ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

§. 41. Οἱ ἀφῃρημένοι ἀριθμοὶ (§. 4.) ἔχουσι γενικωτέραν σημασίαν, ἢ οἱ συγκεκριμένοι· 5 δραχμαὶ π. χ. μόνον περὶ τῶν δραχμῶν, καὶ περὶ οὐδενὸς ἑτέρου ἂν λέγοιντο· τοὐναντίον δὲ, ὁ ἀφῃρημένος (5) ἁρμόζει ἑκάσταις πέντε ὁμοειδέσι μονάσι π. χ., δραχμαῖς, ὀβολοῖς, ἵπποις, κτ. ἀλλ' οὗτος ὁ 5 οὐ δύναται σημαίνειν καὶ 4, ἢ 6, ἢ 2, ἢ 3, ἢ 10 μονάδας· μᾶλλον δὲ οὐδεμίαν ἑτέραν πληθὺν ὁμοειδῶν μονάδων, ἢ 5 μόνον.

Δίδονται οὖν ἔτι γενικώτεροι ἀριθμοὶ, οἱανοῦν πληθὺν ὁμοειδῶν μονάδων ἐν ἑαυτοῖς περιλαμβάνοντες, οἵτινες Ἀλγεβραϊκοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται· παρίστανται δὲ διὰ τοῦ α, β, γ, δ, ε, κτ.

Σημαίνει τοίνυν α πάντα ἀριθμόν· ὡσαύτως καὶ β πάντα ἀριθμὸν, ὡς τὸ α· α καὶ β δὲ σημαίνουσιν ὁποιουσοῦν δύω· α, β, καὶ γ ὁποιουσοῦν τρεῖς, κτ.

Ὁ λέγων α δραχμὰς ἐκφέρει πᾶσαν πληθὺν δραχμῶν, ἄνευ ἐξαιρέσεως· καὶ ὁ λέγων α δρ. καὶ β δρ. οἱασοῦν δύω πληθύας δραχμῶν αὖθις ἄνευ ἐξαιρέσεως· ὅ, τι οὖν κατὰ τοῦ α καὶ β λέγεται, λεχθήσεται καὶ καθ' ἑκάστων δύω ὁμοειδῶν ἀριθμῶν· καὶ ὅ, τι ἀληθεύει περὶ τοῦ α, β, γ, καὶ δ, ἀληθεύσει καὶ περὶ οἱωνοῦν τεσσάρων ὁμοειδῶν ἀριθμῶν.

Σχόλιον.

Τὸ α ἠμπορεῖ νὰ σημαίνῃ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 100, 1000 κτ. ὡσάυτως καὶ τὸ β φανερώνει κάθε δυνατὸν ἀριθμὸν, 1, 2, 3, 4, κτ. καὶ ὅλως, πάντα ἀριθμόν· ἕνα δηλαδὴ, ὅποιον θέλῃς, ὄχι ὅμως καὶ ὅλους ὁμοῦ εἰς τὸν ἴδιον καιρόν· τί δὲ τὸ, ἐν τῷ ἀυιωτ. §. ὅ, τι κατὰ τῶν γραμμάτων λέγεται, λεχθήσεται καὶ κατὰ τῶν δυνατῶν ἀριθμῶν, καὶ ποσοτήτων, ὁποῦ παραςάινονται διὰ τῶν γραμμάτων, θέλομεν τὸ καταλάβει ἀρκετὰ ἐν τοῖς ἑξῆς.

§. 42. Εἴθιςαι τοῖς Μαθηματικοῖς ἐν τῷ διὰ τῶν γραμμάτων ὑπολογισμῷ τὰς ποσότητας, ἢ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς δοθέντας, ἢ γνωςοὺς διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, διὰ τοῦ α, β, γ, δ, ε, ζ, κτ. ἐκφαίνειν· (ἔνθα ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον ἕκαςον γράμμα ἑτέραν οἱανοῦν ποσότητα σημαίνει, ἢ τὰ λοιπά·) τοὺς δὲ ἀγνώςους, ἢ τοὺς ζητουμένους, καὶ διὰ τῶν γνωςῶν εὑρεθησομένους διὰ τῶν ἐσχάτων· υ, φ, χ, ψ, ω.

Σχόλιον.

