καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπανειλημμένη πρόσθεσις. (§. 54.)

§. 81. Τῆς (§. ἀνωτ.) μεθόδου διεξοδικωτάτης οὔσης, ὅτε ὁ δοθεὶς παράγων πολλάκις τῷ παραγομένῳ ἐμπεριέχεται, ὅπως αὕτη ἐπιτέμνεται, ὀψόμεθα ἤδη.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

§. 82. Διαίρεσις ἐςὶν ἐκ τοῦ δοθέντος παραγομένου δύω παραγόντων, καὶ τοῦ ἑτέρου τούτων τῶν παραγόντων, τὸν ἕτερον εὑρεῖν·

Ἔςω διαιρετέος ὁ 12 διὰ τοῦ 4· τοῦτο δ' ἐςιν, ἔςω ὁ 12 τὸ παραγόμενον δύω παραγόντων, καὶ ὁ 4 ὁ ἕτερος τούτων· ὁδ' ἕτερος πρόκειται εἰς εὕρεσιν· ζητεῖται οὖν, ποσάκις ὁ 12 περιέχει τὸν 4· ἢ, ὅ ταὐτὸν ἐςι, τίς τῶν ἀριθμῶν περιέχεται ἐν τῷ 12 τετράκις· δῆλον, ὅτι ὁ ἀριθμὸς, 3· ὅτι $4 \times 3 = 12$.

Τὸ δοθὲν παραγόμενον 12 καλεῖται διαιρετέος· ὁ δοθεὶς παράγων 4. διαιρέτης· ὁ δὲ ζητούμενος παράγων 3, πηλίκον·

§. 83. Ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος δι' ἑτέρου δείκνυται τῷ σημείῳ (:), τῷ μεταξὺ τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου παρεντιθεμένῳ· ὡς $12 : 4 = 3$. ἀπαγγέλλεται δὲ οὕτω· 12 διαιρεθὲν διὰ 4 ἐςιν ἴσον 3· ἢ 4 περιέχεται ἐν τῷ 12, τρίς·

§. 84. Ἐὰν ὁ διαιρετέος τὸ παραγόμενον ᾖ ἐκ δύω ἁπλῶν παραγόντων, ῥαδίως ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων εὑρεθήσεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρου πίνακος, (§. 59.), τοῦ ἑτέρου δοθέντος·

Οὕτω ῥάδιον συνιδεῖν, ὅτι

12 : 4

$12 : 4 = 3$	$63 : 9 = 7$
$27 : 9 = 3$	$49 : 7 = 7$
$45 : 9 = 5$	$56 : 8 = 7$

Σχόλιον.

Ἐὰν διαιρετέος, καὶ διαιρέτης ᾖ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἢ ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται δι' ἑαυτοῦ, τὸ πηλίκον ἔςαι 1. εὔληπτον γὰρ, ὅτι κάθε ἀριθμὸς περιέχεται εἰς τὸν ἑαυτόντου ἅπαξ· οὕτω π. χ. ἔςαι $\frac{5}{5} = 1$· $\frac{404}{404} = 1$, κτ· ἀλλὰ καὶ τὸ μηδὲν διαιρεθὲν διὰ τοῦ μηδενὸς, ἢ $\frac{0}{0}$ εἶναι $= 1$· τὸ γὰρ μηδὲν περιέχει τὸ μηδὲν ἅπαξ· καὶ ἐὰν ὁ ἕτερος παράγων ἦναι $= 0$. ἔςαι καὶ τὸ παραγόμενον $= 0$· ὅθεν τὸ 0 ἂν διαιρεθῇ δι' ὁποιουοῦν ἀριθμοῦ δίδωσι πάλιν πηλίκον 0· ὡς

$0 : 4 = 0$	$0 : 100 = 0$
$0 : 8 = 0$	$0 : 1000 = 0$ κτ·

§. 85. Εἰ δέοι 3 διὰ 4 διελεῖν, ἡ 1 ἐν τῷ πηλίκῳ ἐςὶν ὡς μεγίςη. (ἤτοι τὸ πηλίκον οὐκ ἂν εἴη μονάς)· ὅτι $4 \times 1 = 4$· καὶ 0 ἐςι πάνυ βραχύ· ὅτι $4 \times 0 = 0$· (§. 69.) τὸ οὖν πηλίκον, ὃ 4: κις ληφθὲν 3 δώσει, ἐςι μεῖζον τοῦ 0, καὶ ἔλαττον τῆς 1.

