ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ
μετὰ καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν, καὶ γραμμάτων.

§. 104. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος τὸ παραγόμενόν ἐςιν ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων τοῦ γνωςοῦ, ἤτοι τοῦ διαιρέτου, καὶ τοῦ ἑτέρου τοῦ ἀγνώςου, ἤτοι τοῦ πηλίκου· (§. 98.) καὶ τὸ καταφατικὸν παραγόμενον ἀείποτε ἀνήκει δυσὶ παράγουσι τὰ αὐτὰ σημεῖα, τὸ δ' ἀποφατικὸν δυσὶ τὰ ἐναντία ἔχουσιν· (§. 77.) ὁ διαιρέτης ἄρα, καὶ τὸ πηλίκον τοῖς αὐτοῖς σημείοις σημειωθήσονται, τοῦ διαιρετέου καταφατικοῦ, τοῖς δ' ἐναντίοις, ἀποφατικοῦ ὄντος·

ὅθεν α'· $(+\alpha\beta : +\beta = \alpha$
$(+\alpha\beta : -\beta = -\alpha$
β'· $(-\alpha\beta : +\beta = -\alpha$
$(-\alpha\beta : -\beta = +\alpha$

ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ γενικὸς κανών.

Τὸ πηλίκον ἔςαι καταφατικὸν, τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐχόντων· ($+$ καὶ $+$, ἢ $-$ καὶ $-$) ἀποφατικὸν δὲ, τὰ ἐναντία ($+$ καὶ $-$, ἢ $-$ καὶ $+$).

ὡς $12 : 4 = 3$
$12 : -4 = -3$
$-12 : 4 = -3$
$-12 : -4 = 3$

$15\alpha\beta : -3\alpha = -5\beta$·
$-26\alpha\beta\delta : -13\alpha\delta = 2\beta$·
$\alpha\alpha + 2\alpha\beta - 30\alpha\delta : 2\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \beta - 15\delta$·
$\alpha\alpha + 6\alpha\beta - 21\alpha\delta : -7\alpha = -\frac{1}{7}\alpha - \frac{6}{7}\beta + 3\delta$·

Σχόλιον.

Τὸ $\alpha\alpha : 2\alpha = \frac{\alpha\alpha}{2\alpha}$ (§. 100. σχ.). καὶ ἐπειδὴ τὸ α τοῦ διαιρέτου ἀναιρεῖ ἓν α τοῦ διαιρετέου, ἔςαι

$\frac{\alpha\alpha}{2\alpha} = \frac{\alpha}{2}$. ἀντὶ τοῦ $\frac{\alpha}{2}$ ἠμπορεῖ νὰ τεθῆ τὸ $\frac{1}{2}\alpha$. ὅτι $\frac{1}{2}\alpha$ ἰσοδυναμεῖ τῷ $\frac{\alpha}{2}$. δι' ἀριθμῶν ἐςιν εὐληπτότερον· ἔςω $\alpha = 6$· ὅθεν $\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{2} = 3$. $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}6$. τοῦτο δὲ $= 3$· ἄρα $3 = 3$. ἄρα $\frac{1}{2}6 = \frac{6}{2}$. καὶ $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\alpha$. ὡσαύτως καὶ $\alpha\alpha : -7\alpha = \frac{\alpha\alpha}{-7\alpha} = \frac{\alpha}{-7} = -\frac{1}{7}\alpha$. κτ.

Αὖθις εὑρεθήσεται, ὅτι $(\alpha\alpha - \beta\beta) : (\alpha - \beta) = \alpha + \beta$

$$\begin{array}{l} \alpha\alpha - \alpha\beta \\ \hline \alpha\beta - \beta\beta \qquad (\S.\ 49.) \\ \alpha\beta - \beta\beta \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

ὅτι

α'· $+\alpha$ ἐν $+\alpha\alpha$ περιέχεται $+\alpha$: ις· καὶ γὰρ $(\alpha - \beta) \times +\alpha = +\alpha\alpha - \alpha\beta$· τοῦτο ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $+\alpha\alpha - \beta\beta$ δώσει $+\alpha\beta - \beta\beta$ λείψ.

β'· $+\alpha$ ἐν $+\alpha\beta$ (τῷ λειψ.) περιέχεται $+\beta$: ις· ὅτι $(\alpha - \beta) \times +\beta = +\alpha\beta - \beta\beta$. ὅ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $+\alpha\beta - \beta\beta$ οὐδὲν ὑπολείπει.

