ᾧ τὸ χ ἐνυπάρχει, δυνήσῃ. Εἰ γὰρ καὶ πάνυ χρήσιμον πάντας τοὺς τῆς Ἐξ. ὅρους, ἡλίκη ἂν ᾖ, ἐκ μέσου αἴρειν, τοῦ α'. καὶ τελευταίου ἐξαιρουμένου, ἀλλ' ἀδύνατον. Ἀμήχανον γὰρ, π. χ. ἑκάστην Κυβικὴν Ἐξίσ. οὕτω μεταβαλεῖν, ὥστε τελευταῖον $\psi^3 + \gamma = 0$ ὑπολειφθῆναι, καὶ τηνικαῦτα ἐκ τοῦ ψ τὸ χ εὑρεθῆναι. Δῆλον δὲ τὸ λεγόμενον κἀκ τούτου, ὅτι τῇ ἐντελεῖ κυβικῇ Ἐξισώσει τρεῖς αἱ δυναταὶ τιμαὶ τοῦ χ, τῆς τοῦ $\psi^3 + \gamma = 0$, ἢ $\psi^3 = -\gamma$ μίαν μόνον δυνατὴν, τὰς δὲ δύω ἀδυνάτους ἐχούσης. (§. 397.) ὥστε τὰς τιμὰς τοῦ χ διὰ τῆς τοῦ ψ εὑρεῖν μὴ δύνασθαι.

§. 409. Ὥσπερ ἐκ τῆς Ἐξισ. ὅρον τινὰ δυνατὸν ἐξαγαγεῖν, οὕτω καὶ ἀνάπαλιν αὖθις εἰσαγαγεῖν ἔχομεν, εἰ ἀναγκαῖον, τῇ τῆς ῥίζης ἑνὶ ἀριθμῷ ἐπαυξήσει, ἢ τοῦ χ τὸ $\psi + 1$, ἢ $\psi + 2$, κτ. τιθέντες προσηκόντως ἀντικαταστήσομεν. Ἔστω ἡ Ἐξίσ. $\psi^3 - 13\psi - 12$. ἧς ὁ β'. ἄπεστιν ὅρος, καὶ ἧς αἱ ῥίζαι -1, -3, καὶ $+4$. Ἐὰν οὖν τεθῇ $\psi = \chi + 1$, προκύψει Ἐξίσ. ἡ ἑξῆς.

$$
\begin{array}{rcl}
\psi^3 & = & \chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi + 1 \\
-13\psi & = & \qquad\qquad -13\chi - 13 \\
-12 & = & \qquad\qquad\qquad\quad -12 \\
\hline
0 & = & \chi^3 + 3\chi^2 - 10\chi - 24.
\end{array}
$$

ἧς αἱ ῥίζαι -2, -4, καὶ $+3$.

§. 410. Ὅπως τὰς ἐνεργείᾳ ῥίζας οἱασοῦν Ἐξισ. ἀπόπειραν λαμβάνοντες ἂν εὕροιμεν. ἀντὶ τοῦ χ ἕνα τῶν εὑρεθέντων παραγόντων τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἐν τῇ Ἐξισώσει ἀντικαθιστάντες, δέδεικται. Ἀλλ' ἐὰν ποσότης τις εἰς πολλοὺς ἀναλύηται παράγοντας, ὀχληρὸν σχληρὸν πάνυ ἐκεῖνο ποιεῖν. Ἐπενόησαν οὖν μεθόδους τὰ τῶν ῥιζῶν ὅρια, ἢ πέρατα εὑρίσκειν, ὃ ἐςι τοὺς ἀριθμοὺς, ὧν μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ἐμπίπτουσιν αἱ δυναταί. Εἰ τοίνυν ἀριθμοὶ δύω καταφατικοὶ πρόκεινται, ὧν ὁ μὲν μείζων, ὁ δ' ἐλάττων τῶν ῥιζῶν, καλοῦνται οὗτοι τὰ ὅρια, ἢ οἱ ὅροι τῶν θετικῶν ῥιζῶν. Εἰ δ' οἱ δύω ἀριθμοὶ ἀποφατικοὶ, οἱ ὅροι τῶν ἀποφατικῶν ῥιζῶν. Ὅπως δὲ ἡ ζήτησις τῶν κατὰ τὰς ῥίζας ὅρων δι' Ἐξισώσεως εὐεπιχείρητος ᾖ, μετάβαλε τὴν Ἐξίσ. εἰς ἑτέραν, ἧς ὁ β'. ὅρος ἄπεςι (§. 405.) Ἔςω Ἐξίσ. ἡ β'. ἀμοιροῦσα ὅρου ἥδε $\chi^3 - \pi\chi + \gamma = 0$. Ἔςιν οὖν $\chi^3 + \gamma = + \pi\chi$. Ἀναγκη ἄρα πᾶσα τὸ $\pi\chi$ μεῖζον εἶναι τοῦ χ^3. Ἵνα γὰρ τὸ χ^3 τῷ $\pi\chi$ ἐξισωθῇ, προσθετέον αὐτῷ (τῷ χ) καὶ τὸ γ. Ὥςε