Τὰ γράμματα ἔχομεν τὴν ἄδειαν νὰ τὰ λαμβάνωμεν ἀντὶ πάσης ποσότητος· ἀφ' οὗ ὅμως τὰ διορίσωμεν, πρέπει νὰ ἐμμένωμεν εἰς τὸν διορισμὸν μέχρι τέλους τοῦ ἀνὰ χεῖρας ὑπολογισμοῦ· π. χ. ἂν ἐκλάβῃς τὸ x ὡς τοῦ ς σημαντικὸν, ἢ 6, ἢ κτ· τήρει τὴν ἐκδοχὴν τὴν αὐτὴν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ὑπολογισμῷ α· τὰ αὐτὰ ῥητέον καὶ περὶ τῶν ἄλλων γραμμάτων.

§. 43 Ἀποδέδοται τοῖς γράμμασιν ἡ καθόλου αὕτη σημασία, ἵ α διὰ τούτου ῥαδίως ἅπασαι ἐν γένει ἐκδηλῶνται ποσότητες, καὶ τῶν κατ' αὐτὰς ἰδιοτήτων θεωρουμένων, γενικαὶ ἀλήθειαι ἐκκαλύπτωνται, ταῖς μερικοτέραις ποσότησιν, ὡς κανόνες ἐφαρμόζουσαι (§. 41. καὶ σχ.)

§. 44. Ποσότης ἀλγεβραϊκὴ, ἡ ἑνὶ γράμματι παριςαμένη, ἁπλῆ ἀκούει· ὡς α, β, γ. δυσὶ δὲ, ἢ πλείοσι, σύνθετος. οἷον, αβ, βγδδ. ἑκατέρα, μόνη τιθεμένη, ἀσύμπλεκτος λέγεται· ὡς α, αβγ. δε,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Κ. Σ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε. Α. Τ. Π. Κ. Τ. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

δε, χχ. τοῖς δὲ σημείοις (§. 38.) συναπτομένη, συμπεπλεγμένη· ὡς $\alpha\beta + \varepsilon\delta$. ἢ $\alpha - \beta$.

§. 45. Οἱουσοῦν ἀριθμοὺς σημαίνωσιν α, καὶ β, τὰ ἑξῆς συμπεπλεγμένα σχήματα, ἐπὶ τὸ συντομώτερον, συςαλῆναι ἔχουσι· (§. 40. σχ. β'.)

$$-5\beta - 6\beta = -11\beta.$$
$$3\alpha + 2\alpha = 5\alpha.$$
$$5\alpha - 3\alpha = 2\alpha.$$
$$-9\beta + 4\beta = -5\beta.$$
$$3\alpha + 7\beta - 8\alpha = 7\beta - 5\alpha.$$
$$17\alpha + 6\beta - 11\alpha - 13\alpha = 6\alpha - 7\beta.$$

Περὶ προσθέσεως τῶν καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν·

§. 46. Πρόσθεσίς ἐςιν ἀριθμοῦ εὕρεσις, ἴσου τοῖς δοθεῖσι. (§. 19.)

ὅθεν ἐὰν $\left.\begin{array}{l} +\alpha \\ +\beta \end{array}\right)$ οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ὦσι

ἔςαι $+\alpha + \beta$ τὸ τούτων κεφάλαιον.

ἐὰν $\left.\begin{array}{l} +\alpha \\ -\beta \end{array}\right)$ οἱ δ. ἀρ.

ἔςαι $+\alpha - \beta$. τὸ τούτων κεφ.

ἐὰν $\left.\begin{array}{l} -\alpha \\ +\beta \end{array}\right)$ οἱ δ. ἀρ.

ἔςαι $-\alpha + \beta$ τὸ τούτ. κεφ.

ἐὰν $\left.\begin{array}{l} -\alpha \\ -\beta \end{array}\right)$ οἱ δ. ἀρ.

ἔςαι $-\alpha - \beta$ τὸ τ. κεφ.

Οἱ γὰρ συμπεπλεγμένοι (§. 44.) ἀριθμοί $(+\alpha + \beta)$, καὶ $(+\alpha - \beta)$, καὶ $(-\alpha + \beta)$, καὶ $(-\alpha - \beta)$ ἀναμφιβόλως ἴσοι εἰσὶ τοῖς ἁπλοῖς, ἐξ ὧν συνίςανται.

Ἐπε-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ. ... ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ἐπειδὴ τοίνυν α, καὶ β πάντα δυνατὸν ἀριθμὸν (§. 41.) σημαίνουσιν, ἐπιφέρομεν καθόλου, ὅτι τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν ἐφεξῆς ἀλλήλων ἑκάτερος μετὰ τοῦ κατ᾽ αὐτὸν σημείου καταγράφηται.

Ἔςωσαν $\left.\begin{array}{r} +12 \\ +18 \end{array}\right)$ οἱ δοθ. ἀρ.