ὡσαύ

ὡσαύτως καὶ $(\alpha\alpha - \beta\beta) : (\alpha + \beta) = \alpha - \beta$

$$\begin{array}{l}
\alpha\alpha + \alpha\beta \\
\hline
-\alpha\beta - \beta\beta \qquad (\S. 49.) \\
-\alpha\beta - \beta\beta \\
\hline
\quad 0
\end{array}$$

ὅτι α' $+\alpha$ ἐν $+\alpha\alpha$ περιέχεται $+\alpha$: ις' καὶ γὰρ $(+\alpha + \beta) \times \alpha = \alpha\alpha + \alpha\beta$· ὅ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $\alpha\alpha - \beta\beta$ δίδωσι $-\alpha\beta - \beta\beta$ λεῖψ.

β' $+\alpha$ ἐν $-\alpha\beta$ περιέχεται $-\beta$: ις' ὅτι $(\alpha + \beta) \times -\beta = -\alpha\beta - \beta\beta$· τοῦτο ἀφερεθὲν ἀπὸ τοῦ $-\alpha\beta - \beta\beta$ οὐδὲν ὑπολείπει·

αὖθις $(\alpha\alpha - 1) : (\alpha + 1) = \alpha - 1.$

$$\begin{array}{l}
\alpha\alpha + \alpha \\
\hline
-\alpha - 1 \\
-\alpha - 1 \\
\hline
\quad 0
\end{array}$$

ὅτι $\alpha\alpha : \alpha = \alpha$· πολλαπλασιασθὲν τὸ πηλίκον α ἐφ' ὅλον τὸν διαιρέτην $(\alpha + 1)$ δώσει $\alpha\alpha + \alpha$· ὅτι $\alpha \times \alpha = \alpha\alpha$· καὶ $1 \times \alpha = \alpha$· τὸ οὖν $\alpha\alpha$ ἀναιρεῖ τὸ $\alpha\alpha$ τοῦ διαιρετέου· τὰ γὰρ σημεῖα τούτων ἐναντία (§. 37. §. 49.) τὸ $+\alpha$, τὸ παραχθὲν διὰ τοῦ $+1$ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον α, οὐκ ἔχει ἀφαιρεθῆναι ἀπό τινος· ὅθεν τίθεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῷ ἐναντίῳ σημείῳ· ὡσαύτως τίθεται καὶ τὸ -1 τοῦ διαιρετέου· ὅθεν τὸ α τοῦ διαιρέτου διελὸν τὸ $-\alpha$ τοῦ λειψάνου δώσει -1 (§. 84 σχ. §. 76.) κτ.

καὶ $(\alpha\alpha - 2\alpha\beta + \beta\beta) : (\alpha - \beta) = \alpha - \beta\cdot$

$$\begin{array}{l} \alpha\alpha - \alpha\beta \\ \hline - \alpha\beta + \beta\beta \\ - \alpha\beta + \beta\beta \\ \hline 0 \end{array}$$

ὅτι τὸ $-\alpha\beta$ τοῦ ἀφαιρετέου, ὡς τῷ ἐναντίῳ σημείῳ, ἤτοι τῷ $+$ σημειωθῆναι ὀφεῖλον, ἀναιρεῖ ἐκ τῶν $-2\alpha\beta$ τὸ $-1\alpha\beta\cdot$ ὅθεν ὑπολείπεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν $-1\alpha\beta = -\alpha\beta$ (§. 69.)

$= 3\alpha - 2\beta\cdot$

καὶ $(9\alpha\alpha - 12\alpha\beta + 4\beta\beta) : (3\alpha - 2\beta)$

$$\begin{array}{l} 9\alpha\alpha - 6\alpha\beta \\ \hline - 6\alpha\beta + 4\beta\beta \\ - 6\alpha\beta + 4\beta\beta \\ \hline 0 \end{array}$$

$= 2\alpha - 7\beta\cdot$

καὶ $(6\alpha\alpha - [illegible]\alpha\beta - 28\beta\beta) : (3\alpha + 4\beta\cdot)$

$$\begin{array}{l} 6\alpha\alpha + 8\alpha\beta \\ \hline - 21\alpha\beta - 28\beta\beta \\ - 21\alpha\beta - 28\beta\beta \\ \hline 0 \end{array}$$

$: (3\alpha + 2\beta - 4\delta) = 3\alpha - 2\beta + 4\delta$

καὶ $(9\alpha\alpha - 4\beta\beta + 16\beta\delta - 16\delta\delta)$

$$\begin{array}{l} 9\alpha\alpha + 6\alpha\beta - 12\alpha\delta \\ \hline - 6\alpha\beta + 12\alpha\delta - 4\beta\beta + 16\beta\delta - 16\delta\delta \\ - 6\alpha\beta - 4\beta\beta + 8\beta\delta \\ \hline 12\alpha\delta + 8\beta\delta - 16\delta\delta \\ 12\alpha\delta + 8\beta\delta - 16\delta\delta \\ \hline 0 \end{array}$$

Σχόλιον.

Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς, καὶ ἡ διαίρεσις ἡ διὰ γραμμάτων δὲν ἔχουν κἀμμίαν δυσχέρειαν εἰς ἐκεῖνον

ὁποῦ

ὁποῦ μὲ ἐπιςασίαν ἤθελε μελετήση τοὺς περὶ τῶν σημείων κανόνας, καὶ τοὺς περὶ ἀφαιρέσεως, καὶ τὰ λοιπὰ, ὅσα προηγουμένως ἐῤῥέθησαν· οἱ ἴδιοι κανόνες, οἱ ἀνήκοντες τοῖς γράμμασιν, ἁρμόζουν καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, ὡσὰν ὁποῦ οἱ ἀριθμοὶ διαφέρουν ἀπὸ τὰ γράμματα μόνον κατὰ τὸ εἰδικὸν, τούτων ἐν γένει, ὡς εἴρηται, πάντα ἀριθμὸν σημαινόντων.

§. 105. Τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου δύω ὁποιωνοῦν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν ὄντων, τὸ τούτων πηλίκον προκύψει, εἴτε ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, εἴτε κεκλασμένος, εἴτε ἐξ ὁλοσχεροῦς, καὶ κεκλασμένου συγκείμενος· οὕτω

$12 : 3 = 4$ ὁλοσχ. ἀρ.
$12 : 17 = \frac{12}{17}$ (§. 35. καὶ σχ.) κεκλασμ. ἀρ.
$12 : 5 = 2\frac{2}{5}$ ἐκ τοῦ ὁλοσχεροῦς 2, καὶ τοῦ κεκλ· $\frac{2}{5}$ συγκείμ:

Εἰ δὲ τὸ πηλίκον ἀεὶ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἶναι ὀφείλει, οὐδέποτε ἀριθμὸν ἐλάττονα διὰ μείζονος διαιρετέον· οὕτω γὰρ τὸ πηλίκον ἔςαι πάντως κλασματικόν· ἀλλ' ἐπεὶ πᾶς ἀριθμὸς $\alpha = 1 \times \alpha$ (§. 72.) καὶ πᾶς ἀριθμὸς διαιρεθήσεται διὰ τῆς 1, καὶ δι' ἑαυτοῦ.

Αὖθις ἐπεὶ $\alpha\gamma : \gamma = \alpha$, καὶ $\nu\alpha\gamma : \gamma = \nu\alpha$ (§. 99. καὶ σχ. β')·

Πᾶς ἀριθμὸς γ, ὁ οἱονοῦν ἀριθμὸν $\alpha\gamma$ διαιρῶν, διαιρήσει ἀεὶ καὶ πᾶν πολλαπλοῦν τοῦ $\alpha\gamma$· π. χ. ἐπεὶ ὁ 3 διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν 6, ἔςι καὶ $2 \times 6 = 12$· $3 \times 6 = 18$· $4 \times 6 = 24$· καὶ $\nu \times 6 = 6\nu$ διὰ 3 διαιρέσιμον.

Καὶ ἐπειδὴ $(\alpha\gamma + \beta\gamma) : \gamma = \alpha + \beta$· καὶ
$(\alpha\gamma - \beta\gamma) : \gamma = \alpha - \beta$·

Πᾶς ἀριθμὸς γ, δι' οὗ δύω ὁποιοιοῦν ἀριθμοὶ $\alpha\gamma$, καὶ $\beta\gamma$ διαιροῦνται, διαιρήσει ἀεὶ καὶ τὸ τούτων κεφά-

κεφάλαιον αγ + βγ, καὶ τὴν τούτων διαφορὰν αγ — βγ·

Οἷον, ἐπεὶ 4 διαιρεῖ καὶ τὸν 24, καὶ 16, διαιρεθήσονται δι' αὐτοῦ καὶ 24 + 16 = 40, καὶ 24 — 16 = 8·

Οἱ ἀριθμοὶ, οἱ μόνον διὰ τῆς μονάδος, καὶ δι' ἑαυτῶν διαιρούμενοι, καλοῦνται **ἁπλοῖ**, ἢ **πρῶτοι**· εἰσὶ δὲ οὗτοι

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. κτ·

Οἱ δὲ μὴ μόνον διὰ τῆς 1, καὶ δι' ἑαυτῶν, ἀλλὰ καὶ δι' ἑτέρων ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν, **σύνθετοι**, ἢ **παραγόμενα**· ὡς

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30· κτ·

ἐπειδὴ
$$\begin{aligned} 12 &= 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3 \\ 18 &= 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3 \\ 30 &= 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5 \\ 60 &= 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

Οὐ χαλεπὸν συνιδεῖν, ὅτι πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς τὸ παραγόμενόν ἐστιν ἐκ μόνων πρώτων ἀριθμῶν· ὥστε εἰ πρόκειται παραγόμενόν τι, ἀντὶ τούτου τεθῆναι ἔχουσιν οἱ τοῦτο παράγοντες· ζητεῖται οὖν,

Ὅπως εὑρίσκονται παντὸς ἀριθμοῦ οἱ ἁπλοῖ παράγοντες.