Ἀλλὰ χαρακτῆρες, δι' ὧν τοὺς μεταξὺ 0 καὶ 1 κειμένους ἀριθμοὺς ἐκδηλώσομεν, ἡμῖν οὐχ ὑπάρχουσιν· ἀναγκαῖον ἄρα πάντῃ ἑτέρους χαρακτῆρας ἐπινοῆσαι εἰς παράςασιν τῶν τοιούτων πηλίκων, ἢ διορίσαι, ὅπως ταῦτα τοῖς παραληφθεῖσι, καὶ ἐν χρήσει οὖσι χαρακτῆρσιν ἐξενεχθήσονται· ἔδοξεν οὖν τοῖς Μαθηματικοῖς, ὥςε τὰ τοιαῦτα τῶν πηλίκων ἐμφαίνειν, τὸν διαιρέτην ὑπὸ τὸν διαιρετέον γράφοντας διὰ γραμμῆς ἀλλήλων διαςέλλειν· ὡς ($\frac{3}{4}$). τὸ οὖν $\frac{3}{4}$ σημαίνει τὸ προκύπτον πηλίκον, ἐὰν ὁ 3 διαιρεθῇ διὰ τοῦ 4, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν, ὃς 4: κις ληφθεὶς τὸν 3 παράξει·

ὡσαύτως καὶ $5:6=\frac{5}{6}$ ‖ $9:11=\frac{9}{11}$

$7:10=\frac{7}{10}$ ‖ $9:13=\frac{9}{13}$

ὅθεν αὖθις καὶ $\frac{5}{6}\times 6=5$

$\frac{7}{10}\times 10=7$

$\frac{9}{11}\times 11=9$

$\frac{9}{13}\times 13=9$, κτ·

Σχόλιον.

Τὰ τέτοια πηλίκα ὀνομάζονται κλάσματα, ἢ ἀριθμοὶ κεκλασμένοι, (περὶ ὧν κατωτέρω) καὶ ἀπαγγέλλονται οὕτω

$\frac{3}{4}$ τρία τεταρτημόρια, ἢ τρία τέταρτα· ἢ 3 διαιρεθ. διὰ 4·

$\frac{5}{6}$ πέντε ἑκτημόρια, ἢ πέντε ἕκτα, ἢ 5 διαιρεθ. διὰ 6. κτ.

§. 86. Προκειμένου τοῦ 8 διὰ τοῦ 3 διαιρεθῆναι, ἔςαι αὖθις τὸ πηλίκον μεῖζον τοῦ 2, καὶ ἔλαττον τοῦ 3· ὅτι $3\times 2=6$· καὶ $3\times 3=9$· ὅθεν λέγεται· 3 περιέχεται ἐν τῷ 8 δίς, ὑπολειπομένου καὶ 2· ἢ 3 ἐςὶν ἐν τῷ 8 (2 καὶ $\frac{2}{3}$): ις περιεχόμενον· ἢ

$8:3=2\frac{2}{3}$ ‖ $3:2=1\frac{1}{2}$

$9:4=2\frac{1}{4}$ ‖ $29:6=4\frac{5}{6}$

$11:4=2\frac{3}{4}$ ‖ $38:7=5\frac{3}{7}$

ὅτι $\frac{2}{3}\times 3=\frac{6}{3}=2$· καὶ $2\times 3=6$·

ὥςε $2\frac{2}{3}\times 3=8$·

ὡσαύτως καὶ $2\frac{1}{4}\times 4=9$

$2\frac{3}{4}\times 4=11$

$1\frac{1}{2}\times 2=3$

$4\frac{5}{6}\times 6=29$

$5\frac{3}{7}\times 7=38$

Σχόλιον.

Ἐὰν συμβῇ εἰς τὸ πηλίκον ὑπολείπηται καὶ λείψανον, ψκνον, γίνεται τοῦτο διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ὑπογράφεται εἰς τὴν γραμμὴν, καὶ προσαρτᾶται τῷ πηλίκῳ· ἐν τῷ περὶ κλασμάτων θέλουν ἀναπτυχθῆ ταῦτα σαφέςερον·

§. 87.

αὖθις	8000 : 2 = 4000.	ἔςι γὰρ	4000 X 2 = 8000
	600 : 2 = 300	- -	300 X 2 = 600
	40 : 2 = 20	- -	20 X 2 = 40
	8 : 2 = 4	- -	4 X 2 = 8

Ἐὰν ἄρα χιλιάδες, ἑκατοντάδες, δεκάδες, ἢ μονάδες δι' ἁπλῶν ἀριθμῶν διαιρῶνται, προκύψουσι καὶ ἐν τῷ πηλίκῳ χιλιάδες, ἑκατοντάδες, δεκάδες, ἢ μονάδες·

Ἔνθεντοι ἔςαι 8648 : 2 = 4324.

Ἐπειδὴ γὰρ 2 ἐν 8000, 4000: κις, ἐν 600, 300: κις· ἐν 40, 20: κις· καὶ ἐν 8, 4: κις περιέχεται, ἔςαι καὶ 2 ἐν 8648, 4324: κις περιεχόμενον· ἄρα 4324 ἐςι τὸ ζητούμενον πηλίκον· ἐὰν οὖν ὁ διαιρετέος ἐκ μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτ· συγκροτῆται, ὁ δὲ διαιρέτης ἁπλοῦς ἀριθμὸς ᾖ, εὑρήσομεν τὸ πηλίκον, ζητοῦντες α· τὸ ἐν μέρει πηλίκον τοῦ ἀνωτάτου χαρακτῆρος, εἶτα τοῦ ἐγγὺς κατωτέρου, καὶ μετ' αὐτὸ τοῦ ἑπομένου, κτ· τοῦτο δὲ οὕτως ἐκδηλώσομεν συντόμως·

8 : 2	δίδωσι	4	‖	4 : 2	δίδωσι	2
6 : 2	—	3	‖	8 : 2	—	4

ὡσαύτως καὶ 864 : 2 = 432

2644 : 2 = 1322 κτ·

§. 88. Ἐὰν τόποις τισὶ τοῦ διαιρετέου μηδενικὰ προσῇ, ἐπεὶ οὐδὲν διαιρετέον ἐν τούτοις πάρεςι, τοὺς ὁμοειδεῖς τόπους τοῦ πηλίκου αὖθις τῷ 0 ἐπισημειώσομεν·

ὡς	80004:	4 = 20001		
ὅτι		8: 4	δίδωσι 2	
		0: 4	- 0	(§. 84. σχ.)
		0: 4	- 0	
		0: 4	- 0	
		4: 4	- 1	(§. αὐτ.)