$$\frac{\pi\chi > \chi^3}{\pi > \chi^2} : \chi$$

$$\frac{\pi > \chi^2}{\sqrt{\pi} > \chi} \text{ Ἐξ. ἡ } \sqrt{}$$

Εὕρηται οὖν ἀριθμὸς μείζων τῆς ῥίζης. Ζητηθήτω καὶ ἕτερος ἐλάσσων αὐτῆς. Ἐπειδὴ $\chi^3 - \pi\chi + \gamma = 0$, ἔςι καὶ $\chi^3 + \gamma = \pi\chi$. Ὥςε τὸ γ μόνον πάντως, ἔλαττον τοῦ $\pi\chi$. Τὸ γὰρ χ^3 τούτῳ ἔτι προσθῆναι χρὴ, ἵνα τῷ $\pi\chi$ ἴσον γένηται Ἔνθεντει

$$\frac{\gamma < \pi\chi}{\frac{\gamma}{\pi} < \chi} : \pi$$

Ἰδοὺ

Ἰδοὺ καὶ ἑτέρα ποσότης. τῆς ῥίζης ἐλάσσων. Ἡ ἄρα καταφατικὴ ῥίζα κεῖται μεταξὺ $\sqrt{\pi}$, καὶ $\frac{\gamma}{\pi}$. Ὅθεν οὐδ' ἀπόπειραν τῶν παραγόντων ληπτέον.

Παράδ, ἐν ἀριθμοῖς $\chi^3 - 25\chi + 36 = 0$

$$\chi^3 + 36 = + 25\chi$$

$$\chi^3 < 25\chi \qquad : \chi$$

$$\chi^2 < 25$$

$$\chi < \sqrt{25}. \text{ ἢ } < 5.$$

Αὖθις. ἐπειδὴ $\chi^3 + 36 = 25\chi$

ἔςαι καὶ $36 < 25\chi \qquad : \chi$

$$\tfrac{36}{25} < \chi$$

Ἀλλὰ $\frac{36}{25} = 1, 44$. Ἡ θετικὴ τοίνυν ῥίζα κεῖται μεταξὺ 1, 44 καὶ 5. ἢ τῷ βουλομένῳ ἐν ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς ἀπόπειραν λαβεῖν οὐκ ἀναγκαῖον ἐλάσσονος τοῦ 2, καὶ μείζονος τοῦ 4 ἀποπειράσασθαι. Ὁ γὰρ 5 πάνυ μέγας. Καὶ ἡ μὲν θετικὴ λογικὴ ῥίζα τῆς Ἐξισ. $\chi^3 - 25\chi + 36 = 0$ ἐςὶ τῷ ὄντι $= + 4$, αἱ δὲ λοιπεὶ δύω ἄλογοι, ὧν ἡ μὲν $+ 1, 6 \ldots$ ἡ δὲ $- 5, 6 \ldots$