§. 106. Τότε μόνον ὁ πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται παράγων τὸν σύνθετον, ὅτε οὗτος δι' ἐκείνου ἀκριβῶς καταμετρεῖται, ἤτοι ἄνευ λειψάνου διαιρεῖται· ἀναγκαῖον οὖν διορίσαι, διὰ τίνων πρώτων ἀριθμῶν πᾶς σύνθετος εἴη ἂν διαιρέσιμος.

'Εὰν

Ἐπειδὴ ὁ 10 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, ἔςαι καὶ πᾶν πολλαπλοῦν τοῦ 10, (§. 56.) ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς χωρὶς τῶν κατ' αὐτὸν μονάδων θεωρούμενος ὡς ὁ 100, ὁ 1000, κτ' οἱ μὴ ἔχοντες μονάδας ἐν τῷ τόπῳ τῶν μονάδων, ἀλλὰ μόνον μηδενικὰ) διὰ τοῦ 2 διαιρέσιμος· ἔνθεντοι καὶ πάντες οἱ ἀριθμοὶ διαιρεθήσονται διὰ 2, ὧν αἱ μονάδες διὰ 2 διαιρέσιμοι, ἢ ὧν τὸν κατώτατον τόπον 0, 2, 4, 6, ἢ 8 κατειλήφασιν· οὗτοι καλοῦνται ἀριθμοὶ ἄρτιοι, οἵτινες οἵδε εἰσί· 0· 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 κτ' οἱ δὲ λοιποὶ ἀκούουσι περιττοί· ὡς 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, κτ'

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ὁ 10 διαιρεθῆναι διὰ 5 ἔχει, ἔςαι καὶ πᾶς ἀριθμὸς διὰ 5 διαιρέσιμος, οὗ αἱ μονάδες διὰ 5 διαιροῦνται, ἢ οὗ ὁ κατώτατος τόπος τῷ 0, ἢ 5 κατείληπται·

Ἑκάςη δεκὰς διὰ 3 διαιρεθεῖσα δίδωσιν 1 εἰς λείψανον· ὥςε 2 δεκάδες διδοῦσι 2. 3 δεκάδες 0. 4 δεκ' 1. 5 δεκ. 2. 6 δεκ. 0. 7 δεκ. 1. 8 δεκ. 2. 9 δεκ. 0. καὶ 10 δεκ. ἢ ἑκάςη ἑκατοντὰς δώσουσι τὴν 1 εἰς λείψ.

Ὥςε 2 ἑκατοντ. διδοῦσι 2. 3 ἑκατ' 0. 4 ἑκατ' 1' 5 ἑκατ' 2' 6 ἑκατ' 0' 7 ἑκατ. 1. 8 ἑκατ' 2. 9 ἑκατ. 0. καὶ 10 ἑκατ' ἢ ἑκάςη χιλιὰς 1 εἰς λείψ.

Ὥςε 2 χιλιάδες διδοῦσι 2. 3 χιλ' 0. 4 χιλ. 1. 5 χιλ' 2. 6 χιλ. 0. 7 χιλ. 1. 8 χιλ' 2. 9 χιλ. 0. καὶ 10 χιλ. ἢ ἑκάςη δεκὰς χιλιάδων 1 εἰς λείψ. κτ'

Αἱ δεκάδες ἄρα, ἑκατοντ. χιλιάδες, ἢ δεκάδες χιλιάδων ἀριθμοῦ τινος διὰ 3 διαιρεθεῖσαι δώσουσι τὸ λείψανον, ὅ προκύπτει, ἐὰν τοσαῦται μονάδες διὰ 3 διαιρεθῶσι.

Πᾶς ἀριθμὸς ἄρα διαιρέσιμος ἔςαι διὰ 3, οὗ τὰ λείψανα τῶν κατ' αὐτὸν χαρακτήρων προσαθροισθέντα κεφάλαιον δώσουσι διὰ 3 διαιρεθῆναι δυνάμενον.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 54672 εἴη ἂν διὰ 3 διαιρέσιμος, ὅτι τὸ λείψανον τοῦ 5 (διαιρεθέντος διὰ τοῦ 3) $= 2$. τοῦ 4 (διαιρ. διὰ 3) $= 1$. τοῦ $6 = 0$· τοῦ $7 = 1$. τοῦ $2 = 2$. τὸ κεφάλαιον τῶν λειψάνων $2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 6$· καὶ $6 : 3 = 2$ ἄνευ λειψάνου.