$12 + 18 = 30$ (§. 41. σχ. β′.) ἔςαι τὸ τούτων κεφάλαιον

ἔς. $\left.\begin{array}{r} +8 \\ -5 \end{array}\right)$ οἱ δ. ἀρ.

$+8 - 5 = 3$ (§. αὐτ.) ἔςαι τὸ τ. κ.

ἔς. $\left.\begin{array}{r} -9 \\ +2 \end{array}\right)$ οἱ δ. ἀρ.

$-9 + 2 = -7$ (§. αὐτ.) τ. τ. κ.

ἔς. $\left.\begin{array}{r} -10 \\ -5 \end{array}\right)$ οἱ δ. ἀρ.

$-10 - 5 = -15$ (§. αὐτ.) τ. τ. κ.

ἔςωσαν $\left.\begin{array}{r} 9\alpha - 5\beta + 7\gamma \\ -4\alpha + 7\beta - 12\gamma \end{array}\right)$ οἱ δοθ. ἀρ.

$9\alpha - 4\alpha - 5\beta + 7\beta + 7\gamma - 12\gamma = 5\alpha + 2\beta - 5\gamma$ τὸ κεφάλαιον (§. αὐτ.)

Εἰ, ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγματι, ἡ ἐπιτομὴ χώραν ἔχειν δύναται, θεωρήσομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς, ὡς μέρη τοῦ κεφαλαίου, τῇ ἐπιτομῇ ἀμέσως χρώμενοι, ἵν᾽ ἐφάπαξ ἐν τῷ κεφαλαίῳ τὸ, ὡς οἷόντε, ἐπιτομώτατον προκύψῃ σχῆμα. (§. 40.)

Οὕτως

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Οὕτως ἐν τῷ αὐτῷ παραδείγματι

$$\begin{array}{rrrrrrl} & 9\alpha & - & 5\beta & + & 7\gamma & \big\} \text{ οἱ δοθ. ἀρ.} \\ - & 4\alpha & + & 7\beta & - & 12\gamma & \\ \hline & 5\alpha & + & 2\beta & - & 5\gamma & \text{τ. τ. κεφ.} \end{array}$$

Τῶν δοθέντων ἀριθμῶν μὴ ἐφεξῆς γραφέντων ἐν τῷ κεφαλαίῳ, ὡς ἀνωτέρω, λέγομεν $+ 9\alpha - 4\alpha$ δίδωσι $+ 5\alpha$ (§. 45.) $- 5\beta + 7\beta$ δίδωσι $+ 2\beta$ (§. αὐτ.) καὶ $+ 7\gamma - 12\gamma$ δίδωσι $- 5\gamma$·

Ὡσαύτως καὶ

$$\begin{array}{rrrrrl} 17\alpha & - & 9\beta & + & 7\gamma. & \\ & + & 3\delta & & & \big\} \text{ οἱ. δ. ά.} \\ -5\alpha & + & 9\beta & - & 9\gamma & \\ \hline 12\alpha & - & 2\gamma & + & 3\delta & \text{τὸ κεφ.} \end{array}$$

Καὶ γὰρ $+ 17\alpha - 5\alpha = + 12\alpha.$ $- 9\beta + 9\beta = 0$ (§. 37.) $+ 7\gamma - 9\gamma = - 2\gamma.$

Σχόλιον α'·

Ἐπειδὴ εἴπομεν (§. 18.) ὅτι μόνον ὁμοειδῆ ἠμποροῦν νὰ προςεθοῦν ἀλλήλοις, καὶ τὰ αὐτὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἀνθ' οἱασοῦν ποσότητος παραληφθέντα, σημαίνουν τὸ αὐτὸ ἐν τῷ ἰδίῳ ὑπολογισμῷ (§. 42. ἐντῷ σχ.) διὰ τοῦτο, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ κεφάλαιον, συνάπτονται ἀλλήλοις διὰ τὴν ἐπιτομὴν τὸ α, καὶ α, καὶ τὸ β, καὶ β, κτ' ὅταν ἔχουν τὰ αὐτὰ σημεῖα· ἢ τὸ α ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ α, τὸ β ἀπὸ τοῦ β, κτ. ὅταν ἔχουν ἀνόμοια. (§. 40. σχ. β').