§. 89. Εἰ δέοι 9856 διὰ 2 διαιρεθῆναι, ἔςαι 9856: 2. = 4928.

Ἐπειδὴ γὰρ τὸ πηλίκον (9: 2) δι' οὐδενὸς ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ ἐκδηλῶσαι ἔχομεν, διαιροῦμεν μόνον 8, τιθέντες, ἀντὶ τῆς ὑπολειφθείσης 1, καὶ μὴ διαιρεθείσης, εἰς τὸν ἐγγὺς ὑποδεέςερον τόπον 10 μονάδας, ὥςε ἐν τῷ ἑπομένῳ τόπῳ ἀντὶ 8, 18 ἤδη μονάδας εἰς διαίρεσιν προκεῖσθαι· καὶ ἐπειδὴ ὁ 5 διὰ 2 οὐ διαιρέσιμος, διαιρεθέντος μόνον τοῦ 4, γράφονται ἀντὶ 6, τοῦ ἐν τῷ ἑπομένῳ τόπῳ, 16·

ὅτι	9: 2	δίδωσι	4,	καὶ 1 εἰς λείψανον·
	18: 2	-	9.	
	5: 2	-	2,	καὶ 1 εἰς λ.
καὶ	16: 2	-	8.	

Ὁσάκις ἄρα ἔντινι τόπῳ τοῦ διαιρετέου λείψανον ὑπολείπηται, τὸ 10:πλοῦν τούτου προσαριθμητέον τῷ ἐγγὺς κατωτέρῳ τόπῳ· καὶ ἐὰν ἔντινι τόπῳ ὁ διαιρετέος ἀριθμὸς ἐλάττων ᾖ τοῦ διαιρέτου, ὁ ὁμοειδὴς τόπος τοῦ πηλίκου σημειωθήσεται μετὰ τοῦ 0, καὶ τὸ 10:πλοῦν τούτου τοῦ ἀριθμοῦ αὖθις τῷ ἐγγὺς ὑποδεεςέρῳ τόπῳ προσαριθμηθήσεται· οὕτως 8401218: 6 = 1400203·

ὅτι	8: 6	δίδωσιν	1,	καὶ 2 εἰς λείψανον·
	24: 6	-	4	
	0: 6	-	0	
	1: 6	-	0,	καὶ 1 εἰς λείψ.

	12 : 6	-	2
	1 : 6	-	0, καὶ 1 εἰς λείψ.
καὶ	18 : 6	-	3, ἄνευ λειψάνου.

§. 90. Ἐὰν ὁ ἀνώτατος χαρακτὴρ τοῦ διαιρετέου ἐλάττων ᾖ τοῦ διαιρέτου, οὐκ ἀναγκαῖον τὸ τιθέναι εἰς τὸ πηλίκον τὸ 0· τοῦτο γὰρ πρὸ τῶν χαρακτήρων τεθὲν οὔτε τὸν τύπον, οὔτε τὴν δύναμιν αὐτῶν μεταβάλλει· ὅθεν συνάπτοντες αὐτὸν τῷ ἐγγὺς κατωτέρῳ ἀριθμῷ διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου·

3489561 : 9 = 387729
ὅτι 34 : 9 δίδωσι 3, καὶ 7 εἰς λείψ. κτ·

§. 91. Ἔςω 149 διὰ 42 διαιρετέον· καὶ ἐπειδὴ 42 μήτε ἐν τῇ 1, μήτε ἐν τῷ 14, ἀλλ' ἐν τῷ 149 περιέχεται, τὸ πηλίκον οὔτ' ἐξ ἑκατοντάδων, οὔτ' ἐκ δεκάδων, ἀλλ' ἐκ μονάδων συςήσεται· Ζητεῖται οὖν, ποσάκις ὁ 42 περιέχεται ἐν 149· ὅπερ δῆλον ἡμῖν γενήσεται, εἰ τῶν κατωτάτων χαρακτήρων τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιρετέου μηδένα λόγον ποιούμενοι ἐρευνῶμεν, ποσάκις 40 περιέχεται ἐν 140, ἢ αἱ 4 δεκάδες ἐν 14 δεκάσιν, ἢ 4 ἐν 14 ἁπλῶς· προφανὲς οὖν, ὅτι ὁ 4 ἐν 14· ἀλλὰ καὶ αἱ 4 δεκάδες ἐν 14 δ· ἢ 40 ἐν 140 περιέχεται τρίς. τοῦ 3 τοίνυν εἰς τὸ πηλίκον τεθέντος, καὶ τοῦ διαιρέτου 42, τρὶς ληφθέντος = 126 ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 149 ἀφαιρεθέντος, εὑρήσομεν 23 εἰς λείψανον, ὃ ἔτι διὰ 42 διαιρεθὲν δώσει πηλίκον $\frac{23}{42}$ ὡς

$$\begin{array}{l} 149 : 42 = 3\frac{23}{42} \\ \underline{126} \\ 23 \end{array}$$