84557 δὲ οὐκ ἂν διαιρεθείη διὰ 3· ὅτι τὸ λείψανον τοῦ $8 = 2$. τοῦ $4 = 1$. τοῦ $5 = 2$. τοῦ $5 = 2$. τοῦ $7 = 1$. τὸ κεφάλαιον τῶν λειψάνων $2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 8$· καὶ $8 : 3 = 2\frac{2}{3}$.

§. 107. Ῥᾴδιον οὖν ἐκ τούτων ἐπιγνωσόμεθα, εἰ ὁ προκείμενος ἀριθμὸς, διὰ 2, 3, ἢ 5 διαιρέσιμος· πότερον δὲ, ὁ αὐτὸς καὶ διὰ 7, 11, 13, 17, 19, ἢ διάτινος ἀνωτέρου πρώτου ἀριθμοῦ διαιρεῖται, ἢ οὐχὶ, τοῦτο ἡ πεῖρα διδάξει.

• Ἔνθευτοι οὐδεμία μέθοδος ἡμῖν πάρεςι τοῦ πάντας τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρίσκειν, ἢ τὸ διαιρεῖν αὐτὸν διὰ τῶν κατωτάτων πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 κτ. ἕως ἂν τὸ πηλίκον πρῶτος ἀριθμὸς ᾖ, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου μετὰ τῶν προηγηθέντων διαιρετῶν πάντας τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀποτελῇ.

Ἔςω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 2310. ἔςιν οὖν (διὰ τὰ ἀνωτ.!)

$$2310 : 2 = 1155 \qquad 385 : 5 = 77$$
$$1155 : 3 = 385 \qquad 77 : 7 = 11$$

ἄρα $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$.

ἔςω

ἔςω ὁ δοθεὶς ἀριθ. 360. καὶ ἔςαι

$360 : 2 = 180$	$45 : 3 = 15$
$180 : 2 = 90$	$15 : 3 = 5$
$90 : 2 = 45$	

ἄρα $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

ἔςω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 37800· καὶ ἔςαι

$37800 : 2 = 18900$	$1575 : 3 = 525$
$18900 : 2 = 9450$	$525 : 3 = 175$
$9450 : 2 = 4725$	$175 : 5 = 35$
$4725 : 3 = 1575$	$35 : 5 = 7$

ἄρα $37800 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$.

ἔςω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 2717· καὶ ἔςαι

$2717 : 11 = 247$· καὶ $247 : 13 = 19$.

ἄρα $2717 = 11 \times 13 \times 19$.

Ἔςω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 311· ἐπειδὴ 311 διὰ 2, 3, ἢ 5 οὐκ ἂν διαιρεθείη, πειρασώμεθα τῆς διαιρέσεως τούτου διὰ τῶν ἐγγὺς ἀνωτέρων πρώτων ἀριθμῶν.

ἔςι δὲ α′· $311 : 7 = 44\frac{3}{7}$

β′· $311 : 11 = 28\frac{3}{11}$

```
 311
 22
 ---
  91
  88
 ----
   3
```

γ′· $311 : 13 = 23\frac{12}{13}$

```
 311
 26
 ---
  51
  39
 ----
  12
```

$$\delta\cdot\quad 311 : 17 = 18\tfrac{5}{17}\cdot$$

$$\begin{array}{r} 311 \\ \underline{17} \\ 141 \\ \underline{136} \\ 5 \end{array}$$

Ἐπειδὴ οὖν 19 μείζων τοῦ πηλίκου $18\frac{5}{17}$, ὁ 19 ἄρα οὐκ ἂν περιέχοιτο 17:κις ἐν 311. ἔνθεντοι τὸ πηλίκον τοῦ (311 : 19) ἐςιν ἔλαττον τοῦ 17. ἄρα οὐχ ὁλοσχερὴς ἀριθμός· οὐδεὶς γὰρ τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τῶν ἐλαττόνων τοῦ 17, παράγων τοῦ 311 εὕρηται· ὅπερ ἐγένετο, εἰ ὁ (311 : 19) ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν ἐν τῷ πηλίκῳ ἐδίδου, ἐλάττονα τοῦ 17· ὥςε ὁ 311 δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ διαιρεθήσεται, εἰ μὴ διὰ τῆς 1, καὶ δι' ἑαυτοῦ, ἢ ὁ 311 ἐςι πρῶτος ἀριθμός.

Ὡσαύτως ῥητέον, ὡς περὶ τοῦ 311, καὶ περὶ παντὸς ἀριθμοῦ, ὅτι πρῶτος ἀριθμός ἐςιν, εἰ προάγοντες τὴν διαίρεσιν, ἄνευ τοῦ διαιρέτην τινὰ εὑρεῖν, ἀριθμῷ τινι ἀπαντήσομεν, ὡς τῷ 19, μείζονι ὄντι τοῦ προηγηθέντος πηλίκου, ὡς ὁ 19 τοῦ $18\frac{5}{17}$.