β'·

Ἐὰν τὰ γράμματα, ὁποῦ ἔχουν νὰ προςεθοῦν ἀλλήλοις, δὲν εἶναι ὁμοειδῆ, προκύψει τὸ κεφάλαιον τούτων, μὲ τὸ νὰ γράφωνται ἐφεξῆς ἕκαςον μὲ τὸ σημεῖον

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ. Π.Τ.Φ. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

μειόντου· ὡς, εἰ δέοι προσθεῖναι $+ \alpha + 4\beta + 3\gamma - 4\chi - 4\psi + 3\omega$· οὐδὲν γὰρ οὐδενὶ ὁμοειδές· τὸ ἴδιον θέλομεν κάμει, καὶ εἰ μόνον ἓν γράμμα πρόκειται προσθετέον ὡς β, ἢ γ. τουτέςι θέλομεν τὸ γράψει μὲ τὸ σημειόντου.

§. 47. Ὁ ἀριθμὸς, ὅς τῷ γράμματι πρόσεςι, καλεῖται συνεργος, δεικνύων, ποσάκις ληπτέα ἡ μετ᾿ αὐ... ποσότης, ἢ διὰ τίνος πολλαπλασιασέα· π. χ. 14γ. ἐνταῦθα ὁ 14 λέγεται συνεργὸς τοῦ γ· ἐὰν δὲ τὸ γράμμα οὐδένα ἀριθμὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἔχῃ, ὡς τούτου συνεργὸς ἡ μονὰς ὑπονοεῖται· ὡς γ· ἔνθα συνεργὸς τοῦ γ ἐςὶν ἡ μονὰς, καίτοι ἐνεργείᾳ μὴ παροῦσα· τοιοῦτοι συνεργοὶ ἔνεισι τοῖς γράμμασιν ἐν ἅπασι τοῖς εἴδεσι τῶν ὑπολογισμῶν (προσθέσει, ἀφαιρέσει, κτ·)

Σχόλιον.

Ὅταν τὰ αὐτὰ γράμματα, ὧν τὰ σημεῖα εἶναι ἐναντία, ἔχουν ἀνίσους συνεργοὺς, τὸ ἔχον τὸν μικρότερον συνεργὸν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ τὸν μείζονα ἔχοντος, καὶ τὸ λείψανον εἶναι τὸ κεφάλαιον· ὡς $+ 4\alpha - 3\alpha = + 1\alpha = + \alpha$ (§. ἀνωτ.)· ὅταν δὲ καὶ οἱ συνεργοὶ ἦναι ἴσοι ἀλλήλοις, τότε ἀφαιρούμενον τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου οὐδὲν ὑπολείπει· ὡς $+ 4\alpha - 4\alpha = 0$· (§. 37.)

§. 48. Προκείσθωσαν ἤδη καίτινα ἀξιώματα, οὐ μικρὰν ἡμῖν ἐν τοῖς ἑξῆς οἴσοντα τὴν ὄνησιν.

α΄. Ἐὰν δύω ποσότητες ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ ταύταις ἕτεραι δύω ἴσαι ἀλλήλαις ποσότητες προσεθῶσι, τὰ προκύπτοντα κεφάλαια ἔσονται ἴσα· π. χ. $4 = 4$, αἱ δύω αὗται ποσότητες εἰσὶν ἴσαι· $6 = 6$· καὶ αὗται ἴσαι ἀλλήλαις· ἔςαι οὖν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ... Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

$$\begin{array}{rcl} 4 & = & 4 \\ 6 & = & 6 \\ \hline 10 & = & 10 \end{array}$$

καὶ τὰ κεφάλαια $10 = 10$ ἴσα ἀλλήλοις· καὶ ἐν γράμμασιν ἐν γένει·

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \alpha \\ \beta & = & \beta \\ \hline \alpha + \beta & = & \alpha + \beta. \end{array}$$

τοῦτο δὲ ἀληθεύσει, καὶ ἐὰν τὸ β ἴσον 4 π. χ. τεθῇ.

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \alpha \\ \beta & = & 4 \\ \hline \alpha + \beta & = & \alpha + 4. \end{array}$$ ὅ ῥάδιον συνιδεῖν.

β΄· Ἐὰν δύω ποσότητες ἄνισοι ὦσι, καὶ τῇ μείζονι τὸ αὐτὸ προςεθῇ, ὅ καὶ τῇ ἐλάσσονι, ἔςαι τὸ πρῶτον κεφάλαιον μεῖζον τοῦ δευτέρου. π. χ.

$$\begin{array}{rcl} 5 & \text{μεῖζον} & 3 \\ 6 & = & 6 \\ \hline 5 + 6 & \text{μεῖζον τοῦ} & 3 + 6. \end{array}$$ ἢ ἐν γράμμασιν.

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \text{μεῖζον τοῦ} & \beta \\ \gamma & = & \gamma \\ \hline \alpha + \gamma & \text{μεῖζον τοῦ} & \beta + \gamma. \end{array}$$

Σχόλιον.