§. 411. Ἀδιόριςον δὲ Πρόβλημα καλεῖται τὸ πολλαχῶς ἐπιλυθῆναι δυνάμενον. (§. 344) Οἷον, ἔςωσαν προσθετέοι τρεῖς ἀριθμοὶ, ὧν τὸ κεφάλαιον $= 10$. Τοῦτο οὖν πολλαχῶς ἂν ποιήσαιμεν. Ὡς

Ὡς $1 + 2 + 7 = 10$. $1 + 3 + 6 = 10$. $1 + 4 + 5 = 10$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 412. Παράδειγμα. Ζήτησον δύω ἀριθμοὺς ὧν τὸ κεφάλαιον, καὶ ὧν τὸ παραγόμενον ἅμα ἴσα δεδομένῳ τινὶ ἀριθμῷ, π. χ. α. Ἐπειδὴ ἄγνωστοι, οἱ δύω ἀριθμοὶ, ῥηθήτωσαν χ, καὶ ψ. Τὸ ἄρα τούτων κεφάλαιον ἐστὶ $\chi + \psi$. τὸ δὲ παραγόμενον $\chi\psi$. Ὥστε $\chi + \psi + \chi\psi = \alpha$. Ἀλλ' εἰκαὶ, ὡς εἴρηται, εἷς ἄγνωστος ἀριθμὸς διὰ μιᾶς Ἐξισώσ. δύω δὲ διὰ δυοεῖν διορίζονται. καὶ ἐν γένει, τοσαύτας εἶναι τὰς Ἐξισώσεις χρὴ, ὅσαι τῶν ποσοτήτων αἱ ἄγνωστοι. Τοῦτο μέντοι οὐκ ἀεὶ δυνατόν. Ἔνθεν τοι ἀναγκαίως καὶ μία, ἢ πλείους τῶν ἀγνώστων ἀδιόριστοι μένουσιν, ἤπερ ἂν Ἐξισώσεις κατὰ τὸ πρόβλημα συστατοὶ εἶεν, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος παραδ. ἔνθα, δύω ἀγνώστων προκειμένων, μία μόνον Ἐξίσωσις ἐκ τοῦ προβλ, συστατή. Ὥστ' ἡ ἑτέρα τῶν ἀγνώστων ἀδιόριστος μενεῖ. Ζητητέα οὖν ἡ τοῦ χ τιμὴ, τοῦ ψ ἀδιορίστου μένοντος.

$$\chi + \psi + \chi\psi = \alpha$$
$$\chi + \chi\psi = \alpha - \psi \quad \text{ἢ}$$
$$(1 + \psi)\chi = \alpha - \psi \quad : 1 + \psi$$
$$\chi = \frac{\alpha - \psi}{1 + \psi}.$$

Ἔνταῦθα, ὅ, τι ἂν τὸ ψ ὑποτεθῇ, τὸ χ διώρισται. Καὶ μυρίαι τούτου αἱ ἐπιλύσεις, μάλιστα, εἰ τὸ ψ καὶ κλασματικὸν παραληφθῇ π, χ. ἔστω $\psi = \frac{1}{4}$, καὶ α σημαινέτω 6, καὶ ἔσται $\chi = \frac{6 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{23}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{23}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{23}{5}$. Καὶ $\chi + \psi + \chi\psi = 6$ ἔσται $= 6$.

Ἐστι

Ἔςι γὰρ $\frac{23}{5} + \frac{1}{4} + \frac{23}{20} = 6$ ἢ

$$\frac{92 + 5 + 23}{20} = 6$$ ἢ

$$\frac{120}{20} = 6$$

Εἰ δ' ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν ὁλοσχερὴς θετικὸς ἦ, τὸ Πρόβλημα ἔτι μᾶλλον ἔςαι διωρισμένον. Ἔςω γὰρ ψ ὁλοσχερὴ ἀριθμὸς, καὶ παραπλησίως $a = 6$. Ὥςε