§. 108. Ἐν τοῖς τῶν παραγόντων πίναξι, τοῖς τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς μὴ διὰ 2, 3, ἢ 5 διαιρεσίμους, περιέχουσιν, ἐκτέθεινται οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ, ἔνθα δείκνυνται καὶ οἱ ἁπλοῖ παράγοντες ἑκάςου παραγομένου·

Σχόλιον.

Πίνακες τῶν παραγόντων εὑρίσκονται διάφοροι· ἀξιολογώτεροι ὅμως εἶναι Φέλκελ τινὸς, οὕτως ἐπιγραφόμενοι· *Πίνακες πάντων τῶν ἁπλῶν παραγόντων τῶν ἀριθμῶν, τῶν διὰ 2, 3, καὶ 5 μὴ διαιρουμένων ἀπὸ 1 μέχρι 408000.*

§. 109. Προκειμένου οὖν ἀριθμοῦ τινος, διαιρέσομεν τοῦτον, ὁσάκις ἂν ἐγχωρῇ, διὰ 2, 3, καὶ 5· τὸ

5· τὸ δ' ἔσχατον πηλίκον, ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 408000 μὴ ὑπερβαίνῃ, εὑρήσομεν ἐν τοῖς πίναξιν, εἰ πρῶτος ἀριθμὸς, ἢ τὸ πολλαπλοῦν, ἤτοι τὸ παραγόμενόν ἐστιν ἐκ διαφόρων παραγόντων.

ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 120765· ἔσται οὖν

$$120765 : 3 = 40255$$

$$40255 : 5 = 8051.$$ καὶ διὰ τῶν πινάκων

$$8051 = 83 \times 97$$

ὥστε $120765 = 3 \times 5 \times 83 \times 97$.

ἕτερον παράδειγμα·

$$693132 : 2 = 346566$$

$$346566 : 2 = 173283$$

$$173283 : 3 = 57761$$ καὶ διὰ τῶν πινάκων

$$57761 = 11 \times 59 \times 89.$$

ὥστε $693132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11 \times 59 \times 89$.

Σχόλιον.

Ταύτην τὴν μέθοδον τοῦ εὑρίσκειν τοὺς παράγοντας ἠμπορεῖ νὰ τὴν μεταχειρισθῇ κάθε ἕνας, ὁποῦ ἔχει τοιούτους πίνακας· ἡ κτῆσις τούτων εἶναι εὔκολος, καὶ οἱ πίνακες εὐκολοκατάληπτοι καὶ εἰς ἕνα, ὁποῦ δὲν ἰξεύρει κάμμιαν Εὐρωπαϊκὴν διάλεκτον, ὡσὰν ὁποῦ δὲν χρειάζονται κάμμίαν ἀνάπτυξιν περαιτέρω.

§. 110. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἢ ἀλγεβραϊκὸν ἁπλοῦν σχῆμα (§. 44.). ἕκαστον γράμμα ἔσται εἷς παράγων τοῦ σχήματος· ὡς $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \varepsilon$.

Εἰ δὲ σύνθετον, (§. αὐτ.) καὶ πολλαπλοῦν, ἢ παραγόμενον ἐξ ἁπλοῦ, καὶ συνθέτου παράγοντος, ὡς $\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta$, ὁ μὲν ἁπλοῦς παράγων α ἐπιγνωσθήσεται ἐκ τοῦ πᾶσι τοῖς μέλεσιν, ἢ ὅροις τοῦ σχήματος ἐμφιλοχωρεῖν, ὁ δὲ σύνθετος προκύψει.

κύψει, ἐὰν τὸ παραγόμενον διὰ τοῦ ἁπλοῦ διαιρῆται· ὅθεν συνορᾶν πάρεσιν, ὅτι π. χ.

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta = \alpha(\beta + \gamma - \delta)$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta - \alpha\beta\varepsilon = \alpha\beta(\gamma + \delta - \varepsilon)$$
$$\alpha\beta\gamma - \alpha\gamma\delta - \beta\gamma\delta = \gamma(\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\delta)$$
$$\alpha\alpha - \alpha\beta + \alpha = (\alpha - \beta + 1)$$
$$\alpha\alpha - 7\alpha + \alpha\beta = \alpha(\alpha - 7 + \beta)$$
$$\alpha\beta\delta - \alpha\gamma\delta + \alpha\delta = \alpha\delta(\beta - \gamma + 1)$$
$$6\alpha\beta - 12\beta\gamma - 3\beta = 3\beta(2\alpha - 4\gamma - 1)$$
$$\alpha\beta - \beta\beta = \beta(\alpha - \beta)$$
$$\gamma\gamma - \gamma = \gamma(\gamma - 1)$$