Λέγουσι 4 ἐν 14 περιέχεται τρίς· 3 X 2 = 6· 3 X 4 = 12· 6 ἀφαιρεθὲν ἀπὸ 9 ὑπολείπει 3· 2 ἀπὸ 4 ὑπολ. 2· καὶ 1 ἀπὸ 1 οὐδὲν ὑπολείπει· ὅθεν τὸ ζητούμενον πηλίκον 3 $\frac{23}{42}$.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ οὖν 149 μονάδες, διὰ 42 διαιρεθεῖσαι, παρέσχον 3 μονάδας ἐν τῷ πηλίκῳ, καὶ 23 μονάδας εἰς λείψανον, καὶ 149 δεκάδες, διὰ 42 διαιρεθεῖσαι, δώσουσιν ἐν τῷ πηλίκω 3 δεκάδας, καὶ 23 δεκάδας εἰς λείψ. καὶ 149 ἑκατοντάδες, διὰ 42 διαιρ: 3 ἑκατ' ἐν τῷ π. καὶ 23 ἑκ. εἰς λ. καὶ 149 χιλ' διὰ 42 διαιρ. 3 χιλ' ἐν τῷ π. καὶ 23 χ. εἰς λείψ. κτ' εἴτε γὰρ μονάδας, εἴτε δεκάδας, εἴτε ἑκατοντ' εἴτε χιλ' σημαίνει ὁ 149, ἀεὶ τὸ πηλίκον $3\frac{23}{42}$ ἔςαι τὸ 42: ον μέρος τούτου, καὶ σημανεῖ ἄρα ἤτοι μονάδας, ἢ δ. ἢ ἑκ. ἢ χ.

Ἔςω αὖθις	7108608 : 832 = 8544.
	6656
ἑκατοντ.	4526
	4160
δεκάδες	3660
	3328
μονάδες	3328
	3328
	0

α'· γὰρ 7108 χιλιάδες διὰ 832 διαιρεθεῖσαι διδοῦσιν 8 χιλιάδας ἐν τῷ πηλίκῳ, καὶ 452 χιλιάδας, ἢ 4520 ἑκατοντάδας εἰς λείψ.

β'· 4526 ἑκατοντ. διὰ 832 διαιρ. διδοῦσι 5 ἑκατ. ἐν τῷ πηλ. καὶ 366 ἑκατ. ἢ 3660 δεκάδας εἰς λείψ.

γ'· 3660 δεκ. διὰ 832 διαιρ. διδ. 4 δεκ. ἐν τῷ π. καὶ 332 δεκ. ἢ 3320 μονάδας εἰς λείψ. καὶ

δ'· 3328 μον. διὰ 832 διαιρ. δ. 4 μον. ἐν τῷ π. ἄνευ λειψάνου.

Τούτῳ

Τούτῳ τῷ τρόπῳ ἀφῃρέθησαν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 7108608.

α'.	832	X	8000	=	6656000	
β'.	832	X	500	=	416000	
γ'.	832	X	40	=	33280	
δ'.	832	X	4	=	3328.	ὥςε

ἐν γένει 832 X 8544 = 7108608. ὅπερ τὸν διαιρετέον ἐκκενοῖ· καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου 8544 ἐςὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

§. 92. Ἐὰν ἄρα ἐξ ὁποιουοῦν δοθέντος διαιρετέου τοσοῦτοι τῶν ἀνωτάτων χαρακτήρων αὐτοῦ λαμβάνωνται, ὅσοι ἀναγκαῖοι εἰς τὸ τὸν διαιρέτην περιέχειν, ἕξομεν τὸν α'. ἐν μέρει διαιρετέον, ὅς διὰ τοῦ διαιρέτου διαιρεθεὶς παρέξει ἐν τῷ πηλίκῳ τὸν ἀνώτατον χαρακτῆρα, ὁμοειδῆ ἀεὶ ὄντα τῷ κατωτάτῳ χαρακτῆρι τοῦ ἐν μέρει διαιρετέου.

Καταχθέντος δ' εἶτα μετὰ τὸ λείψανον καὶ τοῦ ἐγγὺς κατωτέρου χαρακτῆρος τοῦ ὁλικοῦ διαιρετέου, ἀναφανήσεται ὁ β'. ἐν μέρει διαιρετέος, ὅς διαιρεθεὶς αὖθις ἐν τῷ πηλίκῳ χαρακτῆρα δώσει, ὁμοειδῆ τῷ ἐσχάτῳ χαρακτῆρι αὐτοῦ, εἰς τὸν ἐγγὺς κατώτερον τόπον τοῦ ἤδη εὑρεθέντος χαρακτῆρος τοῦ πηλίκου ἀνήκοντα· καὶ οὕτως εὑρεθήσονται οἱ χαρακτῆρες τοῦ πηλίκου μετ' εὐχερείας ἐφεξῆς ἀπὸ τοῦ ἀνωτάτου μέχρι τοῦ κατωτάτου, καταρχὰς μόνον εἰς τὸν ἀνώτατον χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου βλέπουσιν· οὕτω καὶ