$$\chi = \frac{6 - \psi}{1 + \psi}$$

Ἔνθα ψ οὐκ ἂν εἴη $= 0$, οὐδὲ $= 6$. Καὶ τὸ μὲν α'. ὅτι ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν εἶναι χρή. τὸ δὲ β'. ὅτι οὕτως αὖθις $= 0$ ἂν γένοιτο, καὶ τοῦ χ οὐδεμία τιμὴ προκύψειεν. Ἀλλ' οὔτε ἀποφατικὸν εἶναι δυναται, διὰ τὴν ὑπόθεσιν. Ὅθεν πέντε μόνον ἐπιλύσεις δυναταί. Ἤτοι ψ εἶναι δύναται 1, 2, 3, 4, 5, καὶ τὸ χ $=$ ταῖς ἑξῆς ποσότης $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$. Ἀλλ' οὐδ' ἄμφω οἱ ἀριθμοὶ ἐπὶ τούτου ὁλοσχερεῖς καταφατικοὶ εἶεν. Εἰ δὲ τοῦτο ἀπαιτεῖται, τὸ πρόβλ. τυγχάνει ἀδύνατον. Τεθέντων δ' ἐν τῇ Ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ χ καὶ ψ οἱ τούτοις ἀνήκοντες ἀριθμοὶ, κἀπὶ τῶν 5 τρόπων τὸ κεφάλ. τῆς Ἐξισ. ἔςαι $= 6$.

§. 413. Δίελε 25 εἰς δύω μέρη, ὧν θάτερον διὰ 2, θάτερον δὲ διὰ 3 διαιρέσιμον. Λύσις. Ἔςωσαν τὰ δύω μέρη (μετὰ τὴν ἐνεργείᾳ γεγονυίαν διαίρεσιν τοῦ μὲν διὰ 2, τοῦ δὲ διὰ 3) χ καὶ ψ. Ὥςε χ δὶς, καὶ ψ τρὶς ληφθὲν ἔσονται ἅμα 25, καὶ διὰ μὲν τοῦ 2χ παραςαίη ὁ ἕτερος τῶν ζητουμένων, διὰ δὲ τοῦ 3ψ ὁ ἕτερος. Ὅθεν

2χ

$$2\chi + 3\psi = 25$$
$$2\chi = 25 - 3\psi$$
$$\chi = \frac{25 - 3\psi}{2}$$

Ἐπειδὴ χ ὁλοσχερὴς καταφατικὸς ἐϛιν ἀριθμὸς καὶ ψ τοιοῦτον εἶναι χρὴ, οὐκ ἔχει ἄρα ψ μεῖζον εἶναι τοῦ 8. Εἰ γὰρ τοῦτο, ἐγένετο ἂν $\frac{25 - 3\psi}{2}$ ἀποφατικὴ ποσόσης. καὶ χ, τὸ τούτῳ ἴσον, ὡσαύτως, κατὰ τῆς ὑποθ. Ἀλλ᾽ οὐδ᾽ ἄρτιος ἀριθμὸς τὸ ψ ἂν εἴη. ἄλλως γὰρ καὶ 3 ψ ἀρτιωθήσεται. (διὰ γὰρ τοῦ μετ᾽ ἀλλήλων πολλαπλ. περιττοῦ καὶ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἀεὶ ἄρτιος ἀναφύεται) καὶ εἰ 3 ψ ἄρτιος, 25 — 3ψ οὐκέτι διὰ 2 διαιρεθείη. (πᾶς γὰρ ἄρτιος ἀπὸ περιττοῦ ἀφαιρεθεὶς περιττὸν ὑπολείπει, διὰ 2 μὴ διαιρέσιμον) Ἐπεὶ οὖν ψ μεῖζον τοῦ 8 εἶναι οὐκ ἔχει, οὐδὲ μὲν οὖν ἄρτιος ἀριθμὸς, οὐδὲ 0, (ὅτι ἀριθμὸν εἶναι χρὴ) δέδοται δ᾽ ἐνταῦθα μόνον μία Ἐξίσωσις τῶν δύω ἀγνώϛων, ἔχομεν ἐκ τούτων τὸ ψ ἀποδοῦναι. Ἤτοι δύναται παραϛῆσαι πάντα περιττὸν καταφατικὸν ἀριθμὸν, μεταξὺ 0 καὶ 8 κείμενον. Ὥϛε ψ εἴη ἂν 1, 3, 5, 7, καὶ κατὰ τοῦτο διορίζεται καὶ τὸ χ. Ἐπίδεχεται ἄρα τὸ Προβλ. δ΄. ἐπιλύσεις