Ἐὰν δὲ τὸ σύνθετον σχῆμα τὸ παραγόμενον ᾖ ἐκ πλειόνων συνθέτων παραγόντων, μαθησόμεθα τὴν εἰς τοὺς παράγοντας τούτου ἀνάλυσιν δι' ἐπιμελοῦς μόνης ἀσκήσεως·

ὡς $\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$

$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta + \beta\beta = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$$
$$\alpha\alpha - \beta\beta = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$
$$\alpha\alpha + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)(\alpha + 1)$$
$$\alpha\alpha - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)(\alpha - 1)$$
$$\alpha\alpha - 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 1)$$
$$\alpha\alpha - \beta\beta + 2\beta\gamma - \gamma\gamma = (\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)$$

Σχόλιον.

Ὁ φιλόπονος ἀναγνώστης παρατηρῶν τοὺς κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τῆς προσθέσεως, καὶ τῶν σημείων, ἂν πολλαπλασιάσῃ τὰ ἐν παρενθέσει σχήματα, ἤτοι τοὺς παράγοντας μετ' ἀλλήλων, θέλει εὕρει ἀλη-

ἀληθῶς παραγόμενα τὰ πρὸς ἀριςερὰν κείμενα σχήματα.

§. 111. Ἐπειδὴ πᾶν παραγόμενον αβγδε οὐ μόνον δι' ἑκάςου ἁπλοῦ παράγοντος, ἀλλὰ καὶ δι' ἑκάςου παραγομένου, προκύπτοντος ἐκ τῶν παραγόντων, ἀνὰ 2, ἀνὰ 3, ἀνὰ 4, κτ' λαμβανομένων, ἄνευ λειψάνου διαιρεθῆναι ἔχει, εὑρήσομεν ἑκάςου ἀριθμοῦ πάντας τοὺς διαιρέτας, εἰ πρῶτον πάντας τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας, εἶτα δὲ πάντα τὰ παραγόμενα, τὰ προκύπτοντα, ἀνὰ 2, ἀνὰ 3, κτ' ἐκείνων λαμβανομένων, ζητοῦμεν· ἔνθεν τοι·

Ἐπεὶ αβγδε $=$ α $\times$ β $\times$ γ $\times$ δ $\times$ ε· οἱ διαιρέται ἔσονται.

α'· α, β, γ, δ, ε.

α'· αβ, αγ, αδ, αε, βγ, βδ, βε, γδ, γε, δε·

γ'· αβγ, αβδ, αβε, αγδ, αγε, αδε, βγδ, βγε, βδε, γδε.

δ'· αβγδ, αβγε, αβδε, αγδε, βγδε.

ε'· αβγδε, καὶ ι (§. 105.)

Ἐπειδὴ ααβγδ $=$ α $\times$ α $\times$ β $\times$ γ $\times$ δ· ἔσονται οἱ διαιρέται.

α'· α, β, γ, δ.

β'· αα, αβ, αγ, αδ, βγ, βδ, γδ.

γ'· ααβ, ααγ, ααδ, αβγ, αβδ, αγδ, βγδ.

δ'· ααβγ, ααβδ, ααγδ, αβγδ.

ε'· ααβγδ, καὶ ι·

Ἐπεὶ $\alpha\alpha\alpha\beta\gamma = \alpha \times \alpha \times \alpha \times \beta \times \gamma$· ἔσονται οἱ διαιρέται.

α'· α, β, γ.

β'· αα, αβ, αγ, βγ.

γ'· ααα, ααβ, ααγ, αβγ·

δ'· αααβ, αααγ, ααβγ.

ε'· αααβγ καὶ ι.

Ὡσαύτως ἐπειδὴ $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$. ἔσονται οἱ διαιρέται·

α. 2, 3, 5, 7, 11

$$\beta'. \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 3 = 6 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 2 \times 7 = 14 \\ 2 \times 11 = 22 \\ 3 \times 5 = 15 \end{array} \right. \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{l} 3 \times 7 = 21 \\ 3 \times 11 = 33 \\ 5 \times 7 = 35 \\ 5 \times 11 = 55 \\ 7 \times 11 = 77 \end{array}$$

$$\gamma'. \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 3 \times 5 = 30 \\ 2 \times 3 \times 7 = 42 \\ 2 \times 3 \times 11 = 66 \\ 2 \times 5 \times 7 = 70 \\ 2 \times 5 \times 11 = 110 \end{array} \right. \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{l} 2 \times 7 \times 11 = 154 \\ 3 \times 5 \times 7 = 105 \\ 3 \times 5 \times 11 = 165 \\ 3 \times 7 \times 11 = 231 \\ 5 \times 7 \times 11 = 385 \end{array}$$

$$\delta'. \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210 \\ 2 \times 3 \times 5 \times 11 = 230 \\ 2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462 \\ 2 \times 5 \times 7 \times 11 = 770 \\ 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155 \end{array} \right.$$

ε'· 1, καὶ 2310.