2879793546 : 8029 = 358674
24087

β'. διαιρετ. 47109
40145

γ'. διαιρετέος 69443
64232

δ'. διαιρετέος 54115
48174

ε'. διαιρετέος 59414
56203

ς'. διαιρετέος 32116
32116

0

§. 93. Ἐάντις τῶν ἐν μέρει διαιρετέων ἐλάττων ᾗ, ἢ ὁ διαιρέτης, ὡς τούτου ἐκείνῳ μὴ ἐμπεριεχομένου, ὁ ὁμοειδὴς τόπος τοῦ πηλίκου τῷ 0 σημειωθήτω, καὶ τοῦ ἑπομένου χαρακτῆρος τοῦ ὁλικοῦ διαιρετέου καταχθέντος, γενέσθω ἡ πρᾶξις, ὡς σύνηθες.

οἷον 170594208 : 8402 = 20304
16804

25542
25206

33608
33600

0

§. 94. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τῶν χαρακτήρων ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριςερὰ κατὰ τὸ δεκαπλοῦν αὔξονται, ἕκαςος χαρακτὴρ ἀριςερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ ἑνὶ τόπῳ καταβιβασθεὶς σημαίνει μόνον τὸ 10 : τον, δυσὶ τόποις μόνον τὸ 100 : ςὸν, τρισὶ μόνον τὸ 1000 : ςὸν μέρος τῆς τιμῆς, καὶ δυνάμεως, ἣν ἐν τῷ προηγουμένῳ

μένῳ τόπῳ σημαίνει· π. χ. ἐν τῷ δε τῷ ἀριθμῷ (333333) ὁ 3 ἐν τῷ γ΄ τόπῳ σημαίνει μόνον τὸ 10:τον μέρος τοῦ, ὅ ἐν τῷ δ΄ δηλοῖ, μόνον τὸ 100:ςὸν τοῦ, ὅ ἐν τῷ ε΄ μόνον τὸ 1000:ςὸν τοῦ, ὅ ἐν τῷ ς΄·

Ἐὰν ἄρα οἱοσοῦν ἀριθμὸς διὰ 10, 100, 1000 κτ· διαιρεθῆναι προκέηται, ἕκαςος χαρακτὴρ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ καταβιβασθήτω κατὰ ἕνα, δύω, τρεῖς κτ. τόπους ἀριςερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, ἐν τῷ διαιρετέῳ τοσοῦτοι τῶν κατωτάτων τόπων ἀποβληθήτωσαν, ὅσα μηδενικὰ ὁ διαιρέτης περιέχει, οἱ δὲ χαρακτῆρες οἱ ἐν τοῖς ἀποβληθεῖσι τόποις θεωρηθήτωσαν ὡς λείψανον·

ἔνθεντοι

$$3450 : 10 = 345$$
$$34500 : 100 = 345$$
$$345000 : 1000 = 345$$
$$3450000 : 10000 = 345$$
$$345 : 10 = 34\tfrac{5}{10}$$
$$8256 : 100 = 82\tfrac{56}{100}$$
$$34567 : 1000 = 34\tfrac{567}{1000}$$
$$34567 : 10000 = 3\tfrac{4567}{10000} \text{ κτ.}$$

§. 95. Ἐὰν τὸ 10:τον μέρος ἀριθμοῦ τινος διὰ 2, 3, 4, 5, ἢ 6 διαιρῶμεν, προκύπτει τὸ 20, 30, 40, 50, ἢ 60:ςὸν μέρος αὐτοῦ·

ὡς

$$120 : 20 = 12 : 2 = 6$$
$$120 : 30 = 12 : 3 = 4$$
$$120 : 40 = 12 : 4 = 3$$
$$120 : 50 = 12 : 5 = 2\tfrac{2}{5}$$
$$120 : 60 = 12 : 6 = 2$$
$$120 : 70 = 12 : 7 = 1\tfrac{5}{7}$$

Διαι-

Διαιρεθέντος δὲ τοῦ 100: ςοῦ μέρους ἀριθμοῦ τινος διὰ 2, 3, 4, 5, ἢ 6, προελεύσεται τὸ 200, 300, 400, 500, ἢ 600: ςὸν μέρος αὐτοῦ. οἷον

$$1200 : 200 = 12 : 2 = 6$$
$$1200 : 300 = 12 : 3 = 4$$
$$1200 : 400 = 12 : 4 = 3$$
$$1200 : 500 = 12 : 5 = 2\tfrac{2}{5}$$
$$1200 : 600 = 12 : 6 = 2$$
$$1200 : 700 = 12 : 7 = 1\tfrac{5}{7}$$

Ὡσαύτως ἀνακύψει τὸ 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, ἢ 6000: ςὸν μέρος ἀριθμοῦ τινος, εἰ τὸ 1000: ςὸν μέρος αὐτοῦ διὰ 2, 3, 4, 5, 6 διαιροῦμεν·

