$$\begin{array}{r}
\chi + 5 = 0 \\
\chi + 3 = 0 \\
\hline
+ 3\chi + 15 \\
\chi^2 + 5\chi \qquad \\
\hline
\end{array}$$

$\chi^2 + 8\chi + 15 = 0.$ ἢ $\chi^2 + 8\chi = -15.$ Τὸ γὰρ ο μετὰ τοῦ ο πολλ. δίδ. ο. Ταὐτὸ γίνεται, καὶ ἀδυνάτων οὐσῶν τῶν τιμῶν, ὅπερ ἀεὶ ἄμφω αἱ τιμαὶ εἶναι ὀφείλουσιν. Εἰ γὰρ τὴν τιμὴν τοῦ χ ἐν ἀδυνάτοις ῥίζαις ἐν γένει θῶμεν $\chi = \alpha \pm \sqrt{-\beta}$, δῆλον ὅτι $\alpha + \sqrt{-\beta}$. καὶ $\alpha - \sqrt{-\beta}$ ἀδύνατοι ποσότητες. Ἀλλ' ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεῖσαι ἀναγκαίως Ἐξίσωσιν παράξουσιν, ἧς τιμαὶ ὑπάρχουσι. π. χ. ἡ Ἐξίσ. $\chi^2 - 6\chi + 12 = 0$ δίδωσι τιμὰς τοῦ χ, α'. $\chi = +3 + \sqrt{-3}$. καὶ β'. $\chi = +3 - \sqrt{-3}$. Ὥςε $\chi - 3 - \sqrt{-3} = 0$. καὶ $\chi - 3 + \sqrt{-3} = 0$. πολλαπλ. μετ' ἀλλήλων.

$$\begin{array}{r}
\chi - 3 - \sqrt{-3} = 0 \\
\chi - 3 + \sqrt{-3} = 0 \\
\hline
+ \chi\sqrt{-3} - 3\sqrt{-3} + 3 \\
- 3\chi + 9 + 3\sqrt{-3} \qquad \\
\chi^2 - 3\chi - \chi\sqrt{-3} \qquad\qquad \\
\hline
\chi^2 - 6\chi + 9 + 3 = 0 \\
= \chi^2 - 6\chi + 12 = 0.
\end{array}$$

§. 390. Γνωςῶν οὖν τῶν τοῦ χ οὐσῶν τιμῶν, καὶ τῆς ἑτέρας τούτων ἐν τῇ εἰς τὸ ο ἀχθείσῃ Ἐξισώσει τεθείσης, γενήσεται διὰ τούτου καὶ ἡ Ἐξίσ. ο. Καὶ, ἐὰν ἡ Ἐξίσ. διάτινος ἀριθμοῦ ἐν αὐτῇ, ἀντὶ τοῦ

χ τε

χ τεθέντος, ο γένηται, ὁ τεθεὶς ἀριθμὸς ἔςαι τιμὴ τοῦ χ π. χ. ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2 + 8\chi + 15 = 0$. ἤν $\chi = 5$, καὶ $\chi = -3$. Θὲς ἀντὶ τοῦ χ τὸν -5 ἐν τῇ Ἐξισώσει, καὶ ἔςαι $+25 - 40 + 15 = +40 - 40 = 0$. Καὶ ἐὰν ἀντὶ του χ ὁ -3 τεθῇ, ἔςαι $+9 - 24 + 15 = +24 - 24 = 0$. Ὅπερ ἄλλως ἔχειν οὐ δύναται.

§. 391. Ἐκ πάντων τῶν εἰρημένων συνάγομεν, ὅτι πᾶσα τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις, εἰς τὸ ο ἀχθεῖσα, θεωρηθείη ἂν, ὡς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύω παραγόντων, εἰς τὸ ο ἀχθέντων, παραχθεῖσα. Ἄμφω δ' αἱ τιμαὶ τοῦ χ, ἐξ ὧν ἡ τοιαύτη ἀνέφυ Ἐξίσωσις, καλοῦνται Ῥίζαι τῆς Ἐξισώσεως. Καὶ πᾶσαν Τετραγ. Ἐξίσ. οὐκ ἂν πλείους, ἢ δύω τοιαύτας τιμὰς τοῦ χ, ἢ δύω ῥίζας ἔχειν. Εἰ γὰρ τρεῖς ἢ καὶ πλείους, εἴη ἂν καὶ τὸ χ εἰς κύβον, ἢ εἰς ὑπερτέραν τινὰ ἠρμένον δύναμιν, καὶ ἡ Ἐξίσωσις οὐκέτι Τετραγωνικὴ ἀκούει.