Ἐπειδὴ

Ἐπειδὴ $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$· ἔσονται οἱ διαιρέται·

$$\alpha' \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \qquad \beta' \begin{cases} 2 \times 2 = 4 \\ 2 \times 3 = 6 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 3 \times 5 = 15 \end{cases}$$

$$\gamma' \begin{cases} 2 \times 2 \times 2 = 8 \\ 2 \times 2 \times 3 = 12 \\ 2 \times 2 \times 5 = 20 \\ 2 \times 3 \times 3 = 18 \\ 2 \times 3 \times 5 = 30 \\ 3 \times 3 \times 5 = 45 \end{cases} \qquad \delta' \begin{cases} 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 60 \\ 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90 \end{cases}$$

$$\varepsilon' \begin{cases} 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180 \end{cases} \qquad \text{ϛ}' \begin{cases} 1 \text{ καὶ } 360 \end{cases}$$

Τελευταῖον, ἐπειδὴ $2717 = 11 \times 13 \times 19$· ἔσονται οἱ διαιρέται·

$$\alpha' \begin{cases} 11 \\ 13 \\ 19 \end{cases} \qquad \beta' \begin{cases} 11 \times 13 = 143 \\ 11 \times 19 = 209 \\ 13 \times 19 = 247 \end{cases}$$

$$\gamma' \begin{cases} 1 \text{ καὶ } 2717 \end{cases}$$

§. 112. Ἐὰν οὖν δύω ἀριθμῶν προκειμένων ἑκάτερον εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν ἁπλοῦς παράγοντας διατέμωμεν, ἔσονται γνωστοὶ καὶ οἱ ἀριθμοὶ, οἱ ἀμφοῖν κοινοί· ζητοῦντες δὲ καὶ τὰ παραγόμενα ἐκ τούτων τῶν παραγόντων ἀνὰ 2, ἀνὰ 3, ἀνὰ 4, κτ. εἰλημμένων, εὑρήσο.

ρήσομεν καὶ πάντας τοὺς κοινοὺς αὐτῶν διαιρέτας, ἐν οἷς τὸ παραγόμενον ἐκ πάντων τῶν κοινῶν ἁπλῶν παραγόντων ἀείποτε τὸ μέγιςον ἔςαι.

ἐπειδὴ τοίνυν τοῦ $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$· καὶ

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$·

οἱ κοινοὶ ἁπλοῖ παράγοντες εἰσὶ 2, 3, 5. ἄρα καὶ οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται.

$$\alpha' \cdot \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \qquad \beta' \cdot \begin{cases} 2 \times 3 = 6 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 3 \times 5 = 15 \end{cases}$$

$$\gamma' \cdot \begin{cases} 1 \ \text{καὶ} \\ 30 \end{cases}$$

καὶ ὁ μέγιςος τούτων κοινὸς διαιρέτης $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Ἐπειδὴ πολλάκις ἀναγκαία ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίςου κοινοῦ διαιρέτου δύω ἀριθμῶν, καὶ ἡ μέθοδος τοῦ πάντα ἀριθμὸν εἰς τοὺς κατ᾽ αὐτὸν ἁπλοῦς παράγοντας λύειν, μάλιςα τῷ μὴ τοὺς τῶν παραγόντων πίνακας ἀνὰ χεῖρας ἔχοντι, ζητητέον ἑτέραν τινὰ ἰδιαιτέραν μέθοδον ἐκκαλύψαι τοῦ

Ὁποιωνοῦν δύω ἀριθμῶν τὸν μέγιςον κοινὸν διαιρέτην εὑρίσκειν·

§. 113. Ἔςω ὁ μείζων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν α, ὁ ἐλάττων β, καὶ ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης χ· ἐπειδὴ τὸ χ διαιρεῖ τὸ β, οὐκ ἔχει μεῖζον εἶναι τοῦ β, ἴσον δὲ καὶ μάλα, εἰ τὸ α διὰ τοῦ β διαιρέσιμον· διαιροῦσιν οὖν τὸ α διὰ τοῦ β τεθήτω τὸ πηλίκον εἶναι μ· καὶ τὸ λείψανον ἔςαι $\alpha - \mu\beta = 0$· καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου $\chi = \beta$· ἢ τὸ λείψανον $\alpha - \mu\beta = \gamma$ ἔςαι ἔλαττον τοῦ διαιρέτου β. καὶ τηνικαῦτα ἀνάγκη πᾶσα τὸ χ διελεῖν καὶ γ· τὸ γὰρ χ διαιρεῖ τὸ