Οἱ Μαθηματικοὶ μεταχειρίζονται τὸ σημεῖον $>$, θέλοντες νὰ δείξουν, ὅτι ἡ πρὸ τούτου ποσότης εἶναι μείζων τῆς μετὰ τοῦτο, καὶ τὸ $<$, τὸ ὁποῖον δεικνύει ἐλάττονα τὴν πρὸ ἀυτοῦ τῆς μετ᾽ αὐτό· π᾽ χ᾽ ἐπειδὴ ὁ 5 μείζων τοῦ 3, γράψον οὕτω· $5 > 3$· καὶ ὁ 3 ἐλάττων τοῦ 6 οὕτω· $3 < 6$. $\alpha > \beta$. καὶ $\alpha < \varepsilon$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.Π.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

γ· Ἐὰν δύω ποσότητες ἄνισοι ὦσι, καὶ τῇ μείζονι μείζων ποσότης προςεθῇ, τῇ δ' ἐλάσσονι ἐλάσσων, τὸ τῆς μείζονος κεφάλαιον ἔςαι πολλῷ μεῖζον τοῦ τῆς ἐλάσσονος· π. χ·

$$\begin{array}{l} 5 > 4 \\ 4 > 3 \\ \hline 4 + 5 > 4 + 3. \end{array}$$ καὶ ἐν γράμμασι

$$\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \\ \hline \alpha + \gamma > \beta + \delta. \end{array}$$

δ· Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα· $\alpha = \gamma \cdot\ \beta = \gamma \cdot$ ἄρα $\alpha = \beta$. $4 = 2 + 2 \cdot\ 3 + 1 = 2 + 2$. ὥςε καὶ $4 = 3 + 1$.

Περὶ ἀφαιρέσεως τῶν καταφατικῶν, καὶ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν.

§. 49. Ἀφαίρεσις ἐςὶν ἐκ τοῦ δοθέντος κεφαλαίου δύω ἀριθμῶν, καὶ τοῦ ἑτέρου τούτων τὸν ἕτερον εὑρεῖν (§. 27.) τὸν δ' ἕτερον, ἤτοι τὸν εὑρεθέντα οὕτως ἔχειν χρὴ, ὥςε τῷ δοθέντι ἀριθμῷ προςεθέντα τὸ δοθὲν κεφάλαιον ἀποτελεῖν

ἔνθεν τοι ἐὰν $+\alpha$) τὸ δοθὲν κεφ. ἢ
$+\beta$) ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς
ἔςαι $+\alpha - \beta$ ἡ τούτων διαφορά.

Καὶ γὰρ $+\alpha - \beta$ τῷ $+\beta$ προςεθὲν δώσει $+\alpha - \beta + \beta = +\alpha$ (§. 37.)

καὶ $+\alpha$
$-\beta$
ἡ διαφ. $+\alpha + \beta$.

ὅτι $+\alpha + \beta$ τῷ $-\beta$ προςεθὲν παρέξει $+\alpha + \beta - \beta = +\alpha$ (§. αὐτ.)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

καὶ $\begin{array}{r} -\ \alpha \\ +\ \beta \\ \hline -\alpha-\beta \end{array}$ ὅτι τοῦ $-\alpha-\beta$ τῷ $+\beta$ προςεθέντος, ἔςαι $-\alpha-\beta+\beta=-\alpha$ (§. αὐτ.)

καὶ $\begin{array}{r} -\ \alpha \\ -\ \beta \\ \hline -\alpha+\beta \end{array}$ ὅτι $-\alpha+\beta$ τῷ $-\beta$ προςεθὲν δώσει $-\alpha+\beta-\beta=-\alpha$ (§. αὐτ.)

Εὑρίσκομεν τοίνυν τὴν διαφορὰν, ἐὰν τὸ δοθὲν κεφάλαιον μετὰ τοῦ κατ' αὐτὸ σημείου, τὸν δὲ δοθέντα ἀριθμὸν μετ' ἐναντίως ἔχοντος ἐκείνῳ σημείου ἐφεξῆς γράφωμεν.

ἔςω 7 τὸ δοθὲν κεφ.
12 ὁ δ. ἀρ.

καὶ $7-12=-5$ ἔςαι ἡ τούτων διαφορά.

Ὅτι -5 τῷ $+12$ προςεθὲν δώσει $12-5=+7$ (§. 40. σχ. β'.)

Σχόλιον.

