ οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται.

$$\alpha'.\begin{cases}2\\3\\5\end{cases}\qquad \beta'.\begin{cases}2 \times 3 = 6\\2 \times 5 = 10\\3 \times 5 = 15\end{cases}$$

$$\gamma'.\begin{cases}1 \text{ καὶ}\\30\end{cases}$$

καὶ ὁ μέγιςος τούτων κοινὸς διαιρέτης $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Ἐπειδὴ πολλάκις ἀναγκαία ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίςου κοινοῦ διαιρέτου δύω ἀριθμῶν, καὶ ἡ μέθοδος τοῦ πάντα ἀριθμὸν εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν ἁπλοῦς παράγοντας λύειν, μάλιςα τῷ μὴ τοὺς τῶν παραγόντων πίνακας ἀνὰ χεῖρας ἔχοντι, ζητητέον ἑτέραν τινὰ ἰδιαιτέραν μέθοδον ἐκκαλύψαι τοῦ

Ὁποιωνοῦν δύω ἀριθμῶν τὸν μέγιςον κοινὸν διαιρέτην εὑρίσκειν·

§. 113. Ἔςω ὁ μείζων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν α, ὁ ἐλάττων β, καὶ ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης χ· ἐπειδὴ τὸ χ διαιρεῖ τὸ β, οὐκ ἔχει μεῖζον εἶναι τοῦ β, ἴσον δὲ καὶ μάλα, εἰ τὸ α διὰ τοῦ β διαιρέσιμον· διαιροῦσιν οὖν τὸ α διὰ τοῦ β τεθήτω τὸ πηλίκον εἶναι μ· καὶ τὸ λείψανον ἔςαι $\alpha - \mu\beta = o$· καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου $\chi = \beta$· ἢ τὸ λείψανον $\alpha - \mu\beta = \gamma$ ἔςαι ἔλαττον τοῦ διαιρέτου β. καὶ τηνικαῦτα ἀνάγκη πᾶσα τὸ χ διελεῖν καὶ γ· τὸ γὰρ χ διαιρεῖ τὸ τὸ β· ἄρα καὶ τὸ $\mu\beta$· καὶ εἰ τὸ χ διαιρεῖ τὸ α, ἄρα τὸ χ διαιρεῖ καὶ τὴν τούτων διαφορὰν $\alpha - \mu\beta = \gamma$·

Ἐὰν οὖν $\alpha : \beta$ οὐδὲν ὑπολείπῃ, ἔϛαι $\chi = \beta$· ἐὰν δ' ὑπολείπῃ τὸ λείψ. γ, ἔϛαι τὸ χ καὶ ὁ μέγιϛος κοινὸς διαιρέτης τοῦ β καὶ γ·

Εἰ οὖν $\beta : \gamma$ οὐδὲν ὑπολείπει, ἔϛαι $\chi = \gamma$· εἰδὲ $\beta : \gamma$ ὑπολείπει λείψ. τὸ δ, ἔϛαι χ καὶ ὁ μέγιϛος κοινὸς διαιρέτης τοῦ γ καὶ δ·

Εἰ οὖν $\gamma : \delta$ οὐδὲν ὑπολείπει, ἔϛαι $\chi = \delta$· εἰδὲ $\gamma : \delta$ ὑπολείπει ε, ἔϛαι χ καὶ ὁ μέγιϛος κοινὸς διαιρέτης τοῦ δ καὶ ε·

Εἰ οὖν $\delta : \varepsilon$ οὐδὲν ὑπολείπει, ἔϛαι $\chi = \varepsilon$· εἰδὲ $\delta : \varepsilon$ ὑπολείπει ζ, ἔϛαι χ καὶ ὁ μέγιϛος κοινὸς διαιρέτης τοῦ ε καὶ ζ· ὥϛε αὖθις χ ἴσον τῷ ζ, εἰ τὸ $\varepsilon : \zeta$ οὐδὲν ὑπολείπει·

Ἐὰν οὖν ὁ μείζων ἀριθμὸς διὰ τοῦ ἐλάττονος διαιρῆται, ὁ ἐλάττων διὰ τοῦ λειψάνου, τὸ α' λείψ. διὰ τοῦ β'· τὸ β'· διὰ τοῦ γ'· τὸ γ'· διὰ τοῦ δ'. κτ· μέχρις ἂν τὸ λείψ· ἴσον τῷ ο γένηται, ὁ ἔσχατος διαιρέτης ἔϛαι ὁ μέγιϛος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· ἢ

Ἐὰν α'· $\alpha : \beta = \mu$· καὶ $\alpha - \beta\mu = \gamma$·

β'· $\beta : \frac{\beta\mu}{\gamma} = \nu$. καὶ $\beta - \gamma\nu = \delta$

γ'· $\gamma : \frac{\gamma\nu}{\delta} = \pi$. καὶ $\gamma - \delta\pi = \varepsilon$

δ'· $\delta : \frac{\delta\pi}{\varepsilon} = \varrho$. καὶ $\delta - \varepsilon\varrho = \zeta$

ε'· $\varepsilon : \frac{\varepsilon\varrho}{\zeta} = \sigma$. καὶ $\varepsilon - \zeta\sigma = 0$.