ὡς

$$24000 : 2000 = 24 : 2 = 12$$
$$24000 : 3000 = 24 : 3 = 8$$
$$24000 : 4000 = 24 : 4 = 6$$
$$24000 : 5000 = 24 : 5 = 4\tfrac{4}{5}$$
$$24000 : 6000 = 24 : 6 = 4$$

Ἐὰν οὖν τοῖς τελευταίοις τόποις τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιρέτου μηδενικὰ προσῇ, τοσούτους τόπους ἐν ἀμφοτέροις παριδόντες, ὡς ἔθος, διαιρήσομεν. ὡς

```
70452 (000 : 342 (000 = 206
684
-----
 2052
 2052
 -----
   0
```

§. 96. Ἐὰν τοῖς τελευταίοις τόποις τοῦ διαιρετέου μηδενικὰ μὴ παρῇ, τοσοῦτοι τόποι ἐν τούτῳ παροφθήσονται, ὅσα μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου ἀποβάλλονται· ἀλλ'

ἀλλ' ἐν τῷ διορισμῷ τοῦ κλάσματος ἀμφοῖν αὖθις λόγον ποιησόμεθα·

ὡς 128592 (34 : 282 (00 = 456 $\frac{34}{28200}$

1128

1579

1410

1692

1692

0

Σχόλιον.

Ἡ μονὰς δὲν διαιρεῖ· διότι ἂν ζητῶμεν, ποσάκις ἡ 1 περιέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ, θέλομεν εὕρει, ὅτι εἰς κάθε διαιρετέον ἡ 1 περιέχεται τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ἐκεῖνος· ὥςε τὸ πηλίκον δὲν διαφέρει παντελῶς ἀπὸ τὸν διαιρετέον· ὡς $\frac{6}{1} = 6$. $\frac{12}{1} = 12$

$\frac{54326}{1} = 54326$· κτ·

§. 97. Αἱ δὲ συγκεκριμέναι (§. 4.) ποσότητες διαιροῦνται οὕτως·

ὑπογραφέντος τοῦ διαιρέτου τῇ μεγίςῃ τῶν μονάδων, ζητηθήτω τὸ πηλίκον· τὸ δὲ λείψανον, εἰ ὑπολειφθῇ, μεταβληθήτω εἰς τὰς ἐγγὺς κατωτέρας μονάδας, καὶ προςεθήτω ταύταις, καὶ διαιρεθήτωσαν καὶ αὗται διὰ τοῦ διαιρέτου· ὧν αὖθις τὸ λείψανον μεταχειρισθήτω ἐπίσης· οἷον· 19 πόδες, 8 δάκτ. καὶ 6 γραμμαὶ διαιρεθήτωσαν διὰ 6.

πόδ.

			ποδ.	δάκτ.	γρ.
19.	8.	6	3	3	5
(6)	12	24			
(18)	20	30			
1	(6)	(6)			
	18	30			
	2	0			

§. 98. Βάσανος δὲ τῆς διαιρέσεως ἐςὶν, ἐὰν τὸ πηλίκον μετὰ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθὲν (προσιθεμένου ἐν τῷ παραγομένῳ καὶ τοῦ λειψάνου, εἴτι ὑπολέλειπται) ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον ἀποδῷ, ἢ τὰ παραδείγματα τοῦτο δηλοῖ· διὰ τῆς διαιρέσεως βασανίζεται καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς (§. 60. κτ.) εἰ ἀκριβής· τοῦ γὰρ παραγομένου διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων διαιρεθέντος, προκύψει ἐν τῷ πηλίκῳ ὁ ἕτερος·

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

μετὰ γραμμάτων, ἢ Ἀλγεβραϊκῶν ἀριθμῶν.

§. 99. Ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως ἀριθμὸς ζητεῖται, ὅς μετὰ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθεὶς τὸν διαιρετέον παρέξει, (§. ἀν.) ῥάδιον συνιδεῖν, ὅτι

$$\alpha\beta : \beta = \alpha. \text{ ὅτι } \alpha \times \beta = \alpha\beta.$$
$$\alpha\beta\gamma : \alpha = \beta\gamma. \text{ ὅτι } \beta\gamma \times \alpha = \alpha\beta\gamma.$$
$$\alpha\beta\gamma : \alpha\beta = \gamma. \text{ ὅτι } \gamma \times \alpha\beta = \alpha\beta\gamma.$$
$$6\alpha\beta : 3\alpha = 2\beta. \text{ ὅτι } 2\beta \times 3\alpha = 6\alpha\beta.$$
$$10\alpha\beta\gamma : 5\gamma = 2\alpha\beta. \text{ ὅτι } 2\alpha\beta \times 5\gamma = 10\alpha\beta\gamma.$$

Σχόλιον.