Οὕτω συμβαίνει καὶ εἰς τὰ λοιπὰ τρία παραδείγματα τὰ διὰ γραμμάτων, ἂν ἀντὶ τῶν γραμμάτων λάβωμεν ἀριθμούς·

Ἕτερον παράδειγμα·

$5\alpha+2\beta-5\gamma$ τὸ δοθὲν κεφ.
$9\alpha-5\beta+7\gamma$ ὁ δ. ἀρ.

$5\alpha-9\alpha+2\beta+5\beta-5\gamma-7\gamma=-4\alpha+7\beta-12\gamma$ (§. 45.) ἡ τούτων διαφορά.

§. 49.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ Π. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ τη. Κ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

§. 50. Ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσις ἡ διὰ γραμμάτων ἐν τούτῳ μόνον συνίσταται, ἐν τῷ τὸ μὲν δοθὲν κεφάλαιον μετὰ τοῦ κατ' αὐτὸ σημείου, τὸν δὲ δοθέντα ἀριθμὸν τῷ ἐναντίῳ σημείῳ καταγράφειν (§. ἀνωτ.) ῥάδιον συνιδεῖν, ὅτι κἀνταῦθα, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς προσθέσεως, ἐπιτεμεῖν δυνάμεθα, εἰ μόνον τὰ σημεῖα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἰς τὰ ἐναντία τρέψαιμεν· οὕτως ἐν τῷ προτέρῳ παραδείγματι

$$\begin{array}{rl} 5\alpha + 2\beta - 5\gamma & \text{τὸ δ. κ.} \\ 9\alpha - 5\beta + 7\gamma & \text{ὁ δ. ἀρ.} \\ \hline -4\alpha + 7\beta - 12\gamma & \text{ἡ διαφ.} \end{array}$$

Αὐτίκα ἐν τῇ διαφορᾷ τὸ ἐπιτομώτατον ἀναφανήσεται σχῆμα, λέγουσι $+5\alpha - 9\alpha$ δίδωσι -4α· $+2\beta + 5\beta$ δίδωσι $+7\beta$· καὶ $-5\gamma - 7\gamma$, δ. -12γ·

ἔσω

$$\begin{array}{rl} 12\alpha - 3\beta + 7\gamma - 13\delta - 5\varepsilon & \text{τὸ δ. κ.} \\ -4\alpha - 7\beta + 3\gamma - 8\delta + 9\varepsilon & \text{ὁ δ. ἀρ.} \\ \hline 16\alpha + 4\beta + 4\gamma - 5\delta - 14\varepsilon & \text{ἡ δ.} \end{array}$$

Ὅτι $12\alpha + 4\alpha = 16\alpha$· $-3\beta + 7\beta = 4\beta$· $+7\gamma - 3\gamma = 4\gamma$· $-13\delta + 8\delta = -5\delta$· καὶ $-5\varepsilon - 9\varepsilon = -14\varepsilon$.

Σχόλιον.

Ὅταν ἀπό τινος μέρους τοῦ Μειωτέου δὲν ἔχωμεν νὰ ἀφέλωμεν μέρος τι τοῦ Ἀφαιρετέου, προσαριθμεῖται καὶ ἐκεῖνο ἀμετάβλητον ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῇ διαφορᾷ μὲ τὸ σημεῖόν του· ὡς

$$\begin{array}{rrrrr} 4\alpha & + & 2\beta & + & 5\gamma \\ 3\alpha & + & \beta & & \\ \hline +\alpha & + & \beta & + & 5\gamma \end{array}$$

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

§. 51. Συμβαίνει δ' ἐνίοτε ταῖς ἁπλαῖς ποσότησιν, ὡς καὶ ταῖς συνθέτοις διὰ γραμμάτων παριςαμέναις τὸ μὴ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖσθαι ἔχειν διὰ τὸ ἀνομοιοειδές· ἡ ἀφαίρεσις τούτων δείκνυται μόνον, ἐπ' ἐκείνων μὲν, μεταβαλλομένου τοῦ σημείου τῆς ἀφαιρεθησομένης ποσότητος εἰς τὸ ἐναντίον, ὡς

$$\begin{array}{l} +\beta \\ +\varepsilon \\ \hline \beta - \varepsilon \end{array}$$

ἐπὶ τούτων δὲ, ἐν παρενθέσει ἐναπολαμβανομένων τοῦ τε μειωτέου, καὶ ἀφαιρετέου χωρίς, καὶ τοῦ τῆς ἀφαιρέσεως σημείου παρεντιθεμένου· ὡς εἰ δέοι ἀπὸ τοῦ $4\alpha - 3\beta + 2\gamma$ ἀφαιρεθῆναι τὸ $7\zeta + \chi - \psi$, ἔςαι $(4\alpha - 3\beta + 2\gamma) - (7\zeta + \chi - \psi)$.

Σχόλιον. α'.

Τὰς ποσότητας, ὁποῦ εἶναι κεκλεισμέναι ἐν τῇ παρενθέσει πρῶτον τὰς προςίθεμεν ἀλλήλαις ἐν ἑκατέρῳ σχήματι χωρὶς, καὶ εἶτα τὰς ἀφαιροῦμεν· τὸ ὁποῖον γίνεται τότε, ὅταν αἱ ποσότητες ἦναι ἀριθμοὶ, ἢ ὅταν τὰ γράμματα διορισθῶσι· π. χ. ἔςω $\alpha = 3$· $\beta = 2$· $\gamma = 5$· $\zeta = 0$· $\chi = 7$· $\psi = 1$· ἔςαι οὖν $4\alpha = 12$ (§. 47.) $3\beta = 6$, κτ. ὥςε $(4\alpha - 3\beta + 2\gamma) - (7\zeta + \chi - \psi) = (12 - 6 + 10 - (42 + 7 - 1) = 16 - 48 = - 32$. (§. 40. σχ. β'.)

Σχόλιον β'.

Ἡ βάσανος ἐν τῇ τῶν γραμμάτων ἀφαιρέσει γίνεται παραπλησίως, ὡς καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς· ἤτοι μὲ το νὰ προςιθῆται ἡ διαφορὰ τῷ ἀφαιρετέῳ (§. 31.) διότι οὕτω προκύπτει πάλιν ὁ Μειωτέος.

Ε.Υ. Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

§. 52.

Ἐὰν ἀπό τινος ἀριθμοῦ, π. χ. ἀπὸ τοῦ 6 διηνεκῶς ἡ 1 ἀφαιρῆται, αἱ διαφοραὶ ἀποδοθήσονται κατὰ τὸ (§. 49.) οὕτω·

1 ἀπὸ τοῦ 6 ὑπολείπει	$6 - 1 = 5$	(§. 40. σχ. β΄.)
1 ἀπὸ τοῦ 5 - -	$5 - 1 = 4$	
1 ἀπὸ τοῦ 4 - -	$4 - 1 = 3$	
1 ἀπὸ τοῦ 3 - -	$3 - 1 = 2$	
1 ἀπὸ τοῦ 2 - -	$2 - 1 = 1$	
1 ἀπὸ τοῦ 1 - -	$1 - 1 = 0$	
1 ἀπὸ τοῦ 0 - -	$0 - 1 = -1$	
1 ἀπὸ τοῦ -1 - -	$-1 - 1 = -2$	
1 ἀπὸ τοῦ -2 - -	$-2 - 1 = -3$	
1 ἀπὸ τοῦ -3 - -	$-3 - 1 = -4$	
1 ἀπὸ τοῦ -4 - -	$-4 - 1 = -5$	

Ἐὰν οὖν ἀφ' οὑτινοσοῦν ἀριθμοῦ, ὡς ἐνταῦθα ἀπὸ τοῦ 6, διηνεκῶς 1 ἀφαιρῶμεν, ὁ ἀριθμὸς ἀπομειοῦται διηνεκῶς· καὶ ἀφαιρεθεισῶν τοσούτων μονάδων, ὅσας αὐτὸς περιέχει, ἐξισωθήσεται τῷ 0. προαγομένης δὲ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς 1, γενήσεται ἴσος -1, -2, -3, -4, -5, -6 κτ.

Ὁ ἀποφατικὸς ἄρα ἀριθμὸς ἐςὶν ἐλάττων τοῦ μηδενὸς, καὶ τοσούτῳ ἐλάττων, ὅσῳ πλείους ἀποφατικὰς μονάδας ἐν ἑαυτῷ περιέχει.

Σχόλιον. α΄

Ἡ αἰτία, δι' ἣν αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες εἶναι ἐλάττους τοῦ μηδενὸς εἶναι προφανής· ἐάν τις οὐδεμίαν περιουσίαν ἔχῃ, καὶ πρὸς τούτοις εἶναι καὶ χρεώςης π. χ. 100. δραχμῶν, οὗτος τῷ ὄντι ἔχει ὀλιγώτερον ἀπὸ ἐκεῖνον ὁποῦ δὲν ἔχει μὲν τίποτε, δὲν εἶναι ὅμως χρεώςης· ὅθεν τὸ, ἐλάττων τοῦ μηδενὸς, λαμβάνεβάνεται σχετικῶς· διότι ἂν αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες δὲν ἀναφέρωνται εἰς τὰς θετικὰς, εἶναι μείζους τοῦ μηδενὸς, καὶ τῷ ὄντι ποσότητες, ὡς καὶ αἱ θετικαί.