§. 392. Ἀλλὰ θεωρήσωμεν ἔτι γενικώτατα τὴν Τετραγ. Ἐξίσ. 1) Ἀμφοῖν τῶν τοῦ χ τιμῶν θετικῶν παραληφθεισῶν, τουτ: εἰ θῶμεν $\chi = \alpha$, καὶ $\chi = \beta$, καὶ εχομένως $\chi - \alpha = 0$, καὶ $\chi - \beta = 0$, καὶ ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεισῶν, προκύψει $\chi^2 - \beta\chi - \alpha\chi + \alpha\beta = \chi^2 - (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta = 0$. 2) Ἀποφατικῶν δ' ἀμφοῖν, ἤτοι $\chi = -\alpha$, καὶ $\chi = -\beta$, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου $\chi + \alpha = 0$, καὶ $\chi + \beta = 0$, καὶ ἐπ' ἀλλ: αὖθις πολλαπλ. προκύψει $\chi^2 + (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta = 0$. 3) Τῆς μὲν καταφατικῆς, τῆς δ' ἀποφατικῆς, τουτ. $\chi = +\alpha$, καὶ $\chi = -\beta$. Ὅθεν $\chi - \alpha = 0$, καὶ $\chi + \beta = 0$, καὶ δι' ἀλλ. αὖθις πολλαπλ. προκύψει $\chi^2 + (\beta - \alpha)\chi - \alpha\beta = 0$. Ἐπιτηροῦσι δὲ πρῶτον καθορᾶται κἀπὶ τῶν τριῶν τρόπων τῷ γ. ὅρῳ τὸ παραγόμενον τῶν τιμῶν τοῦ χ ἐνυπάρχειν. Εἰ οὖν αἱ

Τετραγ.

Τετραγ. τῶν Ἐξισώσεων οὐ καθ' ἑαυτὰς εὐχερεῖς εἰς ἐπίλυσιν εἶεν, τὸ παράγομενον εἰς τοὺς κατ' αὐτὸ ἀναλύσαντες παράγοντας, καὶ τιθέντες ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὴν Ἐξίσ. τοὺς παράγοντας καθ ἕνα, εἰς ὅ ἡ Ἐξίσ. $=0$ γένοιτο, εἴχομεν ἂν τὴν τιμὴν τοῦ χ. Ἐργωδέςατον δὲ τοῦτο, τῆς τιμῆς τοῦ χ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ μὴ οὔσης. Χρῶνται μέντοι τῷ τρόπῳ τούτῳ ἐπὶ τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων. δεύτερον. τῷ β' ὅρῳ ἀεὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν, ὡς συνεργὸν τοῦ χ παρεῖναι. Καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ α'. τρόπου τῷ μέσῳ ὅρῳ ἦν συνεργὸς τὸ $-(\alpha+\beta)$, τῷ δὲ β'. τὸ $+(\alpha+\beta)$, τῷ δὲ γ'. τὸ $+(\beta-\alpha)$, ὅπερ (τὸ γ.) ἀλγεβραϊκῶς προςεθὲν δώσει τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν. Καὶ δυνάμεθα τοίνυν τὴν ῥίζαν εἰκάσασθαι τῇ τῶν συνεργιῶν τοῦ β'. ὅρου εἰς μέρη κατατομῇ, ἀπόπειραν ποιούμενοι, εἰ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτων ὁ γ'. προκύπτει ὅρος. τρίτον. ἀμφοῖν τῶν ῥιζῶν, ἢ τιμῶν τοῦ χ θετικῶν οὐσῶν, τὸν μέσον ὅρον τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθείσης Ἐξισώσεως ἀποφατικὸν εἶναι, ἄμφω δὲ τοὺς ἑτέρους θετικούς. Ἀποφατικῶν δ' ἐκείνων οὐσῶν, πάντας τοὺς ὅρους τῆς εἰς τὸ 0 ἀχθ. Ἐξ. καταφατικοὺς Ἀλλὰ τῆς μὲν καταφατικῆς, τῆς δ' ἀποφατικῆς οὔσης, τὸν μὲν β'. ὅρον καὶ ἀποφατικὸν, καὶ καταφατικὸν εἶναι, ἤπερ ἐν τῷ $+(\beta-\alpha)$ τὸ β. ἢ α μεῖζον εἴη, τὸν δὲ γ'. ἀεὶ ἀποφατικὸν, τὸν δὲ α'. ἀεὶ καταφατικόν. Ὅθεν ἐκ τῶν σημείων τῶν ὅρων τῆς Ἐξισώσεως ἔςαι γνωςὸν, πότερον καταφατικὰς, ἢ ἀποφατικὰς ῥίζας ἔχουσιν. Οὕτως ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2-24\chi+108=0$, ἄμφω αἱ ῥίζαι καταφατικαί. Εἰσὶ δὲ $+18$ καὶ $+6$. Ἐν δὲ τῇ $\chi^2+16\chi+55=0$ ἄμφω ἀποφατικαί, αἱ -5, καὶ -11. Ἐν δὲ τῇ $\chi^2+\chi-2=0$ τελευταῖον, ἡ μὲν ἀποφατική, ἡ δ' ἑτέρα καταφατική. -2 καὶ $+1$ Ὡσαύτως κἀν τῇ $\chi^2-5\chi-6=0$ αὖθις ἡ μὲν καταφατικὴ $+6$, ἡ δ' ἀποφ. -1. τέταρτον. τούτῳ

