Εἰ δ' ἡ τοιαύτη Ἐξίσ. $\chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ διὰ τοῦ δ πολλαπλασιασθῇ, εἴη ἂν

$$\delta\chi = \psi. \text{ Ὥςε } \chi = \frac{\psi}{\delta}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ἄρα } \chi^3 & = & + \frac{\psi^3}{\delta^3} \\ + \alpha\chi^2 & = & + \frac{\alpha\psi^2}{\delta^2} \\ + \beta\chi & = & + \frac{\beta\psi}{\delta} \\ + \gamma & = & + \gamma \\ \hline o & = & \frac{\psi^3}{\delta^3} + \frac{\alpha\psi^2}{\delta^2} + \frac{\beta\psi}{\delta} + \gamma \end{array}$$

Ἐὰν δὲ τῆς Ἐξισ. ταύτης πάντας τοὺς ὅρους τῷ δ^3 πολλαπλασιάσωμεν,

$$o = \frac{\psi^3}{\delta^3} + \frac{\alpha\psi^2}{\delta^2} + \frac{\beta\psi}{\delta} + \gamma$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \;.\; \delta^3$$

ἔςαι $o = \psi^3 + \delta\alpha\psi^2 + \delta^2\beta\psi + \delta^3\gamma.$

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι, εἰ ἡ ῥίζα τῆς Ἐξισώσ. ἐπίτινα δοθέντα πολλαπλασιασθῆναι πρόκειται ἀριθμὸν, καὶ οὕτω χωρεῖν δυνάμεθα, τουτ. ἕκαςον ὅρον τῆς Ἐξισ. ἐπὶ τὰς δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζειν, ἐκ Γεωμετρικῆς ἀναφυομένας Προόδου, ἧς ὁ α'. ὅρος $=$ 1, ὁ β'. ὁ ἀριθμός. ὁ γ'. ὁ τούτου Τετράγωνος. ὁ δ'. ὁ τούτου Κύβος, κτ π. χ. εἰ πρόκειται πολλαπλασιάσαι τὴν ῥίζαν τῆς εἰς τὸ o ἀχθείσης Ἐξισ. $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$ ἐπὶ τὸν 2, ποιήσομεν τοῦτο, ὑποθέντες ὑπὸ τοὺς ὅρους Γεωμ. Προόδου, ἧς ὁ α'. ὅρος 1, οἱ δὲ λοιποὶ αἱ δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ 2, καὶ ἕκαςον

κασον ὅρου τῆς Ἐξισ. τῷ ὑπ' αὐτὸν κειμένῳ τῆς προόδου ὅρῳ πολλαπλασιάσαντες. Ὥςε, εἰ $2\chi = \psi$, οὕτω καταγράψομεν τὴν Ἐξίσωσιν

$$\psi^3 - 7\psi^2 + 7\psi + 15 = 0$$

1, 2, 4, 8. Γεωμ. πρόοδος

πολλαπ. τοὺς ——— τῶν δυν. τοῦ 2

ὅρ. τῆς Ἐξ. $\psi^3 - 14\psi^2 + 28\psi + 120 = 0$

μετὰ τούτων

Τῷ αὐτῷ τρόπῳ τρέπομεν τὰς Ἐξισ. καὶ διὰ τῆς Διαιρέσεως. Τραπήτω αὖθις ἡ αὐτὴ Ἐξίσ. $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$. Ὥςε, ἐπεὶ $\frac{\chi}{2} = \psi$, ἔςιν ἄρα $\chi = 2\psi$

Γενέσθω ἤδη ἀντικατάςασις

$$\begin{array}{rcl}
\chi^3 = (2\psi)^3 & = & 8\psi^3 \\
-7\chi^2 = (2\psi)^2 \cdot -7 & = & -28\psi^2 \\
+7\chi = (2\psi) \cdot 7 & = & +14\psi \\
+15 = & & +15 \\
\hline
0 & & 8\psi^3 - 28\psi^2 + 14\psi + 15
\end{array}$$

Καὶ ἐν γένει $\chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$. Ἐὰν $\frac{\chi}{\delta} = \psi$ τεθῇ, ἔςαι $\chi = \delta\psi$. Ὥςε ἀντικατςάντος, ἔςαι

$$\begin{array}{rcl}
\chi^3 = (\delta\psi)^3 & = & +\delta^3\psi^3 \\
+\alpha\chi^2 = (\delta\psi)^2\alpha & & +\delta^2\psi^2\alpha \\
+\beta\chi = (\delta\psi)\beta & & +\delta\psi\beta \\
+\gamma = & & +\gamma \\
\hline
0 & = & \delta^3\psi^3 + \delta^2\psi^2\alpha + \delta\psi\beta + \gamma
\end{array}$$

Ἐνταῦθα γίνεται τὸ ἀνάπαλιν τῆς προτέρας πράξεως. Ἤτοι, τῆς Γεωμετρ. Σειρᾶς ἀνας ραφείσης, καὶ ὑπὸ μὲν

μὲν τὸν ἔσχατον ὅρον τῆς ι τεθείσης, ὑπὸ δὲ τοὺς λοιποὺς τῶν δυνάμεων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἐφεξῆς ἀνάπαλιν, καὶ τῶν ὅρων τῆς Ἐξισ. ταύταις πολλαπλασιασθέντων, τελέσομεν τὸ αὐτό.