Ἡ διαίρεσις, ὡς δῆλον, εἶναι πρᾶξις ἐναντία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ὅταν θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν π. χ. α μὲ β, ἢ νὰ λάβωμεν τὸ α, β: ις (§. 70.). τοῦτο

τοῦτο γίνεται οὕτως = αβ· διὰ νὰ κάμωμεν τὸ ἐναντίον τούτου, ἤτοι νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ αβ, β: ις, πρέπει νὰ ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ αβ τὸ β· τὸ ὁποῖον εἰς τὴν διαίρεσιν ἀποδίδοται οὕτως· αβ διαιρούμενον διὰ τοῦ β δίδωσι πηλίκον τὸ α· εὐκολώτερον θέλομεν καταλάβει τὸ λεγόμενον, ἂν διορίσωμεν τὸ α καὶ β· ἔςω α = 2· καὶ β = 3· καὶ ἔςαι αβ = 2 X 3, ἢ 2 ἐλήφθη τρίς· εἰ δέοι οὖν τὴν ποσότητα 2 X 3 διὰ 3 διελεῖν, ἀποβλητέον 3 ἀπ' αὐτῆς, διὰ νὰ ὑπολειφθῇ μόνον 2· διότι διὰ τούτου, τὸ 2 X 3 ἐλαττοῦται τρίς· ὑπολείπεται λοιπὸν 2, ὅ παρίςαται διὰ τοῦ α· ὥςε τοῦτον τὸν τρόπον θέλομεν μεταχειρισθῇ εἰς τὰ γράμματα· ὅθεν αβ: β = α καὶ αβ: α = α· καὶ ααγβ: αα = γβ.

β'.

Ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν γραμμάτων, πηλίκον εἶναι τὸ γράμμα, ἢ τὰ γράμματα, ὁποῦ δὲν εὑρίσκονται εἰς τὸν διαιρέτην· ὅταν δὲ καὶ ὁ διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ἔχωσι καὶ συνεργοὺς (§. 47.), τότε διαιρεῖται ὁ συνεργὸς τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρέτου, καὶ μετὰ τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν γράφονται ἀμέσως τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου, ὁποῦ δὲν περιέχει ὁ διαιρέτης· ὡς

αβγ: β = αγ καὶ	αβγ : 6αβ = $\frac{1}{6}$ γ·
12 αβδ: 4 αδ = 3 β	(§. 47. καὶ 85.)
24 αβδε: 8 βε = 3 αδ	5 αβγ: 6 βγ = $\frac{5}{6}$ α.

§. 100. Ἐὰν μηδὲν, ἢ μὴ πάντα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχωνται, τὴν διαίρεσιν διὰ τοῦ κεκλασμένου ἐκδηλώσομεν πηλίκου (§. 85.)

Οὕτως α : β = $\frac{\alpha}{\beta}$. καὶ αβ :| δεζ = $\frac{\alpha\beta}{\delta\epsilon\zeta}$, εἰδότες μόνον περὶ τῶν τοιούτων πηλίκων, ὅτι μετὰ τοῦ διαι-

διαιρέτου πολλαπλασιασθέντα τὸν διαιρετέον πάλιν παράγουσιν· ἢ ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \beta = \alpha \cdot \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha\beta}{\delta\varepsilon\zeta} \times \delta\varepsilon\zeta = \alpha\beta.$$

Σχόλιον.

Δείχνομεν τὴν διαίρεσιν ὄχι μόνον μὲ τὸ νὰ παρενςίζωμεν τὰ δύω σημεῖα, (§. 83.) ἀλλὰ καὶ οὕτω· $\frac{\alpha}{\beta}$· καὶ ἐν ἀριθμοῖς $\frac{6}{3}$. τὰ ὁποῖα σχήματα παριςῶσι τὸ μὲν, τὸ πηλίκον τὸ προκύπτον, διαιρεθέντος τοῦ α διὰ τοῦ β· τὸ δὲ, τὸ τοῦ 6 διαιρ. διὰ 3, ἤτοι τὸ 2· ὥςε εἰς παράςασιν τῆς διαιρέσεως μεταχειριζόμεθα ἢ τὰ δύω σημεῖα· ὡς αβ + γ + χ διαιρ: διὰ τοῦ μ + ν, ἀποδοθήσεται αβ + γ + χ: μ + ν, ἢ τὸν νῦν ῥηθέντα τρόπον· τοῦτον μάλιςα τότε, ὅτε (κατὰ τὸ ἀνωτ.) ὁ ἕτερος τρόπος χώραν οὐκ ἔχει.

§. 101. Ὁσάκις ὁ διαιρετέος, ἢ ὁ διαιρέτης συμπεπλεγμένος (§. 44.) ἦ, ἐναπολαμβάνεται ἐν παρενθέσει· ὅθεν τὸ (6αβ + 12αδ + 30αγδ): 3α σημαίνει τὸ, ὁ συμπεπλεγμένος διαιρετέος 6αβ + 12αδ + 30αγδ διαιρεθήτω διὰ 3α· ὃ περανοῦμεν, ζητοῦντες, ποσάκις 3α ἑκάςῳ μέρει τοῦ συνθέτου διαιρετέου ἐμπεριέχεται·

ἔςι δὲ	3α	ἐν	6αβ,	2β: ις (§ 99.σχ. β'.)
		ἐν	12αδ,	4δ: ις
	καὶ	ἐν	30αγδ,	10γδ: ις περιεχόμ: ἄρα

ἐν (6αβ + 12αδ + 30αγδ), (2β + 4δ + 10γδ.): ις περιεχόμενον.

ἢ (6αβ + 12αδ + 30αγδ.): 3α = 2β + 4δ + 10γδ.