Ἐὰν	ψ	=	1	ἔϛι	χ	=	11
Ἐὰν	ψ	=	3	ἔϛι	χ	=	8
Ἐὰν	ψ	=	5	ἔϛι	χ	=	5
Ἐὰν	ψ	=	7	ἔϛι	χ	=	2

Εἰσὶν οὖν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ 2χ + 3ψ α΄. 22 + 3. β΄. 16 + 9. γ΄. 10 + 15. καὶ δ΄. 4 + 21.

§. 414.

§. 414. Ἐν συνελεύσει τινὶ ἀνδρῶν, καὶ γυναικῶν δεδαπάνηνται 1000 γρόσσοι. Καὶ ἕκαστος μὲν τῶν ἀνδρῶν 19, ἑκάστη δὲ τῶν γυναικῶν 13 γρ. κατέβαλε. Πόσοι οἱ ἄνδρες, καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Λύσις. Αὐτίκα δῆλον, ὅτι τῶν τῆς Ἐξισ. ὑποθέσεων ἐκ μέσου ἀρθεισῶν, ἡ τοῦ Ζητήματος ἐπίλυσις οὕτως ἂν ἀποδέδοτο. Δίελε 1000 εἰς δύω μέρη, ὧν τὸ μὲν διὰ 19, τὸ δ' ἕτερον διὰ 13 διαιρεσίμου, ὧν τὰ πηλίκα ὁλοσχερεῖς, καὶ καταφατικοὶ ἀριθμοί. Διαιρεθέντα τὰ ζητούμενα μέρη διὰ 19, καὶ 13 ἔστωσαν χ, καὶ ψ. Ἔσονται ἄρα τὰ μέρη $19\chi + 13\psi$, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου $19\chi + 13\psi = 1000$. Ζητήτωμεν τὸ ψ, ὡς εὐχερέστερον εἰς εὕρεσιν. Ἔνθεντοι

$$13\psi = 1000 - 19\chi$$

$$\psi = \frac{1000 - 19\chi}{13}$$

Εἰ οὖν ἐνταῦθα πεῖραν λαμβάνοντες ζητῆσαι βουλόμεθα, τὶ τὸ χ σημαίνοι, ἐφ' ᾧ $\frac{1000 - 19}{13}$ ὁλοσχερῆ καταφατικὸν εἶναι, ὡς καὶ τὸ χ τοιοῦτον λίαν διεξοδικόν. Πειρατέον τοίνυν ἄλλως, καὶ $\frac{1000 - 19\chi}{13}$ ἐνεργείᾳ διαιρετέον. Ὥστε $\psi = \frac{1000 - 19\chi}{13}$

$$= \frac{1000}{13} - \frac{19\chi}{13} = 76 + \frac{12}{13} - \chi - \frac{6\chi}{13}$$

$-\frac{6\chi}{13} = 76 - \chi + \frac{12 - 6\chi}{13}$. Ἐπειδὴ δὲ ψ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἶναι ὀφείλει, καὶ χ ὡσαύτως, ἔςι καὶ $76 - \chi$ ὁλοσχερὴς ἀριθμός. Ἀνάγκη ἄρα καὶ $\frac{12 - 6\chi}{13}$ ὁλοσχερῆ ἀρ. εἶναι. Ἄλλως γὰρ ψ οὐκ ἂν εἴη ὁλοσχερής. Οὐ μόνον δὲ $12 - 6\chi$ διὰ 13 διαιρέσιμος, ἀλλὰ καὶ τὸ ο : μόριον αὐτοῦ, ἢ $2 - \chi$. Ἔςι γὰρ $\frac{12 - 6\chi}{13} = \frac{(2 - \chi)}{13} . 6$. Ἐπεὶ δ' ὁ ἕτερος παράγων 6 διὰ τοῦ 13 οὐκ ἔχει διαιρεθῆναι, ἀνάγκη πᾶσα τὸν ἕτερον παράγ. διαιρεῖσθαι δύνασθαι, εἴπερ πᾶσα ἡ ποσότης διὰ τούτου διαιρέσιμος εἶναι ὀφείλει. Ἄλλως γὰρ οὐ δυνατόν. Ὥςε $2 - \chi$ διὰ 13 διαιρέσιμος.