ἔϛαι οὖν $\chi = \zeta$.

Σχόλιον.

Διορισθήτωσαν τὰ γράμματα δι᾽ ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι, ἂς ἀντικαταςοῦν ἀντὶ τούτων, καὶ ἔςαι δῆλα τὰ διὰ γραμμάτων λεγόμενα.

Παράδ.

Ἔςωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 2310, καὶ 360.

$$
\begin{array}{l}
2310 : 360 = 6 \\
\underline{2160} \\
360 : 150 = 2 \\
\underline{300} \\
150 : 60 = 2 \\
\underline{120} \\
60 : 30 = 2 \\
\underline{60} \\
0
\end{array}
$$

ὁ 30 ἄρα ἐςὶν ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 2310, καὶ 360.

Διαιρεθήτω ἔτι 58604 καὶ 4665, καὶ οὐδεὶς κοινὸς εὑρεθήσεται διαιρέτης, εἰμὴ ἡ μονάς.

Ἀξιώματα·

§. 114. α΄. Ἐὰν δύω, ἢ πλείους ἴσαι ποσότητες διὰ δύω, ἢ πλειόνων ἴσων ποσοτήτων, ἤ, ὃ ταὐτόν ἐςι, διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου διαιρεθῶσιν, ἔςαι καὶ τὰ τούτων πηλίκα ἴσα·

$$\alpha = \beta = \gamma \cdot \quad \chi = \psi = \omega.$$

ἔςαι οὖν $\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\beta}{\psi} = \frac{\gamma}{\omega}$ · ἢ $\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\beta}{\chi} = \frac{\gamma}{\chi}$

ἐν ἀριθμοῖς·

$24 = 6.4 = 3.8.$ καὶ $3 = 3 = 3.$ ἄρα

$\frac{24}{3} = \frac{6.4}{3} = \frac{3.8}{3}.$ τὸ γὰρ πηλίκον ἐςὶν 8· τὸ αὐτὸ κρατεῖ, καὶ συμπεπλεγμένων οὐσῶν τῶν ποσοτήτων.

β'· Ἴσαι ποσότητες, δι' ἀνίσων διαιρεθεῖσαι, παρέχουσι πηλίκα ἄνισα· ἔνθα τὸ πηλίκον μεῖζον ἔςαι τοῦ ἑτέρου, εἰ ὁ διαιρέτης ἐλάττων εἴη τοῦ ἑτέρου·

$$\begin{matrix} \alpha = \beta. \\ \gamma > \delta. \end{matrix} \quad \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta.}{\delta.} \quad \begin{matrix} 8 = 2.4 \\ 4 > 2. \end{matrix} \quad \frac{8}{4} < \frac{2.4}{2}$$

γ'· Ἄνισοι ποσότητες, δι' ἴσων διαιρεθεῖσαι, δώσουσι καὶ πηλίκα ἄνισα· τούτων δὲ μεῖζον ἔςαι τὸ ἐκ τῆς μείζονος διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου προκύπτον·

$$\begin{matrix} \alpha > \beta. \\ \gamma = \delta. \end{matrix} \quad \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}. \quad \begin{matrix} 8 > 6. \\ 2 = 2. \end{matrix} \quad \frac{8}{2} > \frac{6}{2}$$

δ'· Ἐὰν ποσότης τις μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῇ, καὶ διαιρεθῇ, οὐδεμίαν τροπὴν ὑφίςαται· ὅ ἐςιν, ἡ ποσότης μένει ἡ αὐτή· ὅσῳ γὰρ τῷ πολλαπλασιασμῷ αὔξεται, τοσούτῳ μειοῦται διὰ τῆς διαιρέσεως· μένει ἄρα ἡ αὐτὴ, ἥτις πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς διαιρέσεως ἦν· ὡς

$$6 \times 10 : 10 = 6 \cdot \text{ καὶ } \alpha \times \beta : \beta = \alpha \cdot \text{ ἢ } \frac{\alpha\beta}{\beta} = \alpha$$

ε'· Ἐὰν ὁ διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ἅμα διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος ἤτοι πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι, τὸ πηλίκον μένει ἀμετάβλητον·

Ἔςω 20 ὁ διαιρετέος, καὶ 4 ὁ διαιρέτης, ὧν τὸ πηλίκον 5·

$$20 \times 8 = 160 \cdot \text{ καὶ } 4 \times 8 = 32 \cdot \quad \frac{160}{32} = 5.$$