ὡσαύ-

ὡσαύτως καὶ $(14 \alpha\beta\delta + 21 \alpha\beta\gamma + 35 \alpha^{\beta\text{ὶς}}) : 7\alpha\beta$
$= 2\delta + 3\gamma + 5\delta\varepsilon$·

καὶ $10\alpha\beta + 25\alpha\beta\delta + 30\beta\delta\varepsilon + 45\delta) : 5\beta$
$= 2\alpha + 5\alpha\delta + 6\delta\varepsilon + 9\frac{\delta}{\beta}$.

Σχόλιον.

Ἐάν τι μέλος, ἤ ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν ἠμπορῇ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ ἐντεῦθεν ἀναφυόμενον πηλίκον παρας͂αίνεται κεκλασμένως· ὡς, εἰ δέοι $\alpha + \beta$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ α, ἔςαι τὸ πηλίκον $1 + \frac{\beta}{\alpha}$, ὅτι $\alpha : \alpha = 1$ (§.84.σχ.) καὶ ἐπειδὴ τὸ α ὡς ὁρισὸν διελεῖν τὸ ἀόρισον β οὐ δύναται, ἐκφέρεται οὕτω· $\frac{\beta}{\alpha}$ ὡσαύτως καὶ $45\delta : 5\beta = 9\frac{\delta}{\beta}$.

§. 102. Ἐὰν δὲ ἄμφω συμπεπλεγμένοι ὦσι, χωρήσομεν αὖθις εἰς ἔργον, ὡς καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, καταργὰς μόνον εἰς τὸ α΄· μέρος τοῦ διαιρετέου ἀφορῶντες· οὕτως εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον τοῦ

$$= 5\gamma + 6\delta.$$

$$15\alpha\gamma + 18\alpha\delta + 20\beta\gamma + 24\beta\delta) : (3\alpha + 4\beta)$$

$$\begin{array}{llll}
15\alpha\gamma & & 20\beta\gamma & \\
\hline
& +18\alpha\delta & + & 24\beta\delta. \\
& +18\alpha\delta & + & 24\beta\delta. \\
\hline
& & 0 & \text{λέγοντες·}
\end{array}$$

α΄· 3α περιέχεται ἐν $15\alpha\gamma$, 5γ: ις· ὅτι $(3\alpha + 4\beta) \times 5\gamma$ (§. 74.σχ.β΄·) $= 15\alpha\gamma + 20\beta\gamma$, ὅ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $15\alpha\gamma + 18\alpha\delta + 20\beta\gamma + 24\beta\delta$ διαιρετέου ὑπολείπει $18\alpha\delta + 24\beta\delta$ λείψανον· καὶ

β΄· 3α

β'· 3α ἐν $18\alpha\delta$ περιέχεται 6δ: ἰς' ὅτι $(3\alpha + 4\beta) \times 6\delta = 18\alpha\delta + 24\beta\delta$·

ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $18\alpha\delta + 24\beta\delta$ οὐδὲν ὑπολείπει· ὡσαύτως εὑρεθήσεται καὶ

$$= 3\alpha + 2\beta + \delta\cdot$$

$$
\begin{array}{l}
(6\alpha\alpha + 4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 9\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta) : (2\alpha + 3\gamma) \\
6\alpha\alpha \qquad\qquad\qquad\quad + 9\alpha\gamma \\
\hline
\quad 4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta. \\
\quad 4\alpha\beta \qquad\quad\;\; + 6\beta\gamma \\
\hline
\qquad\quad 2\alpha\delta \quad + \quad 3\gamma\delta \\
\qquad\quad 2\alpha\delta \quad + \quad 3\gamma\delta \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

λέγουσι·

α'· 2α ἐν $6\alpha\alpha$ περιέχεται 3α: ἰς' ὅτι $(2 + 3\gamma) \times 3\alpha = 6\alpha\alpha + 9\alpha\gamma$· ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $6\alpha\alpha + 4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 9\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta$ δίδωσι $4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta$ λείψ.

β'· 2α ἐν $4\alpha\beta$ περιέχεται 2β: ἰς' ὅτι $(2\alpha + 3\gamma) \times 2\beta = 4\alpha\beta + 6\beta\gamma$· ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ $4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta$ δίδωσι λείψ. $2\alpha\delta + 3\gamma\delta$.

γ'· 2α ἐν $2\alpha\delta$ περιέχεται δ: ἰς' ὅτι $(2\alpha + 3\gamma) \times \delta = 2\alpha\delta + 3\gamma\delta$· ὃ ἀπὸ τοῦ $(2\alpha\delta + 3\gamma\delta)$ ἀφαιρεθὲν αὖθις οὐδὲν ὑπολείπει.

§. 103. Ἐὰν ἡ διαίρεσις τοῦτον τὸν τρόπον περανθῆναι οὐκ ἔχῃ, ἀγαπητέον τῷ κεκλασμένῳ πηλίκῳ (§. 85. καὶ §. 102.) ὡς $(3\alpha + 6\beta) : (\mu + 3\varrho) = \dfrac{3\alpha + 6\beta}{\mu + 3\varrho}$, περὶ οὗ μόνον οἴδαμεν, ὅτι

$$\left(\frac{3\alpha + 6\beta}{\mu + 3\varrho}\right) \times (\mu + 3\varrho) = 3\alpha + 6\beta.$$

ΠΕΡΙ