Παραληφθήτω καὶ ἑτέρα καινὴ ἄγνωςος ποσότης. ἐπειδὴ γὰρ $2 - \chi$ διὰ 13 διαιρέσιμος, ἔςω τὸ πηλίκον $= \omega$. Ἀλλὰ τοῦτο ἀποφατικὸν εἶναι χρὴ, ὡς τοῦ χ μείζονος εἶναι ὀφείλοντος, ἢ ὁ 2. ἄλλως γὰρ ἡ διαίρεσις οὐκ ἂν γένοιτο. Ὥςε $\frac{2 - \chi}{13} = -\omega$. καὶ ἑπομένως $2 - \chi = -13\omega$. $13\omega + 2 = \chi$ ἀντικαταςήτω ἐν τῇ Ἐξισώσει. Ἦν τὸ $\psi = 76 - \chi + \frac{12 - 6\chi}{13}$. Δι' ἀντικαταςάσεως γίνεται

$$\psi = 76 - 2 - 13\omega + \frac{12 - 12 - 78\omega}{13}$$

$= 74 - 13\omega - 6\omega = 74 - 19\omega$. Ἐπειδὴ $\psi = 74 - 19\omega$, καὶ θετικὸν δὲ, (τὸ ψ) τὸ ω οὐ ω οὐ τηλικουντὸν εἶναι χρὴ, ὥςε 74 ἀναιρεῖν. Εἰ γὰρ 4 τεθῇ, πάνυ ἂν μέγα εἴη. Ὅτι $4 \cdot 19 = 76$. Ὅθεν ἀνάγκη ἔλαττον τοῦ 4 εἶναι, καὶ ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν. Δύναται οὖν $\omega = 0, 1, 2, 3$ εἶναι. Εἰ $= 0$, ἔςαι $\psi = 74$. Εἰ δὲ $= 1$, ἔςαι $\psi = 55$. Εἰ δὲ $= 2$, ἔςαι $\psi = 36$. Εἰ δὲ $= 3$, ἔςαι $\psi = 17$. Τέσσαρες ἄρα ἐπιλύσεις τοῦ Προβλήμ. δυναταί. Εἰ γὰρ $\psi = 74$, ἔςαι χ 12. Ἦν γὰρ $\chi = \dfrac{1000 - 13\psi}{19}$. Εἰ δὲ $\psi = 55$, ἔςαι $\chi = 15$. Εἰ δὲ $\psi = 36$, ἔςαι $\chi = 28$. Εἰ δὲ $\psi = 17$, ἔςαι $\chi = 41$. Ὅτι χ τοὺς ἄνδρας, καὶ ψ τὰς γυναῖκας σημαίνει. Καὶ εἷς ἀνὴρ καταβάλλει 19 γρ. μία δὲ γυνὴ 13 γρ.

Ἦσαν οὖν

1) 2 ἄνδρες, καὶ 74 γυναῖκες. καὶ οἱ μὲν 38 γρ. καταβαλλουσιν, αἱ δὲ γυναῖκες 962.

2) 15 ἄνδ. καὶ γυν. ὧν οἱ μὲν 285, αἱ δὲ 715 γρ. ἀποτίουσι.

3) 28 ἄνδ. καὶ 36 γυν. καὶ οἱ μὲν 532 γρ. αἱ δὲ 468 καταβ.

4) 41 ἄνδ. καὶ 17 γυν. ὧν οἱ μὲν 779, αἱ δὲ 221 καταβάλλουσι.

Ἅλις τῶν Ἐξισώσεων, ὅσον τοῖς Πρωτοπείροις ἀρκεῖ, καὶ καταβάλωμεν.

Τέλος.