τῳ τῷ τρόπῳ εὐχερῶς τὰς Ἐξισώσεις ποιεῖσθαι, αἷς δύω δοθεῖσαι τιμαὶ ἐνυπάρχουσιν, ἤτοι τῇ προσθέσει τῶν δύω δοθεισῶν τιμῶν προελεύσεται ὁ συνεργὸς τοῦ β΄. ὅρου, ἢ ὁ συνεργὸς τοῦ χ, καὶ τῷ πολλαπλασιασμῷ δι' ἀλλήλων, ὁ γ΄. ὅρος. Τὰ δὲ σημεῖα μετὰ τὴν πρόσθεσιν, καὶ πολλαπλασιασμὸν καθ' ἑαυτὰ δῆλα. π. χ. Εἰ δέοι τετραγωνικὴν Ἐξίσωσιν ποιῆσαι, ἔνθα αἱ τοῦ χ τιμαὶ -8 καὶ $+3$ εἰσὶν, ὥςε $\chi + 8 = 0$, καὶ $\chi - 3 = 0$, πρόσθες -3 καὶ $+8$, ὅπερ $= 5$, καὶ πολλαπλασίασον $+8$ ἐπὶ -3 $= -24$. Ἐὰν οὖν τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν συνεργὸς τοῦ β΄ ὅρου τεθῇ, καὶ τὸ παραγόμενον γ΄. ὅρος γένηται, ἔςαι ἡ Ἐξίσωσις $\chi^2 + 5\chi - 24 = 0$.

§. 193. Ἐὰν δὲ μία μόνον τιμὴ τοῦ χ ἐν τετραγωνικῇ δοθῇ Ἐξισώσει, τῇ διαιρέσει τῆς Ἐξισώσεως δι' αὐτῆς προκύψει ἡ ἑτέρα. τουτέςι διαιρεθείσης τῆς εἰς τὸ ο ἀχθείσης Ἐξισώσεως διὰ τοῦ εἰς τὸ ο ἀχθέντος γνωςοῦ χ, ἐπειδὴ τοῦτο ὁ ἕτερος ἐςὶ παράγων, διὰ τῆς διαιρέσεως ὁ ἕτερος πρόεισιν, εἰς πηλίκον γινόμενος, κατὰ τοὺς ὅρους τῆς διαιρέσεως. π. χ. τῆς Ἐξισώσ. $\chi^2 + 9\chi - 36 = 0$ ἡ ἑτέρα ῥίζα $= +3$. Ὥςε $\chi = +3$, καὶ $\chi - 3 = 0$. Δίελε τὴν Ἐξίσωσιν διὰ τοῦ $\chi \; 3$, καὶ τὸ πηλίκον ἔςαι ἡ ἑτέρα ῥίζα. (Ἡ γὰρ Ἐξίσωσις τῷ πολλαπλασιασμῷ ἀμφοῖν τῶν ῥιζῶν παρήχθη.) Οἷον

$$
\begin{array}{l|l|l}
\chi - 3 = 0) & \chi^2 + 9\chi - 36 = 0 & \chi + 12 = 0 \\
 & \underline{\chi^2 \pm 3\chi} & \\
 & + 12\chi - 36 & \\
 & \underline{+ 12\chi - 36} & \\
 & 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Ὥςε καὶ $\chi + 12 = 0$. ἄρα $\chi = - 12 =$ τῇ ἑτέρᾳ ῥίζῃ.

Αἱ μέχρι τοῦδε πᾶσαι θεωρίαι τὴν φύσιν καὶ ἰδιότητας τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων ἀνιχνεύουσιν ὅτι χρήσιμοι. Ἐπὶ δὲ τῶν τετραγ. μόνων Ἐξισ. οὐκ ἀναγκαῖαι.

Περὶ τῶν Κυβικῶν Ἐξισώσεων, καὶ περὶ τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων ἐν γένει.

§. 394. Κυβικαὶ δ' Ἐξισώσεις ἀμιγεῖς, ἔνθα μόνον ὁ κύβος τῆς ἀγνώςου ποσότητος πάρεςιν, ἐξισούμενος γνωςῇ τινι ποσότητι. τουτ: ἔνθα χ^3 καθ' ἑαυτὸ, οὐδεμία δ' ἑτέρα τῶν ἀγνώςων. Εἰ δὲ τὸ χ^3 καὶ συνεργῷ συνῆπται, ἀχθείη ἂν, ἢ ