Ὥςε καὶ $\chi + 12 = 0$. ἄρα $\chi = -12 =$ τῇ ἑτέρᾳ ῥίζῃ.

Αἱ μέχρι τοῦδε πᾶσαι θεωρίαι τὴν Φύσιν καὶ ἰδιότητας τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων ἀνιχνεύουσιν ὅτι χρήσιμοι. Ἐπὶ δὲ τῶν τετραγ. μόνων Ἐξισ. οὐκ ἀναγκαῖαι.

Περὶ τῶν Κυβικῶν Ἐξισώσεων, καὶ περὶ τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων ἐν γένει.

§. 394. Κυβικαὶ δ' Ἐξισώσεις ἀμιγεῖς, ἔνθα μόνον ὁ κύβος τῆς ἀγνώςου ποσότητος πάρεςιν, ἐξισούμενος γνωςῇ τινι ποσότητι. τουτ: ἔνθα χ^3 καθ' ἑαυτὸ, οὐδεμία δ' ἑτέρα τῶν ἀγνώςων. Εἰ δὲ τὸ χ^3 καὶ συνεργῷ συνῆπται, ἀχθείη ἂν, ἢ ἐν τοῖς ἀνωτέρω δέδεικται, μόνον ἐπὶ θάτερα. Ὡς $\chi^3 = 343$ ἐςὶν Ἐξίσ. Κυβικὴ ἀμιγής Ὡσαύτως καὶ ἥδε. $3\chi^3 + 15 = 549$ τοιαύτη ἂν γένοιτο. $3\chi^3 = 549 - 15$. ἢ $3\chi^3 = 534$. καὶ $\chi^3 = \frac{534}{3} = 178$. ἢ καθόλου. $\chi^3 = a$, τοῦ a ὁλοσχερῆ ἀρι μὸν, ἢ κλάσμα, ἢ οἱανδήτινα ἐγνωσμένην ποσότητα σημαίνοντος.

§. 395. Τῷ τοίνυν τὰς τοιαύτας τῶν Ἐξισώσεων ἐπιλύσειν μέλλοντι, ἐξακτέα ἡ κυβικὴ ῥίζα ἐξ ἀμφοῖν τῶν ποσοτήτων, κατὰ τὰ προηγηθέντα, τὴν τοῦ χ διωρισμένην τιμὴν δεικνύουσα, εἴτε καταφατικὴν, εἴτε ἀποφατικὴν οὖσαν, ἥπερ ἂν τὸ σημεῖον ἔχοι, τὸ πρὸ τῆς δεδομένης. Ἡ γὰρ κυβικὴ ῥίζα θάτερον τῶν δυοῖν εἶναι δύναται, ἀλλ' οὐκ ἄμφω ἅμα. π. χ. $\chi^3 = 343$

$$\sqrt[3]{\chi^3} = \sqrt[3]{343}.$$

Καὶ $\chi = 7 =$ τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ 343.

Παρα-

Παραπλησίως καὶ $\chi^3 = \frac{64}{125}$

$$\sqrt[3]{\chi^3} = \sqrt[3]{\tfrac{64}{125}} \cdot \text{ ἢ } \chi = \tfrac{4}{5} \cdot$$

Ἔςι γὰρ $\sqrt[3]{64} = 4$. καὶ $\sqrt[3]{125} = 5$. Καὶ ἐν γένει. $\chi^3 = a$

$$\chi = \sqrt[3]{a} \cdot$$

§. 396. Ἡ δὲ ῥίζα τῆς ἀγνώστου μία καὶ μόνη ἐπὶ τῶν κυβικῶν. (§. ἀνωτ.) Ἐπ' ἀμφοῖν δὲ τῶν Τετρ. Ἐξισ. δύω. Ἀλλὰ ζητεῖται, εἰ κἀνταῦθα πλείους εὑρεθεῖεν ῥίζαι. πάντως γε. τὰς γὰρ λοιπὰς τῶν ῥιζῶν, τὰς δύω (τρεῖς γὰρ ταῖς Κυβικαῖς ἀποδιδόαμεν Ἐξισ.) ῥᾷςα εὑρήσομεν, τὴν Ἐξίσωσιν διὰ τοῦ χ, τῆς εὑρεθείσης πρῶτον ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθείσης ῥίζης, διαιροῦντες, ἐξ οὗ Τετραγ. Ἐξίσ. προκύψει, κατὰ τὸν συνήθη ἐπιλυομένη τρόπον. Οἷον, ἔςω $\chi^3 = 64$

$\chi = \sqrt[3]{64} = 4$. Ἐπεὶ οὖν $\chi = 4$, ἔςαι $\chi - 4 = 0$. Καὶ ἐπειδὴ $\chi^3 = 64$, ἔςαι καὶ $\chi^3 - 64 = 0$. Ἀνάγκη δὲ $\chi^3 - 64 = 0$ διὰ τοῦ $\chi - 4 = 0$ διαιρέσιμον εἶναι. Ἔςι γὰρ τιμὴ τοῦ $\chi = 4$. Καὶ ἐὰν ἡ τιμὴ ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^3 - 64 = 0$ τοῦ χ ἀντικαταςῇ, ἡ Ἐξίσωσις χωρήσει εἰς τὸ μηδέν.

$$\begin{array}{r|l}
\chi - 4) \quad \chi^3 - 64 & \chi^2 + 4\chi + 16 \\
\chi^3 - 4\chi & \\
\hline
+ 4\chi^2 - 64 & \\
+ 4\chi^2 - 16\chi & \\
\hline
+ 16\chi - 64 & \\
+ 16\chi - 64 & \\
\hline
0 \quad 0 &
\end{array}$$

'Η

Ἡ οὖν προκύψασα Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις ἐςὶ $\chi^2 + 4\chi + 16 = 0$. Ἀνάγκη δὲ πᾶσα $= 0$ εἶναι, ὡς τοῦ Διαιρέτου, καὶ Διαιρετέου $= 0$ ὄντων. Ἐπιλυθήτω τοίνυν

$$\chi^2 + 4\chi + 16 = 0$$

$$\chi^2 + 4\chi = -16$$

$$\chi^2 + 4\chi + 4 = -16 + 4 = -12$$

$$\chi + 2 = \pm \sqrt{-12}$$

$$\chi = -2 \pm \sqrt{-12}.$$ Καὶ οὕτω προῆλθον καὶ αἱ λοιπαὶ δύω τιμαὶ τοῦ χ. Ὅθεν 1) $\chi = +4$. 2) $\chi = -2 + \sqrt{-12}$. 3) $\chi = -2 - \sqrt{-12}$. Ὧν αἱ δύω τελευταῖαι τιμαὶ τοῦ χ ἀδύνατοι ποσότητες. ἄρα καὶ ἄχρηςοι. Ἀλλ᾽ ἐὰν μία τούτων τρὶς ἐφ᾽ ἑαυτὴν πολλαπλασιασθῇ, ἀναγκαίως προκύψει καὶ ἡ Ἐξίσωσις. $\chi^3 = 64$ Ἡ μία τιμὴ τοῦ χ ἦν $-2 + \sqrt{-12}$. Ὃ ἐφ᾽ ἑαυτ. πολλ.

$$-2 + \sqrt{-12}$$

$$-2\sqrt{-12} - 12$$

$$+4 - 2\sqrt{-12}$$

$$+4 - 4\sqrt{-12} - 12 = -8 - 4\sqrt{-12}$$

τὸ παραγόμ. αὖθις πολλ. μετὰ

$$-4\sqrt{-12} - 8$$

$$-2 + \sqrt{-12}$$

$$+48 - 8\sqrt{-12}$$

Ὥςε τὸ $+8\sqrt{-12} + 16$

παραγόμ. $+8\sqrt{-12} + 64 - 8\sqrt{-12} = +64$

Ὥσαύ-

Ὡσαύτως καὶ ἡ ἑτέρα ῥίζα $-2-\sqrt{-12}$ τρὶς ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθεῖσα δώσει $+64$ παραγόμενον. Καὶ πᾶσαι αἱ τρεῖς ῥίζαι εἰς τὸ 0 ἀχθεῖσαι, καὶ ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεῖσαι, δώσουσιν αὖθις τὴν Ἐξίσωσιν $\chi^3 = 64$.

§. 397. Ἐν τῷ προτεθέντι παραδείγματι αἱ μὲν δύω τοῦ $\chi^3 = 64$ ῥίζαι ἦσαν ἀδύνατοι. Οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἀμιγῶν κυβικῶν Ἐξισώσεων, τῆς μιᾶς μόνον τῶν τριῶν δυνατῆς οὔσης, εἴτε καταφατικῆς, εἴτε ἀποφατικῆς. Ἐξισώσεως δὲ κυβικῆς ἀμιγοῦς προκειμένης, ἧς ἡ ῥίζα οὐκ ἔχει ἀκριβῶς ἀποδοθῆναι, τὸ ὡς ἔγγιςα αὐτῆς γενέσθαι πειρασόμεθα ἐν τῇ Ἐξαγωγῇ. Ἄλογος γὰρ τηνικαῦτα οὖσα πάντη πάντως ἀναπόδοτος. π. χ. ἐὰν $\chi^3 = 148$

ἔςαι $\chi = \sqrt[3]{148} = 5,289\ldots$

Παραδείγμ. Α΄. Ζήτησον ἀριθμὸν, οὗ ὁ ἡμιτετράγωνος ἐπ' αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιασθεὶς 256 παραγόμενον δώσει.

Λύσις. Ἔςω ὁ ἀριθμὸς $= \chi$. Οὗ ὁ τετράγ. $= \chi^2$. ὁ δ' ἡμιτετράγ. $= \frac{\chi^2}{2}$. Ὃς (ἡμιτετ.) πολλαπλ. ἐπὶ χ ἐξισωθ. τῷ 256.

ὥςε $\chi \cdot \frac{\chi^2}{2} = 256$

ἢ

$\frac{\chi^3}{2} = 256$

$\cdot\, 2$

$\chi^3 = 512$

$\chi = \sqrt[3]{512} = 8$. Ἐνθέντοι

θεντοι $\frac{\chi^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$. καὶ ἐπειδὴ $\chi = 8$, λέλυται τὸ ζητούμενον. Ἔστι γὰρ $32 \,.\, 8 = 256$.

Β'. Γεωργός τις τυροὺς ὀρνίθων ἀνταλλαξάμενος ἀντὶ δύω τυρῶν λαμβάνει τρεῖς ὄρνιθας. Αἱ δ' ὄρνιθες τίκτουσιν ἑκάστη $\frac{1}{3}$ ᾠῶν, ὅσος ὁ αὐτῶν ἀριθμός. Τῶν δ' ᾠῶν ὑπ' αὐτοῦ πωλουμένων, 9 ᾠὰ τοσούτων λεπτῶν ἀποδίδοται, ὅσα ᾠὰ ἑκάστη τέτοκε. συνάγει δ' ἐκ τούτων 72 λεπτά. Πόσους οὖν τυροὺς, ὄρνιθας, καὶ ᾠὰ ἐσχήκει;

Λύσις. Ἔστω ὁ τῶν τυρῶν ἀριθμὸς $= \chi$. Ἐπειδὴ οὖν ἀντὶ δύω τυρῶν 3 λαμβάνει ὄρνιθας, ἡ τῶν Τριῶν Μέθοδος δείξει τὰς ληφθείσας ὄρνιθας. ἤτοι 2 τυροί: χ τυρ. $=$ 3 ὄρνιθες: $\frac{3\chi}{2}$ ὄρν. Ἑκάστη ὄρνις $\frac{1}{3}$ ᾠῶν τίκτει, ὅσαι αὐταί. Ὁ ἀριθμὸς ἄρα τῶν ὀρνίθων μετὰ τοῦ $\frac{1}{3}$ πολλαπλασιασθεὶς δίδωσι τὸν ἀριθμὸν τῶν ᾠῶν ἑκάστης ὄρνιθος. τουτέστι $\frac{3\chi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3\chi}{6} = \frac{1}{2}\chi$. ἐκ τούτων διὰ τῆς ἐχομένης Ἀναλογίας εὐχερῶς ἂν εὕροιμεν, πόσα ᾠὰ ἅπασαι τετόκασιν αἱ ὄρνιθες. 1 ὄρνις: $\frac{1}{2}\chi$ ᾠὰ $=$ $\frac{3}{2}\chi$ ὄρνιθες: $\frac{3}{4}\chi^2$ ᾠὰ, ἤτοι $\frac{3}{4}\chi^2$ ᾠὰ τετόκασιν. Ἐκ τούτων πωλεῖ 9 τοσούτων λεπτῶν, ὅσα ᾠὰ ὑφ' ἑκάστης ἐτέχθη. Ἐτέχθη δὲ ὑφ' ἑκάστης $\frac{1}{2}\chi$. Ἄρα 9 ᾠὰ εἰσὶν ἄξια λεπτῶν $\frac{1}{2}\chi$. Αὖθις δὲ διὰ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου ἀνακαλύψομεν, πόσου ἅπαντα τετίμηται τὰ ᾠά.

9 ᾠὰ : $\frac{1}{2}\chi$ λεπτ. $=$ $\frac{3}{4}\chi^2$ ᾠὰ : $\frac{3\chi^3}{8 \cdot 9}$ λεπτ.

$= \frac{\chi^3}{24} =$ τῇ τιμῇ τῶν ᾠῶν ἁπάντων.. Ὅθεν κα-

τὰ

τὰ τὸ Πρόβλημα $\frac{\chi^3}{24} = 72$

$$\frac{\qquad\qquad}{\chi^3 = 1728} \cdot 24$$

$\chi = \sqrt[3]{1728} = 12$. Ἐπειδὴ οὖν χ ἦν ὁ ζητούμενος τῶν τυρῶν ἀριθμὸς, ἔσχεν ἄρα 12 τυρούς. Ἔλαβε $\frac{3}{2}\chi$ ὄρνιθας $= \frac{3 \cdot 12}{2} = 18$. Ἐκάσῃ ἔτικε $\frac{1}{2}\chi$ ὠὰ $= \frac{1 \cdot 12}{2} = 6$. ἅπαντα τὰ ὠὰ ἦν $\frac{3}{4}\chi^2 = \frac{3 \cdot 12 \cdot 12}{4} = 108$. ἀπέδοτο 9 ὠὰ $\frac{1}{2}\chi$ λεπτ. ἢ $\frac{1 \cdot 12}{2} = 6$ λεπτ. Ὡς ἀναγκαίως 108 ὠὰ 72 λεπτῶν ἄξια.

§. 398. Ἐξισώσεις δ' ἐντελεῖς Κυβικαὶ, ἐν αἷς πλὴν τοῦ Κύβου τῆς ἀγνώσου, καὶ ὁ ταύτης τετράγωνος, καὶ ἡ α'. αὐτῆς δύναμις, καὶ ἔτι μία δεδομένη Ποσότης. Ὡς $\chi^3 + 9\chi^2 + 20\chi = -12$. Ἥτις εἰς τὸ 0 ἀχθεῖσα ἐςὶ $\chi^3 + 9\chi^2 + 20\chi + 12 = 0$. ἢ ἐν γένει. $\chi^3 \pm \pi\chi^2 \pm \rho\chi \pm \beta = 0$. Ἔνθα π, ρ, καὶ β ἀριθμοὺς γνωςοὺς, καταφατικοὺς, ἢ ἀποφατικοὺς, (διὰ τοῦτο γὰρ ἄμφω τὸ σημεῖα προκεχάρακται), ἢ καὶ κλάσματα παριστῶσιν. Ἐπὶ τῆς τῶν τοιούτων ἐπιλύσεως τὰς διαφόρους παραδραμόντες μεθόδους, δι' ὧν τὰς τῆς Ἐξισώσεως εὑρίσκουσι ῥίζας, μέθοδόν τινα τῆς τῶν τοιούτων Ἐξισώσ. ἐπιλύσεως ὑποδείξομεν.

§. 399. Ἐπιςάσεως ἄξιον, ὅτι καὶ αὗται, καθὰ καὶ περὶ τῶν ἀμιγῶν τοῦ γ'. βαθμοῦ λέλεκται, τρεῖς τιμὰς τοῦ χ, ἢ τρεῖς ῥίζας ἔχουσιν, οὐκ ἀεὶ μέντοι, ὡς ἐπ' ἐκείνων, τῶν δύω ῥιζῶν ἀδυνάτων οὐσῶν. Δυνατὸν γὰρ καὶ τὰς τρεῖς δυνατὰς εἶναι, καὶ τοῦτο οὐκ ὀλιγάκις. π. χ. $\chi^3 + 9\chi^2 + 20\chi + 12 = 0$. ταύτῃ τρεῖς αἱ δυναταὶ ῥίζαι $\chi = -1$, $\chi = -2$, $\chi = -6$. Ἡ δ' Ἐξίσωσις ἀνέφυ τῷ πολλαπλασια-

σμῷ

σμῷ τῶν τριῶν παραγόντων, εἰς τὸ ο ἀχθέντωνἤτοι $(\chi + 1) \cdot (\chi + 2) \cdot (\chi + 6)$. Καὶ πᾶσαν δὲ Κυβικὴν Ἐξίσωσιν θεωρεῖν ἔνι, ὡς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τριῶν παραγόντων, ἔνθα αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἰς τὸ ο ἤχθησαν, παραχθεῖσαν, καίτοι τῶν τριῶν τοῦ χ τιμῶν ἐνίοτε τῶν αὐτῶν εἶναι δυναμένων. Ὡς ἐν τῇ Ἐξισώσει, $\chi^3 - 6\chi^2 + 12\chi - 8 = 0$. τὸ $\chi = 2$ τυγχάνει. Ἀλλ' ἡ Ἐξίσωσις ἀνέφυ τῷ τριττῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ $\chi - 2 = 0$.

Τεθήτω ἐν γένει ἡ τριττὴ τοῦ χ τιμή, ἢ μᾶλλον, ἑκάστης ῥίζης τῆς Ἐξισώσεως, τῆς τῷ χ δεικνυμένης, καίτοι τῶν τριῶν διαφόρων ἐχουσῶν εἶναι, καὶ πολλαπλασιασθήτωσαν πρὸς ἀλλήλας αἱ τρεῖς τιμαί. Ἔστω $\chi = -\pi$. Καὶ $\chi = -\varrho$. καὶ $\chi = -\sigma$. Ὥστε $\chi + \pi = 0$. Καὶ $\chi + \varrho = 0$. Καὶ $\chi + \sigma = 0$. Πολλαπλ.

$$
\begin{array}{r}
\chi + \pi = 0 \\
\chi + \varrho = 0 \\
\hline
+ \varrho\chi + \pi\varrho \\
\chi^2 + \pi\chi \qquad\qquad \\
\hline
\chi^2 + \pi\chi + \varrho\chi + \pi\varrho \\
\chi + \sigma \\
\hline
\sigma\chi^2 + \sigma\pi\chi + \sigma\varrho\chi + \sigma\pi\varrho \\
\varrho\chi^2 \qquad + \pi\varrho\chi \qquad\quad \\
\chi^3 + \pi\chi^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
\chi^3 + (\pi + \varrho + \sigma)\,\chi^2 + (\sigma\varrho + \pi\varrho + \sigma\pi)\,\chi + \\
\sigma\pi\varrho = 0
\end{array}
$$

Καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ προτεθέντος καὶ αἱ τρεῖς τοῦ χ τιμαί, ἢ καὶ αἱ τρεῖς ῥίζαι, ἦσαν ἀποφατικαί.

Εἰ

Εἰ δὲ καταφατικαὶ εἶεν, τὸ ἐκ τῶν τριῶν παραγόμενον εἴη ἂν

$$\chi^2 - (\sigma + \pi + \rho)\chi^2 + (\sigma\rho + \pi\rho + \sigma\pi)\chi - \sigma\pi\rho = 0.$$

§. 400. Αἱ τῆς ἐν γένει ταύτης Ἐξισώσεως ἰδιότητες, ἀκριβῶς θεωρουμένης, λίαν εἰσὶν ἀξιοσημείωτοι, ἢ ὥστε ταύτας παρελθεῖν, τῶν ῥιζῶν ἀμέλει δυνατῶν οὐσῶν, ὡς ἐνταῦθα ταύτας παρελάβομεν.

1) Πασῶν τῶν ῥιζῶν ἀποφατικοῦν οὐσῶν, πάντες οἱ ὅροι τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθείσης Ἐξισώσεως ἔχουσι πρὸ ἑαυτῶν τὸ $+$.

Καταφατικῶν δὲ πάντων οὐσῶν, τὰ σημεῖα ἐναλλὰξ ἐπαμείβεται. Ἐκ τούτων συνάγουσιν, ὅτι, ὁσάκις τὰ σημεῖα τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθ. Ἐξισ. ἐπαμείβεται, καὶ τοσαῦται καταφατικαὶ ῥίζαι. ὁσάκις δὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα, εἴτε $+$, εἴτε $-$ ἀλλήλοις ἕπονται, καὶ τοσαῦται ῥίζαι ἀποφατικαὶ ταύτῃ ἐνυπάρχουσιν· οὕτω τῆς Ἐξισώσεως $\chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0$, καὶ αἱ τρεῖς ῥίζαι καταφατικαί. τὰ γὰρ σημεῖα τρὶς ἐπαμείβεται. Αἱ δὲ ῥίζαι εἰσὶ $+1$, $+2$, καὶ $+3$. Τῆς δὲ $\chi^3 + 6\chi^2 + 11\chi + 6 = 0$, πᾶσαι ἀποφατικαί. Τρὶς γὰρ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀλλήλοις ἕπεται. Εἰσὶ δὲ καὶ ταύτῃ ῥίζαι ταῖς ἀνωτ. αἱ αὐταί. -1, -2, καὶ -3. Ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^3 - \chi^2 - 10\chi - 8$ ἅπαξ τὰ σημεῖα ἐπαμείβεται. Εὐθὺς γὰρ ἐν ἀρχῇ ἡ τοῦ $+$ εἰς τὸ $-$ ἐπαμοιβή. Ἕπεται δὲ δὶς εἶτα τὰ αὐτὰ σημεῖα. Καὶ ἕξει ἄρα τῶν τριῶν ῥιζῶν τὴν μὲν μίαν καταφατικὴν, τὰς δὲ λοιπὰς δύω ἀποφατικὰς, ἤτοι -1, -2, καὶ $+4$.

2) Ἐν τῷ β'. ὅρῳ τούτων (τῶν Ἐξισ.) τὸ κεφάλαιον πασῶν τῶν ῥιζῶν, ἢ μᾶλλον, τὸ κεφάλαιον τῶν ποσοτήτων, τῶν ταῖς ῥίζαις ἀντικειμένων, ἔνεστιν.

Εἰδὴ

Εἰδὴ τῶν ῥιζῶν τὰ σημεῖα διάφορα, θεωρητέον καὶ τὸ κεφάλαιον ἀλγεβραϊκῶς. Καὶ διὰ τῆς προσθέσεως γὰρ τῶν καταφ. καὶ ἀποφ. Ποσοτήτων κεφάλαιόν τι προκύπτει.

3) Ὁ γ΄. ὅρος περιέχει τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν, ἀνὰ δύω εἰλημμένων.

4) Καὶ τελευταῖον ὁ δ΄. ὅρος, ἢ τελευταῖος τὸ παραγόμενον τῶν τριῶν ῥιζῶν. Ὅπερ μάλιςα σημειώσεως ἄξιον. διὰ τούτου γὰρ εἰς ἐπίλυσιν τῶν τοιούτων Ἐξισ. προδιατεθέντες, καὶ τὴν τῶν ὑπερτέρων οὐ μετὰ πολλοῦ περανοῦμεν τοῦ πόνου.

§. 401. Πρὸ πάντων δὲ, ἐὰν ἡ Ἐξίσωσις οὕτως ἔχῃ, ὥςε τὸ χ^3 ἐν ἀρχῇ μόνον εἶναι, καὶ τοὺς συνεργοὺς τῶν ἑτέρων ποσοτήτων μετὰ τοῦ ἐσχάτου ὅρου ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς εἶναι, δῆλον, ὅτι ἡ τοιαύτη Κυβικὴ Ἐξίσωσις, εἰ λογικὰς ἔχει ῥίζας, ἑτέρας οὐχ ἕξει, ἢ ὧν ὁ πολλαπλασιασμὸς τὸ ἔσχατον παρήγαγε παραγόμενον. Ἔνθεντοι τοῦ ἐσχάτου παραγομένου εἰς παράγοντας τοὺς προσήκοντας ἀναλυθέντος, τεθήτωσαν (οἱ παράγ.) καταφατικοὶ, καὶ ἀποφατικοὶ (τὰ σημεῖα τῆς Ἐξισ. ἐμφαίνουσι τοῦτο, ὡς εἴρηται) ἐν τῇ Ἐξισ. ἀντὶ τοῦ χ οὕτως, ὡς ἐν μὲν τῷ χ^3 τὸν παράγοντα εἰς κύβον ἠρμένον, ἐν δὲ τῷ χ^2 εἰς τετράγωνον, καὶ τῷ συνεργῷ πεπολλαπλασιασμένον εἶναι, ἐν δὲ τῷ χ μόνον τῷ συνεργῷ (πεπολλ. εἶναι) Τούτοις δὲ καὶ τῆς γνωςῆς ποσότητος τοῦ ἐσχάτου ὅρου προςεθείσης, ἀνάγκη διὰ τοῦ παράγοντος, εἰ ῥίζα τῆς Ἐξισ. ἐςὶ, πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἀναιρεθῆναι, τουτ. τὴν Ἐξίσ. εἰς τὸ μηδὲν χωρῆσαι. Εἰ δ' οὐδεὶς τῶν παραγόντων τοῦτο ποιῆσαι δυνατὸς, οὐδεμίαν λογικὴν ῥίζαν τότε ταύτῃ (τῇ Εξ.) παρεῖναι δείκνυσι. Μιᾶς δὲ ῥίζης εὑρεθείσης, ῥᾶςα τὰς λοιπὰς ἀνακαλύψομεν δύω τῇ τῆς Ἐξισώσεως διαιρέσει διά τινος παράγοντος αὐτῆς,

αὐτῆς, ὅς προκύπτει, ἐὰν τὸ ὡς ῥίζα εὑρεθὲν ἐπὶ θάτερα μετατιθῆται, τῷ $χ$ ἀντικειμένῳ τῷ σημείῳ συμπλεκόμενον. τηνικαῦτα γὰρ ἡ ἐκ τούτου τετραγωνικὴ Ἐξίσ. ῥαδίως ἐπιλύεται. Οἷον $χ^3 + 4χ^2 - 4χ - 16 = 0$. Ἐνταῦθα δὶς ἕπεται τὰ αὐτὰ σημεῖα, καὶ ἅπαξ ἀμείβεται. Τὸ γὰρ $+ χ^3$ καὶ $+ 4χ^2$ ἕπονται ἀλλήλοις, τὰ αὐτὰ ἔχοντα σημεῖα, καὶ $- 4χ$ καὶ $- 16$ ὡσαύτως. Ἀλλὰ $+ 4χ$ καὶ $- 4χ$ ἀμείβει τὰ σημεῖα. Εἰσὶν ἄρα δύω ῥίζαι ἀποφατικαὶ, καὶ μία μόνη καταφατική. Ἀλλ' ἀναλύσωμεν ἤδη τὸν 16 εἰς τοὺς κατ' αὐτὸν παράγοντας, παραλαμβάνοντες τὸν ἕτερον μετὰ τὸν ἕτερον ἀντὶ τοῦ $χ$. Καὶ, ἐπεὶ αἱ πλείους τῶν ῥιζῶν ἀποφατικαὶ, μόνον τὰς ἀποφατικὰς τιμάς.

Παράγοντες τοῦ ἐσχάτου ὅρου	Τὸ ἐκ τῆς Ἐξισώσ. προκύπτον, ἐὰν ἡ τιμὴ τῶν παραγόντων, ἢ οἱ παράγοντες, τοῦ $χ$ ἀντικατασῶσι, καὶ αἱ ἀποφατικαὶ, καὶ καταφ. ποσότητες ἀναιρῶσιν ἀλλήλας.	
± 1	τοῦ -1 ἀντὶ τοῦ $χ$ τεθέντ. προκ.	-9
± 2	τοῦ -2 . .	0
± 4	τοῦ -4 . .	0
± 8	τοῦ -8 . .	-240
± 16	τοῦ -16 . .	-3024

Εὕρηνται οὖν δύω ῥίζαι, ἤτοι -2, καὶ -4. διὰ τούτων γὰρ ἀντὶ τοῦ $χ$ τεθέντων, ἡ Ἐξίσωσις εἰς τὸ μηδὲν οἴχεται. Ἀλλ' ἐπὶ τῶν Κυβικῶν Ἐξισ. καὶ μιᾷ ῥίζῃ ἀγαπητέον, ὡς τῶν ἑτέρων διὰ ταύτης ἀνακαλυπτομένων. Οἷον τεθήτω τὴν -2 εὑρεθῆναι. Ὥςε, ἐὰν $χ = -2$, ἔςι $χ + 2 = 0$ Διὰ τούτου τοῦ τῆς Ἐξισ. παράγ. διαιρ. ἡ Ἐξίσ.

$χ + 2)$

$$
\chi+2)\quad
\begin{array}{r|l}
\chi^3+4\chi^2-4\chi-16 & \chi^2+2\chi-8 \\
\underline{\chi^3\pm 2\chi^2} & \\
+2\chi^2-4\chi & \\
\underline{\pm 2\chi^2\pm 4\chi} & \\
-8\chi-16 & \\
\underline{\mp 8\chi\mp 6} & \\
0\quad\;\; 0 &
\end{array}
$$

Ἡ οὖν τετραγωνικὴ Ἐξίσ. ἐςὶ

$$\chi^2+2\chi-8=0$$

$$\chi^2+2\chi=+8$$

$$\chi^2+2\chi+1=+8+1=9$$

$$\chi+1=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

$$\chi=-1\pm 3$$

Ὥςε χ. α'. $=-1+3=+2$. καὶ β'. $=-1-3=-4$. Αἱ ἄρα ῥίζαι σὺν τῇ πρώτως εὑρεθείσῃ τυγχάνουσι -2, $+2$, καὶ -4. Ἡ δ' Ἐξίσ. ἀνέφυ τῷ πολλαπλ. τῶν ἑξῆς Ποσοτήτων $\chi+2=0$, καὶ $\chi-2=0$, καὶ $\chi+4=0$. ὡς ἐκ τῆς πείρας ἑκάςῳ δῆλον γενήσεται, ταύτας πολλαπλασιάσαντι.

Ζήτησον τὰς ῥίζας τῆς Ἐξισώσ. $\chi^3-10\chi^2+31\chi-30=0$; πάσας καταφατικὰς οὔσας, ὡς τῶν σημείων τρὶς ἐπαμειβομένων. Ὁ 30 διατέμνεται εἰς παράγοντας τούσδε. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15.

 Πειρα-

Πειρασώμεθα οὖν αὖθις τοὺς παράγ. καταφατικοὺς λαμβάνοντες. Καὶ αἱ ῥίζαι γὰρ τοιαῦται. Ἐὰν τὸ $\chi = +1$ τεθῇ, προκύψει ἐκ τῆς Ἐξισ. -8. Ὥςε 1 οὐκ ἂν εἴη ῥίζα τῆς Ἐξισ. Ἐὰν δὲ $\chi = +2$, πάντες οἱ ὅροι ἀναιρήσουσιν ἀλλήλους, εἰς τὸ μηδὲν χωροῦντες. Ἄρα $+2$ ἐςὶ μία ῥίζα τῆς Ἐξισ. Καὶ ἑπομένως $\chi - 2 = 0$.

Δίελε τὴν Ἐξίσ. διὰ τούτου

$$
\begin{array}{l|l}
\chi - 2)\ \chi^3 - 10\chi^2 + 31\chi - 30 & \chi^2 - 8\chi + 15. \\
\qquad \chi^3 \mp 2\chi^2 & \\
\hline
\qquad -8\chi^2 + 31\chi & \\
\qquad \pm 8\chi^2 \pm 16\chi & \\
\hline
\qquad\qquad +15\chi - 30 & \\
\qquad\qquad +15\chi - 30 & \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

Ὥςε

$$\chi^2 - 8\chi + 15 = 0$$

$$\chi^2 - 8\chi = -15$$

$$\chi^2 - 8\chi + 16 = -15 + 16 = +1$$

$$\chi - 4 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$\chi = +4 \pm 1$$

Ὥςε χ. α΄. $= 4 + 1 = 5$

καὶ β΄. $4 - 1 = 3$

Αἱ ῥίζαι ἄρα $+2$, $+3$, $+5$, ἣ ἡ Ἐξίσ. παρήχθη ῥήχθη τῷ Πολλ. τοῦ $\chi - 2 = 0$, $\chi - 3 = 0$, $\chi - 5 = 0$.

§. 402. Καὶ τοῦτον τοίνυν τὸν τρόπον τὰς λογικὰς τῶν Ἐξισ. ῥίζας ζητοῦμεν, ἐὰν χ^3, ἢ καὶ ἐν γένει (τοῦτο γὰρ ἐπὶ πασῶν τῶν ὑπερτέρου βαθμοῦ Ἐξισ. χώραν ἔχει) ἡ ὑπερτάτης δυνάμεως ἄγνωςος ποσότης καθ' ἑαυτὴν ᾖ, καὶ οἱ τῶν λοιπῶν ὅρων συνεργοὶ κλασματικοὶ μὴ ὦσιν. Ἀλλὰ καὶ τὰ κλάσματα δυνάμεθα, τὴν Ἐξισ. εἰς ἑτέραν τρέποντες, ἀποσκευάσασθαι. Ἐπειδὴ δὲ λόγος περὶ τῆς τῶν Ἐξισ. ἐγένετο τροπῆς, ῥητέον καὶ περὶ τούτου βραχέα τινά. Χρησόμεθα δὴ τοῖς δ'. τῶν ὑπολογισμῶν εἴδεσι, Προσθ. Ἀφαιρ. Πολλ. καὶ Διαιρ. ἐπὶ τῶν Ἐξισ. εἰς τὸ καινὰς παραγαγεῖν, ὧν τῶν ῥιζῶν εὑρεθεισῶν, καὶ τῆς προτέρας τῆς δοθείσης αἱ ῥίζαι εὐχερῶς προχειρίζονται. Πᾶσα δὲ ἡ μέθοδος ἐν τούτῳ ςρέφεται, ἐν τῷ δεξιότητα ἔχειν ἀμέλει ἐν τῷ θάτερον ἀντὶ θατέρου ἀντικαθιςᾷν, ἤτοι ἴσον ἀντὶ ἴσου. χρησόμεθα δὲ οὐχ ἁπλῶς, ἀλλ' ἧπερ τὴν τῶν ῥιζῶν τῆς Ἐξισ. εὕρεσιν ῥᾷον ἀνακαλύπτειν ἡγοίμεθα. Καὶ ἐν μὲν τῇ προσθέσει, τῷ χ ἑτέραν τινὰ ἐγνωσμένην προςιθέντες ποσότητα, ἐξισώσομεν ἄμφω ἀγνώστῳ ἑτέρᾳ, κατὰ τὸ δοκοῦν, ἐν δὲ τῇ Ἀφαιρέσει ἀφαιροῦντες ἐκείνην. Οἷον, εἰ δέοι τὴν Ἐξισ. $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$ διὰ τῆς προσθέσεως εἰς ἑτέραν τρέψαι, πρόσθες τῷ χ ἕτερον δεδομένον ἀριθμὸν, καὶ εἶτα ἐξίσωσον αὐτὰ τῷ ψ. Ὡς $\chi + 3 = \psi$. Ἔςω γὰρ χ, ὅ, τι ἂν βούλῃ. ἐὰν τι τούτῳ προςεθῇ, ἔςαι ἄμφω ἴσα ἑτέρᾳ ποσότητι ἀγνώςῳ. Ἔςω οὖν $\chi + 3 = \psi$. ἄρα $\chi = \psi - 3$. Ἤδη ἀντὶ τοῦ χ ἀντικατάςησον πανταχοῦ τῆς Ἐξισ. τῆς δοθείσης τὸ $\psi - 3$. Ἤτοι

$$
\begin{array}{lll}
\text{ἀντὶ τοῦ } \chi^3 \text{ τὸ } (\psi - 3)^3 = & & \psi^3 - 9\psi^2 + 27\psi - 27 \\
- 7\chi^2 = (\psi - 3)^2 \cdot - 7 & = & - 7\psi^2 + 42\psi - 63 \\
+ 7\chi = (\psi - 3) \cdot 7 & = & + 7\psi - 21 \\
+ 15 = & = & + 15 \\
\hline
o = & &
\end{array}
$$

πρόσθες τοὺς ὅρους τῆς καινῆς Ἐξισ. οὕτω. $\psi^3 - 16\psi^2 + 76\psi - 96$

Ἐνταῦθα τὸ $\psi - 3$, α΄. εἰς κύβον ἀρθὲν καταγέγραπται. εἶτα ἐτετραγωνίσθη, καὶ οἱ ὅροι πάντες τοῦ Τετραγώνου τῷ συνεργῷ τῆς προτέρας ἐπολλαπλασιάσθησαν Ἐξισώσεως. γ΄. τὸ $\psi - 3$ ἐπολλαπλασιάσθη μόνον ἐπὶ τὸν συνεργὸν τοῦ χ, καὶ τελευταῖον ἡ γνωςὴ ποσότης, ὡς καὶ πρότερον, ἐγκεχάρακται, τῶν ἴσων δυνάμεων ὑπὸ τὰς ἴσας τεθεισῶν, καὶ τῶν ὅρων ἁπάντων προσεθέντων. Μία οὖν τῶν ῥιζῶν τῆς καινῆς Ἐξισώσεως, ἢ μία τιμὴ τοῦ ψ ἐςὶν $= + 2$. Ἐπεὶ δὲ $\chi + 3 = \psi$. ἐπειδὴ $\psi = 2$, ἔςαι καὶ $\chi + 3 = 2$. (§. 48 δ΄.) Ὥςε $\chi = 2 - 3 = - 1$. Ἔνθεντοι μία τιμὴ τοῦ $\chi = - 1$. Ἐξ αὐτῆς δ' εὑρίσκομεν καὶ τὰς λοιπάς. Εἰσὶ δὲ $+ 5$. καὶ $+ 3$. Εἰ δὲ δι' Ἀφαιρέσεως τρέπεται, ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς ἀγνώςου γνωςήν τινα, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον Ἐξίσωσιν καινὴν παράγομεν. Οἷον, $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15 = o$. Ἔςω $\chi - 3 = \psi$. Ἔςιν ἄρα $\chi = \psi + 3$. Ἐκ ταύτης γενέσθω ἡ καινὴ Ἐξίσ. ὡς πρότερον. Ἔνθεντοι

$$
\begin{array}{lll}
\text{ἀντὶ τοῦ } \chi^3 \text{ τὸ } (\psi + 3)^3 = & & \psi^3 + 9\psi^2 + 27\psi + 27 \\
- 7\chi^2 = (\psi + 3)^2 \cdot - 7 & = & - 7\psi^2 - 42\psi - 63 \\
+ 7\chi = (\psi + 3) \cdot 7 & = & + 7\psi + 21 \\
+ 15 = & & + 15 \\
\hline
o = & & \psi^3 + 2\psi^2 - 8\psi \quad o
\end{array}
$$

Ὑπο-

Ὑπολείπεται οὖν $\psi^3 + 2\psi^2 - 8\psi$. Ὁ δ' ἔσχατος ὅρος διὰ τῆς τροπῆς τῆς Ἐξισ. ἐκπέπτωκε. Σημειωτέον οὖν, ὅτι, εἰ τοῦτο συμβαίνει, μία τῶν ῥιζῶν $= 0$. Ἐπεὶ γὰρ ὁ γ'. ὅρος τὸ παραγόμενον πασῶν ἐςὶ τῶν ῥιζῶν, ἀναγκαίως ἐκπίπτει ὁ ὅρος τῷ 0 πολλαπλασιασθείς. Ὥςε $\psi = \pm 0$. Ἀδιάφορον δ' ὁπότερον τῶν σημείων ἐνταῦθα τεθῇ. Ὅτι $+ 0$ καὶ 0 τὸ αὐτὸ, ἤτοι μηδέν. Ἦν δὲ $\chi - 3 = \psi$. ἄρα καὶ $\chi - 3 = 0$, ἀντὶ τοῦ ψ τοῦ ἴσου ἀντικαταςάντος. Καὶ ἑπομένως $\chi = 0 + 3 = 3$. Ἔςι τοίνυν μία τῶν ῥιζῶν τοῦ $\chi = 3$. Τὰς δὲ λοιπὰς αὐτίκα εὑρήσομεν τῇ διαιρέσει τῆς πρώτης Ἐξισ. διὰ τοῦ $\chi - 3 = 0$. Ὁ αὐτὸς τρόπος ἐςὶν ἐν τῇ τῆς Ἐξισ. τροπῇ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὡς ἡ Ἐξίσ. $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$ πολλαπλ. διὰ 2, ὅ ἐςιν, ἡ ἄγνωςος ποσ. χ πολλαπ. διὰ 2, καὶ τὸ παραγ. ἐξισωθήτω ἑτέρᾳ καινῇ ἀγνώςῳ ποσότητι, οὕτω. $2\chi = \psi$. Ὥςε $\chi = \frac{\psi}{2}$. Ἀντικαταςήτω τὸ εὑρεθὲν ἴσον $\frac{\psi}{2}$ τοῦ χ ἐν τῇ Ἐξ.

Ἤτοι
$$\chi^3 = \left(\frac{\psi}{2}\right)^3 = \frac{\psi^3}{8}$$
$$-7\chi^2 = \left(\frac{\psi}{2}\right)^2 . -7 = -7\frac{\psi^2}{4}$$
$$+7\chi = \frac{\psi . 7}{2} = + \frac{7\psi}{2}$$
$$+15 = + 15$$
$$0 = \frac{\psi^3}{8} - \frac{7\psi^2}{4} + \frac{7\psi}{2} + 15.$$

Εἰ

Εἰ δ' ἡ τοιαύτη Ἐξίσ. $\chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ διὰ τοῦ δ πολλαπλασιασθῇ, εἴη ἂν

$$\delta\chi = \psi. \text{ Ὥςε } \chi = \frac{\psi}{\delta}$$

$$\begin{array}{rcl}
\text{ἄρα } \chi^3 & = & + \frac{\psi^3}{\delta^3} \\
+ \alpha\chi^2 & = & + \frac{\alpha\psi^2}{\delta^2} \\
+ \beta\chi & = & + \frac{\beta\psi}{\delta} \\
+ \gamma & = & + \gamma \\
\hline
o & = & \frac{\psi^3}{\delta^3} + \frac{\alpha\psi^2}{\delta^2} + \frac{\beta\psi}{\delta} + \gamma
\end{array}$$

Ἐὰν δὲ τῆς Ἐξισ. ταύτης πάντας τοὺς ὅρους τῷ δ^3 πολλαπλασιάσωμεν,

$$o = \frac{\psi^3}{\delta^3} + \frac{\alpha\psi^2}{\delta^2} + \frac{\beta\psi}{\delta} + \gamma$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \;.\; \delta^3$$

ἔςαι $o = \psi^3 + \delta\alpha\psi^2 + \delta^2\beta\psi + \delta^3\gamma$.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι, εἰ ἡ ῥίζα τῆς Ἐξισώσ. ἐπίτινα δοθέντα πολλαπλασιασθῆναι πρόκειται ἀριθμὸν, καὶ οὕτω χωρεῖν δυνάμεθα, τουτ. ἕκαςον ὅρον τῆς Ἐξισ. ἐπὶ τὰς δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζειν, ἐκ Γεωμετρικῆς ἀναφυομένας Προόδου, ἧς ὁ α'. ὅρος $=$ 1, ὁ β'. ὁ ἀριθμός. ὁ γ'. ὁ τούτου Τετράγωνος. ὁ δ'. ὁ τούτου Κύβος, κτ π. χ. εἰ πρόκειται πολλαπλασιάσαι τὴν ῥίζαν τῆς εἰς τὸ ο ἀχθείσης Ἐξισ. $\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi + 15$ ἐπὶ τὸν 2, ποιήσομεν τοῦτο, ὑποθέντες ὑπὸ τοὺς ὅρους Γεωμ. Προόδου, ἧς ὁ α'. ὅρος 1, οἱ δὲ λοιποὶ αἱ δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ 2, καὶ ἕκαςου