Ληφθήτω ἡ αὐτὴ Ἐξισ. ἔνθα χ διὰ δ προὔκειτο διαιρεθῆναι, ἤτοι $\frac{\chi}{\delta} = \psi$. καὶ $\chi = \psi\delta$.

Καταγραφείσης οὖν τῆς Ἐξισ. καὶ ἀντὶ τοῦ χ τοῦ ψ ἀντικαταςάντος ἐν τῇ αὐτῇ δυνάμει, ἔςαι τὸ σχῆμα

$$\begin{array}{cccc} \psi^3 + & \alpha\psi^2 + & \beta\psi + & \gamma \\ \delta^3, & \delta^2, & \delta, & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\delta^3\psi^3 + \delta^2\alpha\psi^2 + \delta\beta\psi + \gamma.$$

Ὥςε, εἰ δέοι Ἐξίσωσίντινα διὰ τῆς Διαιρέσεως τρέψαι, ἀντικατάςησον τοῦ χ τὸ ψ. καὶ ὑπογράψας ὑπὸ τὸ ψ τὸν ἀριθμὸν, δἰ οὗ τὸ χ διαιρεθῆναι πρόκειται, ἐν σειρᾷ δυνάμεων ἀνάπαλιν, ἀπὸ μονάδος ἀρχομένη, καὶ ἐφ' ἑκάςου ὅρου μιᾷ δυνάμει αὐξομένη, πολλαπλασίασον ἐπὶ ταύτην τοὺς τῆς Ἐξισ. ὅρους. π. χ. $\chi^3 + 2\chi^2 + \chi - 12 = 0$. Ἔςω ἡ Ἐξισ. αὕτη μεταβλητέα διὰ τῆς Διαιρέσεως. καὶ $\frac{\chi}{2} = \psi$. Ὥςε $\chi = 2\psi$. Λαβὲ οὖν ἀντὶ τοῦ χ τὸ ψ ἐν τῇ αὐτῇ δυνάμει, καὶ ὑπόγραψον τὴν σειράν. Ἤτοι

$$\begin{array}{cccc} \psi^3 + & 2\psi^2 + & \psi - & 12 = 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$8\psi^3 + 8\psi^2 + 2\psi - 12 = 0$$

Εἰ δὲ τύχοι ἔντινι Ἐξισώσει τοῦτον, ἢ ἐκεῖνον τὸν ὅρον ἀπεῖναι, ὁ τούτου τόπος ἀςερίσκῳ χαρακτηρίζεται, εἰς σημεῖον τῆς τοῦ ὅρου ἀπουσίας. Ἀλλ' ἐν

τῇ

τῇ τῆς Ἐξισώσεως διὰ τοῦ Πολλ. ἢ τῆς Διαιρ. μεταβολῇ, ἀναγκαῖον ὑπὸ τὸν ἀπόντα ὅρον τῆς Ἐξ. τὸν προσήκοντα ὅρον τῆς ὑπ' αὐτὴν Γεωμ. καταγράφεσθαι Προόδου, καίτοι τῷ ἐπ' αὐτὸν ὅρῳ πολλαπλασιασθῆναι μὴ ἔχοντα, ὡς ο, ἢ μηδὲν ὄντα. Ὅθεν οὐδὲ παραγόμενον ὑπὸ τὴν γραμμὴν προκύπτει. Οἷον, εἰ δέοι τὴν Ἐξισ. $\chi^3 + 3\chi - 6 = 0$. τῷ Πολλαπλ. ἐπὶ τὸν 3 μεταβληθῆναι, ὥςε $3\chi = \psi$, ἔνθεντοι καὶ $\frac{\psi}{3} = \chi$ εἶναι, ἀποδεθείη οὕτω

$$\begin{array}{l} \psi^3 \; * \; + \; 3\psi \; - \; 6 \; = \; 0 \\ 1, \quad 3, \quad 9, \quad 27 \\ \hline \psi^3 \; * \; + \; 27\psi \; - \; 162 \; = \; 0 \end{array}$$

Καὶ ἐὰν ἐν τῇ αὐτῇ Ἐξισ. $\frac{\chi}{3} = \psi$ εἴη, ὥςε καὶ $\chi = 3\psi$, καὶ οὕτω.

$$\begin{array}{l} \psi^3 \; * \; + \; 3\psi \; - \; 6 \; = \; 0 \\ 27, \quad 9, \quad 3, \quad 1 \\ \hline 27\psi^3 * + 9\psi - 6 = 0 \end{array}$$

Τὸ δὲ ψ^3 μονωθήσεται, εἰ διὰ τοῦ κατ' αὐτὸ συνεργοῦ πάντες οἱ τῆς Ἐξισώσεως διαιροῦνται ὅροι, οὕτω. $\psi^3 * + \frac{9\psi}{27} - \frac{6}{27} = \psi^3 * + \frac{\psi}{3} - \frac{2}{9}$. Ἢ ἐὰν ἐν γένει ἡ Ἐξίσ. ἢ

$$\frac{\delta^3\psi^3 + \delta^2\alpha\psi^2 + \delta\beta\psi + \gamma = 0}{\frac{\psi^3}{1} + \frac{\alpha\psi^2}{\delta} + \frac{\beta\psi}{\delta^2} + \frac{\gamma}{\delta^3}}$$ διὰ δ^3 διαιρεθεῖσα ἕξει

Οὕτως

Οὕτως εἰώθασι καὶ τὰς διὰ τῆς διαιρέσεως μεταβληθείσας Ἐξισώσεις παριςᾶν.