β'.

Κάθε μείζων ἀριθμὸς, καθ' ἑαυτὸν θεωρούμενος, ὑπερέχει τὸν ἐγγὺς ἐλάττονα· ὡς ὁ 5 τὸν 4, ὁ 4 τὸν 3, κτ' ἀποβλέποντες ὅμως εἰς τὸ πρὸ αὐτοῦ ἀποφατικὸν σημεῖον —, τόσον μικρότερον θέλομεν τὸν ὀνομάσει, ὅσῳ μεγαλήτερος εἶναι φυσικά· ὡς ὁ $-2 < -1$· $-5 < -4$· τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διὰ τῶν δραχμῶν σαφηνίζει ἱκανῶς τὸ λεγόμενον·

Ἀξιώματα.

§. 53. α'. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἔσαι ἴσα.

$$\begin{array}{l} 8 = 8 \\ \underline{2 = 2} \quad \text{ἀφαιρ.} \\ 6 = 6 \quad \text{τὰ λείψανα ἴσα· ἢ } 8 - 2 \end{array}$$

$= 8 - 2$.

ἐν γράμμασι
$$\begin{array}{c} \alpha = \varrho \\ \underline{\gamma = \delta} \\ \alpha - \gamma = \varrho - \delta \end{array}$$

β'. Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφέλῃς, τὸ λείψανον τῆς μείζονος ποσότητος ἔσαι μεῖζον τοῦ λειψάνου τῆς ἐλάττονος·

$$\begin{array}{c} 10 > 8 \\ \underline{5 = 5 \quad \text{ἀφ.}} \\ 10 - 5 > 8 - 5 \end{array} \quad \text{καὶ} \quad \begin{array}{c} \alpha > \beta \\ \underline{\gamma = \gamma} \\ \alpha - \gamma > \beta - \gamma \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{c} \alpha > \beta \\ \underline{\gamma = \delta} \\ \alpha - \gamma > \beta - \delta \end{array}$$

γ'. Ἐὰν δύω ποσότητες ἴσαι ὦσι, καὶ ἀπὸ τῆς α' ἀφέλῃς ποσότητά τινα μείζονα, ἢ ἀπὸ τῆς β'. τὸ τῆς

τῆς α΄· λεῖψανον ἔςαι ἔλαττον τοῦ λειψάνου τῆς β΄·

$$\begin{array}{ccc} 12 & = & 12 \\ 5 & > & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \alpha & = & \alpha \\ \beta & > & \gamma \\ \hline \end{array}$$

$$12 - 5 < 12 - 3 \text{ ἢ } 7 < 9 \qquad \alpha - \beta < \alpha - \gamma$$

$$\text{ἢ} \quad \begin{array}{ccc} \alpha & = & \beta \\ \gamma & > & \delta \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha - \gamma < \beta - \delta.$$

§. 54. Ὅσα περὶ τῆς προσθέσεως (§. 21. κτ.) εἴρηται, κρατοῦσι διὰ παντὸς, εἴτε ἴσοι, εἴτε ἄνισοι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶεν· ἐὰν ὦσιν ἴσοι, ὡς ἐν τῷδε τῷ παραδείγμ.

$$\begin{array}{r l} 3212 & \\ 3212 & \\ 3212 & \text{οἱ δ. ἀρ.} \\ 3212 & \\ \hline 12848 & \text{τὸ τούτων κεφάλ.} \end{array}$$

συντομώτερον τὴν πρᾶξιν ποιήσομεν, ἐὰν τοῦ ἀριθμοῦ 3212 ἅπαξ καταγραφέντος, αἱ τούτου μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, καὶ ὅλως ἅπαντα τὰ τούτου μέρη τοσάκις λαμβάνωνται, ὁσάκις τοῦτον γράψαι ἔδει, λέγουσι·

$$\begin{array}{cccc} 4\text{: κις} & 2 & = & 8 \\ 4\text{: κις} & 1 & = & 4 \end{array} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{cccc} 4\text{: κις} & 2 & = & 8 \\ 4\text{: κις} & 3 & = & 12 \end{array}$$

Ὅπως οὖν ἐπὶ τῶν τοιούτων εἰς ἔργον χωρητέον, μαθησόμεθα ἤδη·

ΠΕΡΙ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
ΕΚΔ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006