ὡσαύτ. $20 : 2 = 10 \cdot$ καὶ $4 : 2 = 2.$

$$\frac{10}{2} = 5 \cdot$$

Καὶ ἐν γένει·

Ἔςω α ὁ διαιρετέος, καὶ β ὁ διαιρέτης· καὶ τὸ τούτων πηλίκον Κ· ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} = \text{K}\cdot$ πολλαπλασιασθήτω α καὶ β ἄμφω ἐπὶ τὸ ν· καὶ τὸ πηλίκον μένει αὖθις Κ· ὡς $\frac{\alpha . \nu}{\beta . \nu} = \text{K}\cdot$ τὸ γὰρ ν τοῦ διαιρετέου ἀναιρούμενον ὑπὸ τοῦ ν τοῦ διαιρέτου ὑπολείπει αὖθις· $\frac{\alpha}{\beta}$, διαιρεθήτωσαν ἄμφω διὰ τοῦ ν· καὶ τὸ πηλίκον ἔςαι αὖθις Κ· οἷον $\frac{\alpha : \nu}{\beta : \nu} = \frac{\alpha}{\beta} = \text{K}\cdot$

Ὁ δὲ λόγος προφανής· ἄμφω γὰρ μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντες αὔξονται ἐπίσης, καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρεθέντες μειοῦνται ἐπίσης· ὁ διαιρέτης ἄρα περιέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ, ὁσάκις καὶ πρότερον· ἄρα καὶ πηλίκον τὸ αὐτό·

ϛʹ· Ἐάν τις πληθὺς ποσοτήτων, διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως (§. 16.) συνημμένη, διαιρεθῇ δι' οίασοῦν ποσότητος, τὸ πηλίκον ἔςαι τὸ αὐτὸ τῇ ποσότητι τῇ προκυπτούσῃ, εἰ ἑκάςης τῶν ποσοτήτων ἐν μέρει διὰ τοῦ δοθέντος διαιρέτου διαιρεθείσης, τὰ ἐν μέρει πηλίκα προσαθροισθῇ.

Ἔςωσαν ποσότητες α, β, γ, δ κτ· τὰ ἐν μέρει πηλίκ πηλίκα τοῦ $\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu}$ ἀμαληφθέντα ἔϛαι ἴσα τῷ πηλίκῳ τοῦ $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{\nu}$.

ἢ ἐν ἀριθμοῖς·

$$+ \frac{4}{2} + \frac{6}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} = \frac{4+6+8+12}{2}$$

$$= \frac{30}{2} = 16·$$

Χάριν τῶν πρωτοπείρων δειχθήσεται τοῦτο σαφέϛερον οὕτως· Ἔϛω τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ἐν μέρει πηλίκων, εἰ ἑκάϛη ποσότης ἐν μέρει διαιρεῖται, $= K$· ἤτοι $\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\delta}{\nu} = K$· αἱ δύω αὗται ποσότητες εἰσὶ πάντῃ ἴσαι ἀλλήλαις, ἢ δῆλον· ἀλλὰ διὰ τὸ (§. 79.α΄.) ἔσονται ἴσαι, καὶ εἰ μετὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθήσονται· κληθήτω αὕτη $= \nu$· πολλαπλασιασθήτω οὖν $\frac{\alpha}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν, καὶ $\frac{\beta}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν, καὶ $\frac{\gamma}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν, καὶ $\frac{\delta}{\nu}$ μετὰ τοῦ ν· καὶ τελευταῖον καὶ K μετὰ τοῦ ν· κατὰ τὸ δ΄ τοῦδε τοῦ §. ἔϛαι $\frac{\alpha}{\nu} \times \nu$ $+ \frac{\beta}{\nu} \times \nu + \frac{\gamma}{\nu} \times \nu + \frac{\delta}{\nu} \times \nu$ $= \alpha + \beta + \gamma + \delta$· καὶ $K \times \nu = K\nu$· ὥϛε $\alpha + \beta + \gamma + \delta = K\nu$· ἢ

$(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = K\nu$· κατὰ τὸ α΄· τοῦδε ἔσται καὶ $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{\nu} = \frac{K\nu}{\nu}$· ἀλλὰ διὰ τὸ δ΄· $\frac{K\nu}{\nu} = K$· ἄρα $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{\nu} = K$· ἦν δέ, ὡς ἐν ἀρχῇ τῆς δείξεως ὑποτέθειται, $\frac{\alpha}{\nu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\nu}+\frac{\delta}{\nu} = K$· ἔστι δὲ καὶ $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{\nu} = K$· ἄρα καὶ

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\nu}+\frac{\delta}{\nu}$$

(§. 48. δ΄.)

Συντομώτερον δὲ οὕτως ἡ δεῖξις ἐπαχθήσεται.

$$\frac{\alpha}{\nu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\nu}+\frac{\delta}{\nu} = K.$$

$\overline{}$. ν, ἤτοι πολλαπλ. ἐπὶ τὸ ν·

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = K\nu$$

$\overline{}$: ν, ἤτοι διαιρ. διὰ τοῦ ν·

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{\nu} = K.$$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\nu}+\frac{\delta}{\nu}.$$

Τοῦτο ὡς καθόλου ἁρμόζει πᾶσι τοῖς ἀριθμοῖς·

ζ΄. Ἐὰν ὁ διαιρετέος ἡ διαφορὰ δυοῖν ποσοτήτων, ὡς $\alpha - \beta$, ὁ δὲ διαιρέτης ὁτισοῦν ἀριθμὸς ἦ, οἷον ν, ἔσται ἔςαι $\frac{α - β}{ν} = \frac{α}{ν} - \frac{β}{ν}$. τουτέςι, τὸ αὐτὸ ἐςι, τὸ τὰς ποσότητας τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεῖσθαι ἀπ᾽ ἀλλήλων, καὶ τὴν διαφορὰν διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ δοθέντος διαιρέτου, τῷ, ἑκατέραν ποσότητα ἐν μέρει διαιρεῖσθαι, καὶ τὰ πηλίκα ἀφαιρεῖσθαι ἀπ᾽ ἀλλήλων· π. χ.·

$\frac{15 - 6}{3} = \frac{15}{3} - \frac{6}{3}$. ἔςι γὰρ $15 - 6 = 9$· καὶ $9 : 3 = 3$. ἔςι δὲ καὶ $\frac{15}{3} = 5$. καὶ $\frac{6}{3} = 2$. ὥςε $5 - 2 = 3$· δεικτέον τοῦτο καὶ ἐν γένει·

$\frac{α - β}{ν} = \frac{α}{ν} - \frac{β}{ν}$. ἡ διαφορὰ τοῦ $α - β$ κληθήτω δ· ὥςε $α - β = δ$· διὰ τὸ α΄· τοῦδε τοῦ §. ἔςαι $\frac{α - β}{ν} = \frac{δ}{ν}$. θεωρηθήτωσαν ἤδη τὰ δύω ἴσα ποσὰ ἄνευ τοῦ διαιρέτου ν, ἤτοι μόνον $α - β = δ$· ἐὰν ἀμφοῖν $+ β$ προςεθῇ, μενοῦσιν αὖθις ἴσα (§. 48. α΄.). ἤτοι $α - β + β = δ + β$. ἀλλὰ $α - β + β = α$· (§. 37.) ἄρα $α = δ + β$· καὶ διὰ τὸ α΄· τοῦδε τοῦ §. $\frac{α}{ν} = \frac{δ}{ν} + \frac{β}{ν}$.. ἐὰν ἴσον ἀπὸ ἴσου ἀφαιρεθῇ, αἱ διαφοραὶ ἔσονται ἴσαι (§. 53. α΄.)· ἔςω $\frac{β}{ν} = \frac{β}{ν}$. καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπ᾽ ἀμφοῖν $\frac{β}{ν}$. ἔςαι οὖν $\frac{α}{ν} - \frac{β}{ν}$ (§. 49.) $= \frac{δ}{ν} + \frac{β}{ν} - \frac{β}{ν}$. ὅ ἐςιν $\frac{α}{ν} - \frac{β}{ν} = \frac{δ}{ν}$ (§. 37.)·

'Επεὶ

Ἐπεὶ $\frac{\alpha-\beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$. ἐν ἀρχῇ, καὶ $\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$, ὡς ἤδη δέδεικται· ἔσται ἄρα καὶ $\frac{\alpha-\beta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$. (§. 48. δ΄.)

Συντομώτερον.

$$\frac{\alpha-\beta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}.$$

Δεῖξις.

Ἔστω $\alpha - \beta = \delta$. :ν. διαιρ. διὰ ν

$$\frac{\alpha-\beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$$

Αὖθις $\alpha - \beta = \delta$

$+\beta = +\beta$ προσ: $+\beta$.

$\alpha - \beta + \beta = \delta + \beta$, ἤτοι

$\alpha = \delta + \beta$: ν. διαιρ. διὰ ν·

$$\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\delta}{\nu} + \frac{\beta}{\nu}$$

$\frac{\beta}{\nu} = \frac{\beta}{\nu}$. ἀφαιρ. $\frac{\beta}{\nu}$

$\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu} + \frac{\beta}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$. τουτέστιν

$$\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$$

Ἐπειδὴ οὖν $\frac{\alpha-\beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$ ἐν ἀρχῇ·

Ἤδη δὲ $\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu} = \frac{\delta}{\nu}$· ἔσται (§. αὐτ.) καὶ $\frac{\alpha-\beta}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu}$.

Περὶ