§. 403. Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἐὰν ἐπίτινος Ἐξισ. καὶ κλάσματα παρῇ, ἀπαλλάξαι τούτων δυνάμεθα τῷ πολλαπλ. (§. ἀνωτ.) Τουτέςι, ζητήσομεν ποσότητα, ἥτις ὁ κοινὸς τυγχάνει παράγων ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν τῶν κλασμάτων, τῶν τῇ Ἐξισ. παρόντων, ὡς συνεργῷ τοῦ χ ταύτῃ χρησάμενοι. π. χ. $a\chi$ Τὸ δὲ $a\chi = \psi$ θήσομεν Ὥςε καὶ $\chi = \frac{\psi}{a}$. τούτου ἐν τῇ ἐξισ. ἀντικαταςάντος, προκύψει καινὴ Ἐξίσ. ἥτινι οὐδὲν ὑπάρχει κλάσμα. Ἀλλὰ τοιοῦτον παράγοντα αἱρετέον, ὥςε, εἰ τὸ καινὸν $\frac{\psi}{a}$ εἰς τὴν ὑπερτάτην ἐξήρθη δύναμιν, καὶ ὑπὸ τὸ ψ τὸν ὑπέρτατον παρονομαςὴν ἁπάντων τῶν ὅρων τῆς Ἐξισ. εἰς τὴν ὑπερτάτην δύναμιν ἠρμένον, ὑποτίθεσθαι. Οὕτω γὰρ εἶτα τῷ τῶν ὅρων πολλαπλ. ἐπὶ ταύτην τὴν ποσότ. τὰ κλάσματα πάντα δυνατὸν ἀποσκευάσασθαι. Ἐὰν δὲ οἱ παρονομαςαὶ τῶν κλασμάτων οὐδένα κοινὸν ἔχωσι παράγοντα, τίθεται ὡς τοῦ χ συνεργὸς τὸ παραγόμ. ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν. ὡς ἐν τῇ Ἐξισώσει.

$\chi^3 - \frac{3}{4}\chi^2 + \frac{3}{16}\chi + 20 = 0$, ἐν ᾗ ὁ κοινὸς παράγων τοῦ παρονομαςοῦ, ὅντις παραλαβεῖν ἔχοι, $= 4$. Ὥςε τεθήτω $4\chi = \psi$. Ὥςε $\chi = \frac{\psi}{4}$. Ἡ δὲ καινὴ Ἐξίσ. ἐςὶ

$\chi^3 =$

$$\begin{aligned}
\chi^3 &= \frac{\psi^3}{64}\\
-\tfrac{3}{4}\chi^2 &= -\frac{3\psi^2}{64}\\
+\tfrac{3}{16}\chi &= +\frac{3\psi}{64}\\
{*}\ 20 &= {*}\ 20
\end{aligned}$$

$$o = \frac{\psi^3}{64} - \frac{3\psi^2}{64} + \frac{3\psi}{64} + 20$$

πολλαπλ. ἐπὶ $64.o = \psi^3 - 3\psi^2 + 3\psi + 1280.$

Εἰ αὕτη πρόκειται ἡ Ἐξίσ. $\chi^3 - 3\chi^2 + \frac{11}{4}\chi - \frac{3}{4} = o$. Τεθήτω $2\chi = \psi$. ὁ γὰρ 2 ὁ γενικός ἐςι παράγων ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν τῶν κλασμάτων ἐν ταύτῃ τῇ Ἐξισ. ὥςε $\chi = \frac{\psi}{2}$. Ἀντικαταςήτω ἤδη

$$\begin{aligned}
\chi^3 &= \frac{\psi^3}{8}\\
-3\chi^2 &= -\frac{3\psi^2}{4}\\
+\tfrac{11}{4}\chi &= +\frac{11\psi}{8}\\
-\tfrac{3}{4} &= -\tfrac{3}{4}
\end{aligned}$$

ὥςε $o = \frac{\psi^3}{8} - \frac{3\psi^2}{4} + \frac{11\psi}{8} - \frac{3}{4}$

πολλαπλ. τοῦτο ἐπὶ $8.o = \psi^3 - 6\psi^2 + 11\psi - 6.$

Αἱ

Αἱ ῥίζαι τῆς τελευταίας Ἐξισώσ. εἰσὶ $\psi = + 1.$ $\psi = + 2.$ $\psi = + 3$ Καὶ ἐπεὶ $\chi = \frac{\psi}{2}$, ἔςιν ἄρα $\chi = \frac{1}{2}.$ $\chi = 1,$ $\chi = \frac{3}{2}.$

Καὶ ἐν γένει. $\chi^3 + \frac{\alpha\chi^2}{\beta} + \frac{\gamma\chi}{\delta} + \frac{\gamma}{\zeta} = 0.$ καὶ τῶν παρονομαςῶν τῶν κλασμάτων παρὰ τῷ χ τεθέντων, ἢ $\beta\delta\zeta \cdot \chi = \psi$, ἔςαι $\chi = \frac{\psi}{\beta\delta\zeta}$

$$\begin{aligned} \text{ἄρα}\quad \chi^3 &= +\frac{\psi^3}{\beta^3\delta^3\zeta^3} \\ +\alpha\chi^2 &= +\frac{\alpha\psi^2}{\beta^2\delta^2\zeta^2} \\ +\frac{\gamma\chi}{\delta} &= +\frac{\gamma\psi}{\beta\delta^2\zeta} - \\ +\frac{\varepsilon}{\zeta} &= +\frac{\varepsilon}{\zeta} \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\psi^3}{\beta^3\delta^3\zeta^3} + \frac{\alpha\psi^2}{\beta^2\delta^2\zeta^2} + \frac{\gamma\psi}{\beta\delta^2\zeta} + \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

πολλαπλ. ἐπὶ $\beta^3\delta^3\zeta^3$ $0 = \psi^3 + \alpha\delta\zeta\psi^2 + \beta^2\gamma\delta\zeta^2\psi + \beta^3\delta^2\zeta^3\varepsilon$, οἷς οὐδὲν ἔνεςι κλάσμα.

§. 404. Διὰ τῶν τροπῶν τῶν Ἐξισώσεων τῷ Πολλαπλ. ἢ Διαιρέσει, καὶ ἐὰν ἔντινι Ἐξισ. τῶν συνεργῶν τινὲς τῶν Ποσοτήτων ἄλογοι ὦσι, διὰ τούτου ἤτοι πάντες, ἢ τινὲς λογικοὶ γενέσθαι δύνανται. Ὡς ἐν τῇδε τῇ Ἐξισώσει. $\chi^3 + \chi^2\sqrt{5} - 3\chi - 3\sqrt{5} = 0.$

Τεθήτω $\chi\sqrt{5} = \psi.$ Ὥςε $\chi = \frac{\psi}{\sqrt{5}}.$ Διὰ ἀντικαταςάσεως ἔςαι

$\chi^3 =$

$$\chi^3 = \left(\frac{\psi}{\sqrt{5}}\right)^3 = +\frac{\psi^3}{5\sqrt{5}}$$

$$+\chi^2\sqrt{5} = \left(\frac{\psi}{\sqrt{5}}\right)^2 .\sqrt{5} = +\frac{\psi^2\sqrt{5}}{5} = \frac{\psi^2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{\psi^2}{\sqrt{5}}$$

$$-3\chi = \frac{\psi}{\sqrt{5}} . -3 = \qquad -\frac{3\psi}{\sqrt{5}}$$

$$-3\sqrt{5} = \qquad -3\sqrt{5}$$

$$o = \frac{\psi^3}{5\sqrt{5}} + \frac{\psi^2}{\sqrt{5}} - \frac{3\psi}{\sqrt{5}} - 3\sqrt{5}$$

Πλαπλ. ἐπὶ $5\sqrt{5}$

$$o = \psi^3 + 5\psi^2 - 15\psi - 75$$

Τούτου αἱ ῥίζαι ’αἱ δύω, ἀποφατικαὶ, μία δὲ καταφατική, (Τὰ γὰρ αὐτὰ σημεῖα δὶς ἀλλήλοις ἐφέπεται, ἅπαξ δ’ ἐπαμείβεται) ἤτοι -5. Καὶ $+\sqrt{15}$. Καὶ $-\sqrt{15}$. Καὶ ἐπειδὴ $\chi = \frac{\psi}{\sqrt{5}}$, ἔςαι, εἰ ἀντὶ τοῦ ψ τὸ εὑρεθὲν τεθῇ, $\chi = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5} . +\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$. Αὖθις $\chi = +\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = +\sqrt{3}$. Καὶ ἔτι $\chi = -\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{3}$. Αἱ τρεῖς ἄρα τοῦ χ δυνάμεις $-\sqrt{3}$, $+\sqrt{3}$ $-\sqrt{5}$.

§. 405. Ἐὰν ἐπίτινος Ἐξισώσεως ὁ ἔσχατος ὅρος, ἐν ᾧ τὸ παραγόμενον τῶν ῥιζῶν ἐμπεριέχεται, ὅτι μέγας ᾖ, πλείσους ἔχων παράγοντας, λίαν ἐργῶδες πειρωμένοις τὸν παράγοντα εὑρεῖν, δι’ οὗ οἱ τῆς Ἐξισξισ. ὅροι ἀναιροῦνται. ὅς τηνικαῦτα ἡ ῥίζα τυγχάνει. Ἐπινενόηται τοίνυν μέθοδος τὴν Ἐξίσ. εἰς ἑτέραν μεταβάλλειν, ἐλάσσονα τὸν ἔσχατον ἔχουσαν ὅρον, εἰς τοὺς κατ᾽ αὐτὸν παράγοντας ῥᾷον ἀναλυθῆναι δυνάμενον, καὶ τὴν ῥίζαν τῆς Ἐξισ. εὑρεθῆναι. Γίνεται δὲ τοῦτο διὰ τῆς τροπῆς τῆς Ἐξισ. τῇ Προσθέσει, ἢ Ἀφαιρέσει, κατὰ τὰ εἰρημένα. Χρησόμεθα δὲ τῇ ἑτέρᾳ τῶν μεθόδων, ἥπερ ἂν τὰ σημεῖα τῶν ποσοτήτων ἔχοιεν. Κείσθω ἀμέλει, ἀντὶ τοῦ χ ἕτερος κατὰ τὸ δοκοῦν ἀριθμὸς, ὅς ἐν γένει α ῥηθήτω, ἐν τῇ Ἐξισώσει τῷ καταφ ἢ ἀποφ. σημείω. (ἄμφω γὰρ πειρατέον). Καὶ τούτου προϋποτεθέντος, προσεκτέον, τί τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν τῆς Ἐξισ. ὅρων προκύπτον. ἅμα ὑπολογισθέντων. Εἰ γὰρ τεθῇ $\chi = \psi + \alpha$, προκύψει καινὴ Ἐξίσωσις, ἐν ἧ, ὡς τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἐλάσσους ἔχοντος παράγοντας, αἱ τοῦ ψ τιμαὶ ῥᾷον εὑρεθεῖεν, κἀκ τούτων αἱ τοῦ χ ἄμεινον ἂν διορισθεῖεν. Οἷον $\chi^3 + 2\chi^2 - 56\chi - 192 = 0$. Ὁ 192 ἔχει κατατμηθῆναι εἰς πλείους παράγοντας. Ὡς 1, 2, 3, 4, 6, 8, κ.τ. καὶ εἰς τοὺς παράγοντας, τοὺς ἐν μέρει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύω τοιούτων παραγόντων ἀναφυομένους. Ἐὰν οὖν θῶμεν -3 ἀντὶ τοῦ χ, ἀνακύπτει -33, ὅς ἀριθμὸς, πολλῷ ἐλάσσους παράγοντας, ἢ ὁ -192 ἔχει. Ἔςω εἶτα $\chi + 3 = \psi$. ἄρα $\chi = \psi - 3$. καὶ ἀντικατάςησον.

$$
\begin{array}{lr}
\chi^3 = (\psi - 3)^3 = & \psi^3 - 9\psi^2 + 27\psi - 27 \\
+2\chi^2 = (\psi - 3)^2 \cdot + 2 = & +2\psi^2 - 12\psi + 18 \\
-56\chi = (\psi - 3) \cdot - 56 = & -56\psi + 68 \\
-192 = & -192 \\
\hline
0 = & \psi^3 - 7\psi^2 - 41\psi - 33
\end{array}
$$

Τῷ

Τοῦ οὖν -33 ἐλάσσους οἱ παράγοντες τῶν τοῦ -192. Εἰσὶ δὲ 1, 3, 11. Καὶ ἐπειδὴ ἐν τῇ προτεθείσῃ Ἐξισώσει σημεῖα δὶς ἕπεται ἀλλήλοις τὰ αὐτὰ, ἅπαξ δ' ἐπαμείβεται, τῶν ῥιζῶν αἱ μὲν δύω ἀποφατικαὶ, μία δὲ καταφατική. Εἰς ἀπόπειραν ληφθήτωσαν α'. αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ψ τεθῇ ἐν τῇ Ἐξισ. -1, γενήσεται (ἡ Ἐξ.) $= 0$. Ὥςε $\psi = -1$, καὶ $\psi + 1 = 0$. Διαιρεθείσης δὲ τῆς Ἐξισ. διὰ τούτου, εὑρήσομεν $\psi^2 - 8\psi - 33 = 0$. ἥτις ἐπιλυθεῖσα δίδωσι $\psi = +4 \pm 7$. Ὥςε α'. $\psi = +11$. καὶ β'. $\psi = -3$. Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν (ἐπειδὴ $\chi = \psi - 3$) τὰς τιμὰς τοῦ $\chi = -4$. $\chi = +8$. καὶ $\chi = -6$.

Ἕτερον παράδ. Ἔςω ἡ Ἐξίσ. $\chi^3 + 19\chi^2 + 94\chi + 120 = 0$. Κἀνταύτῃ τῷ 120 πλείους ἔνεισιν οἱ παράγοντες. Ἐὰν κατὰ τὸ δοκοῦν ἐν τῇ Ἐξισ. -4 ἀντὶ τοῦ χ ἀντικαταςῇ, προέρχεται -16 (τῶν καταφ. καὶ ἀποφ. ποσοτ. ἀλλήλοις προςεθεισῶν) ἐλάσσους ἔχων τοὺς παράγοντας. Τεθήτω τοίνυν $\chi + 4 = \psi$. ἢ $\chi = \psi - 4$, καὶ ἀντικαταςήτω τοῦ χ τὸ $\psi - 4$.

$$\begin{array}{rcrrrr}
\chi^3 & = & \psi^3 & -12\psi^2 & +48\psi & -64 \\
+19\chi^2 & = & & +19\psi^2 & -152\psi & +304 \\
+94\chi & = & & & +94\psi & -376 \\
+120 & = & & & & +120 \\
\hline
0 & = & \psi^3 & +7\psi^2 & -10\psi & -16
\end{array}$$

Οἱ τοῦ 16 παράγοντες εἰσὶν 1, 2, 4, 8. Ἐὰν ληφθῇ ἀντὶ τοῦ ψ $+1$ καὶ -1, οἱ τῆς Ἐξίσ. ὅροι οὐκ ἀναιροῦνται. Διὰ δὲ τοῦ $+2$ καὶ μάλα. Ἔςιν ἄρα ὁ 2 μία ῥίζα τῆς Ἐξισ. Αἱ δὲ λοιπαὶ δύω εὑρε-

εὑρεθήσονται τῇ Διαιρέσει τῆς Ἐξισ. διὰ $\psi - 2$. Εἰ γὰρ $\psi = 2$, ἔςι καὶ $\psi - 2 = 0$. Δίελε οὖν

$$
\begin{array}{l|l}
\psi - 2)\ \psi^3 + 7\psi^2 - 10\psi - 16 & \psi^2 + 9\psi + 8 \\
\qquad\quad \psi^3 \pm 2\psi^2 & \\
\hline
\qquad\qquad + 9\psi^2 - 10\psi & \\
\qquad\qquad + 9\psi^2 \mp 18\psi & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad + 8\psi - 16 & \\
\qquad\qquad\qquad + 8\psi - 16 &
\end{array}
$$

Ἐπεὶ οὖν $\psi^2 + 9\psi + 8 = 0$ ἔςι καὶ

$$\psi^2 + 9\psi + \tfrac{81}{4} = -8 + \tfrac{81}{4} = \tfrac{49}{4}$$

$$\psi = -\tfrac{9}{2} \pm \tfrac{7}{2}$$

Ὥςε α΄. $\psi = -\frac{16}{2} = -8$ . . καὶ β΄. $= -\frac{2}{2} = - +$ Εὕρηται δὲ καὶ $\psi = 1.\ 2.$ Τὸ δὲ χ ἦν $= \psi - 4$. Ἄρα $\chi = -12$. Καὶ $= -5$. Καὶ $= -2$.

§. 406, Εἴθιςαι δ᾽ ἐν ταῖς Ἐξισ. καὶ τὸν β΄. ὅρον ἐκ μέσου ποεῖν, τὴν ἐπίλυσιν τῆς Ἐξισ. διὰ τῶν παραγόντων ἐξευμαρίζοντας. Ἐν τῷ β΄. ὅρῳ τῆς Ἐξισ. ὡς δεδήλωται, τὸ κεφάλαιον ὑπάρχει τῶν ῥιζῶν. Τὴν οὖν τροπὴν τῆς Ἐξισ. οὕτω περαίνουσιν, ὥςε τὰς ῥίζας ἀναιρεῖν ἀλλήλας διὰ τῆς Προσθέσεως, καὶ τὸ τούτων κεφάλ. $= 0$ γίνεσθαι, ἔςαι ἀεὶ ὁ β΄. ὅρος

ὅρος $= o$, καὶ ἐπομένως ἐκπεσεῖται. Δηλωθήτω ἐν γένει πᾶσα Ἐξίσ. τοῦ γ΄. βαθμοῦ τῷ δε τῷ γενικῷ τύπῳ. $\chi^3 + \pi\chi^2 + \varrho\chi + \sigma = o$. Τῷ π δ' ἐνυπάρχει τὸ κεφάλ. καὶ τῶν τριῶν ῥιζῶν.

Ὅπερ ἀποσκευασθῆναι χρὴ, καὶ εἰς τὸ μηδὲν χωρῆσαι. Ἵνα δὲ τούτου γενικὴν ἔχωμεν τὴν ἔκφρασιν, ἔνθα ὁ β΄. ὅρος ἐκ συμπεπλεγμένης ποσότητος σύγκειται, ὅς $= o$ τεθῆναι δύναται, ἔξω $\chi = \psi + \varepsilon$. Ἔνθεντοι

$$\begin{array}{lcllll}
\chi^3 & = & \psi^3 & + 3\varepsilon\psi^2 & + 3\varepsilon^2\psi & + \varepsilon^3 \\
+\pi\chi^2 & = & & + \pi\psi^2 & + 2\pi\varepsilon\psi & + \pi\varepsilon^2 \\
+\varrho\chi & = & & & + \varrho\psi & + \varrho\varepsilon \\
+\sigma & = & & & & + \sigma \\
\hline
\end{array}$$

$$o = \psi^3 \left.\begin{matrix}+3\varepsilon\\+\pi\end{matrix}\right\}\psi^2 \left\{\begin{matrix}+3\varepsilon^2\\+2\pi\varepsilon\\+\varrho\end{matrix}\right\}\psi \begin{matrix}+\varepsilon^3\\+\pi\varepsilon^2\\+\varrho\varepsilon\\+\sigma\end{matrix}$$

Τούτῳ δὲ τῷ τρόπῳ πάσας τὰς τοῦ γ΄. βαθμοῦ Ἐξισώσεις, τὰς πλήρεις τοὺς ὅρους ἐχούσας, παραστῆσαι δυνάμεθα. Εἰ οὖν ἐνταῦθα τὸν β΄. ὅρον $= o$ γενέσθαι δέοι, ἀναγκαῖον τὴν Ἐξίσ. εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, ἐν ᾗ τὸ κεφάλ. τῶν ῥιζῶν, ὅπερ οἱ συνεργοὶ τοῦ β΄. εἰσὶν ὅρου, ἢ ἔνθα τὸ $3\varepsilon + \pi = o$ ἂν γένοιτο. Εἰ τοίνυν

$$3\varepsilon + \pi = 0$$ ἔϛαι καὶ

$$3\varepsilon = -\pi$$

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{3}$$

Ὥϛε προφανὲς ἐνταῦθα, ὁποίαν τιμὴν τῷ ε ἀποδοῦναι χρὴ ἐν κυβικῇ Ἐξισ. ἔνθα ὁ β΄. ὅρος καταφατικὸς, ἀντὶ τοῦ χ τὸ ψ + ε θεῖναι βουλομένους. ἔϛαι ἀμέλει $-\frac{1}{3}\pi$, ἢ $-\frac{\pi}{3}$. Εἰ οὖν ἀντὶ τοῦ χ τὸ $\psi - \frac{1}{3}\pi$ ἀντικατέϛῃ, εἴη αὐτὸ τῶν ῥιζῶν κεφάλ. = 0, καὶ ὁ β΄. ὅρος ἐκπέσοι. Οὕτω δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ἡ Ἐξίσ. εἴη $\chi^3 - \pi\chi^2$ κτ. ἤτοι, ἐὰν ὁ β΄. ὅρος ἀποφατικὸς, ἀντὶ τοῦ ε τὸ $+\frac{1}{3}\pi$ ἀντικαταϛῆσαι χρὴ, καὶ ὅτι, ἐὰν ἀντὶ τοῦ $\chi = \psi + \varepsilon$ ληφθῇ, $\chi = \psi + \frac{1}{3}\pi$ δι᾽ ἀντικαταϛάσεως ταύτης τῆς ποσότητος, ἀντὶ τοῦ χ ὁ β΄. ὅρος ἐκπεσεῖν ἔχοι. Ἐξ οὗ ὁ Κανών.

Ἐπ᾽ κυβικῶν τῶν Ἐξισ. ὁ β΄. ὅρος ἐκπεσεῖται, ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ ἑτέρα τις ἄγνωϛος ποσότης τεθῇ, οἷον Ψ, καὶ τούτῳ τὸ τριτημόριον τοῦ συνεργοῦ τοῦ β΄. ὅρου ἀντικειμένῳ τῷ σημείῳ προϛεθῇ, ἥπερ ἦν ἐν τῇ Ἐξισώσει, καὶ τούτου ἀντικαταϛάντος ἐν τῇ Ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ χ.

Παραπλησίως δειχθήσεται καὶ ὅτι, ἐὰν ἀπό τινος Ἐξισ. οἱουδηποτοῦν βαθμοῦ τὸν β΄. ἐκβαλεῖν βουλώμεθα ὅρον, ἀντὶ τοῦ χ ἑτέραν ἄγν. ποσότ. θεῖναι χρὴ, ἥτινι καὶ ὁ συνεργὸς τοῦ β΄. ὅρου μετ᾽ ἀντικειμένου τοῦ σημείου, ἢ πρότερον εἶχε, προϛιθεςίθεται, διαιρούμενος μέντοι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅς ὁ Ἐκθέτης τῆς ὑπερτάτης Δυνάμεως τῆς ἀγνώςου ποσότητος ἐν τῇ Ἐξισώσει τυγχάνει. Οἷον, ἔςω ἐν γένει ἡ Ἐξίσ. μ βαθμοῦ, ἧ ἡ ὑπερτάτη ἄγνωςος ποσότης ἔςω χ^{μ}. Ὁ συνεργὸς τοῦ β'. ὅρου ῥηθήτω $\pm\, \pi$, ἥπερ τὸ αὐτοῦ σημεῖον $+$, ἢ $-$ εἴη. καὶ ὁ β'. ὅρος ἐκ μέσου γενήσεται ἀντὶ τοῦ χ τοῦ $\psi \pm \frac{\pi}{\mu}$ ἀντικαταςάντος, ἤτοι ἐὰν ὁ β'. ὅρος ἐν τῇ Ἐξ. $+$ ᾖ, τίθεται $\chi = \psi - \frac{\pi}{\mu}$. Ἐὰν δὲ $-$, $\chi = \psi + \frac{\pi}{\mu}$. Ληφθήτω παράδ. ἐκ τῶν τοῦ γ' βαθμοῦ Ἐξισ.

§. 407. Ἔςω $\chi^3 - 9\chi^2 + 26\chi - 24 = 0$. Ἐκπεσέτω ὁ ταύτης β'. ὅρος. Ὥςε κατὰ τὸν κανόνα τεθήτω $\chi = \psi + \frac{9}{3}$. ἢ $\chi = \psi + 3$.

$$
\begin{array}{lrcrrrr}
\text{Ἔνθεν τοι} & \chi^3 & = & \psi^3 & +9\psi^2 & +27\psi & +27 \\
 & -9\chi^2 & = & & -9\psi^2 & -54\psi & -81 \\
 & +26\chi & = & & & +26\psi & +78 \\
 & -24 & = & & & & -24 \\
\hline
 & 0 & = & \psi^3 & * & -\psi & *
\end{array}
$$

Ἐνταῦθα καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος ἐκπέπτωκεν, οὕτω συμβάν. οὐ γὰρ ἀεὶ τοῦτο. προῆλθε δὲ, ὅτι μία τῶν ῥιζῶν τοῦ ψ ἔςαι $= 0$. Ὥςε καὶ μία τῶν τοῦ $\chi = 3$. Εἰ γὰρ $\psi = 0$, ἔςι $\chi = 0 + 3 = 3$. Ἐπὶ τούτου ἄρα καὶ εἰς ἀμιγῆ Τετραγωνικὴν ἡ μεταβέβληται Κυβικὴ Ἐξίσωσις. Ἐὰν γὰρ

γὰρ $\psi^3 - \psi = 0$. ἔςι καὶ

$$\frac{\psi^3 = +\psi}{\psi^2 = +1} : \psi$$

$$\psi = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

Ὡς οὖν τοῦ ἐσχάτου ἐκπεπτωκότος ὅρου, ἔςαι ἡ γ΄ ῥίζα τοῦ $\psi = 0$. (§. 402.) Ἐπεὶ δὲ $\chi = \psi + 3$. ἐὰν ἀντὶ τοῦ ψ αἱ τούτου ἀντικαταςῶσι τιμαὶ, ἔςαι μία τιμὴ τοῦ $\chi = 0 + 3 = 3$. ἡ δ᾽ ἑτέρα $\chi = +1 + 3 = +4$. ἡ δὲ γ. $\chi = -1 + 3 = +2$. Ὅπερ τῷ ὄντι οὕτως ἔχει. Ἔςω ἡ Ἐξισ. $\chi^3 + 9\chi^2 + 14\chi - 24 = 0$. Καὶ ἀποσκευασθήτω ὁ β΄. ὅρος. Ὥςε κατὰ τὸν κανόνα ἔςω $\chi = \psi - \frac{9}{3} = \psi - 3$. ἄρα

$$\begin{array}{rcrrrr}
\chi^3 & = & \psi^3 & - 9\psi^2 & + 27\psi & - 27 \\
+ 9\chi^2 & = & & + 9\psi^2 & - 54\psi & + 81 \\
+ 14\chi & = & & & + 14\psi & - 42 \\
- 24 & = & & & & - 24 \\
\hline
0 & = & \psi^3 & * & - 13\psi & - 12
\end{array}$$

Αἱ δὲ ῥίζαι, $\psi = -1$. Καὶ $\psi = -3$. Καὶ $\psi = +4$. Κἀκ τούτων $\chi = +1$. Καὶ $\chi = -4$. Καὶ $\chi = -6$.

§. 408. Καὶ μέθοδοι δὲ δίδονται, ὅπως ὁ γ΄. καὶ δ΄ ὅρος, ἢ ὁςισοῦν ἕτερος, ἐκ τῆς Ἐξισώσεως αἴρωνται. ἀλλ᾽ ὡς τῆς τούτων χρήσεως μικρᾶς οὔσης, ἐνταῦθα παραλείπονται. Ὁ δὲ β΄. ἀποσκευάζεται ὡς ἐπὶ τὰ πλεῖστον, διὰ τὸ τὸν ὑπολογισμὸν μετὰ τῶν τῆς Ἐξισ. ῥιζῶν διὰ τούτου συνεπιτέμνεσθαι. Ὁποῖον δ᾽ ἂν ὅρον ἀποσκευάσασθαι βούλῃ, μόνον τὸν,

ᾧ τὰ

ᾧ τὸ χ ἐνυπάρχει, δυνήσῃ. Εἰ γὰρ καὶ πάνυ χρήσιμον πάντας τοὺς τῆς Ἐξ. ὅρους, ἡλίκη ἂν ᾖ, ἐκ μέσου αἵρειν, τοῦ α'. καὶ τελευταίου ἐξαιρουμένου, ἀλλ' ἀδύνατον. Ἀμήχανον γὰρ, π. χ. ἑκάστην Κυβικὴν Ἐξίσ. οὕτω μεταβαλεῖν, ὥστε τελευταῖον $\psi^3 + \gamma = 0$ ὑπολειφθῆναι, καὶ τηνικαῦτα ἐκ τοῦ ψ τὸ χ εὑρεθῆναι. Δῆλον δὲ τὸ λεγόμενον κἀκ τούτου, ὅτι τῇ ἐντελεῖ κυβικῇ Ἐξισώσει τρεῖς αἱ δυναταὶ τιμαὶ τοῦ χ, τῆς τοῦ $\psi^3 + \gamma = 0$, ἢ $\psi^3 = -\gamma$ μίαν μόνον δυνατὴν, τὰς δὲ δύω ἀδυνάτους ἐχούσης. (§. 397.) ὥστε τὰς τιμὰς τοῦ χ διὰ τῆς τοῦ ψ εὑρεῖν μὴ δύνασθαι.

§. 409. Ὥσπερ ἐκ τῆς Ἐξισ. ὅρον τινὰ δυνατὸν ἐξαγαγεῖν, οὕτω καὶ ἀνάπαλιν αὖθις εἰσαγαγεῖν ἔχομεν, εἰ ἀναγκαῖον, τῇ τῆς ῥίζης ἑνὶ ἀριθμῷ ἐπαυξήσει, ἢ τοῦ χ τὸ ψ + 1, ἢ ψ + 2, κτ. τιθέντες προσηκόντως ἀντικαταστήσομεν. Ἔστω ἡ Ἐξίσ. $\psi^3 - 13\psi - 12$. ἧς ὁ β'. ἄπεστιν ὅρος, καὶ ἧς αἱ ῥίζαι -1, -3, καὶ $+4$. Ἐὰν οὖν τεθῇ $\psi = \chi + 1$, προκύψει Ἐξίσ. ἡ ἑξῆς.

$$
\begin{array}{rcl}
\psi^3 & = & \chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi + 1 \\
-13\psi & = & \qquad\qquad -13\chi - 13 \\
-12 & = & \qquad\qquad\qquad -12 \\
\hline
0 & = & \chi^3 + 3\chi^2 - 10\chi - 24.
\end{array}
$$

ἧς αἱ ῥίζαι -2, -4, καὶ $+3$.

§. 410. Ὅπως τὰς ἐνεργείᾳ ῥίζας οἱασοῦν Ἐξισ. ἀπόπειραν λαμβάνοντες ἂν εὕροιμεν. ἀντὶ τοῦ χ ἕνα τῶν εὑρεθέντων παραγόντων τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἐν τῇ Ἐξισώσει ἀντικαθιστάντες, δέδεικται. Ἀλλ' ἐὰν ποσότης τις εἰς πολλοὺς ἀναλύηται παράγοντας, ὀχληρὸν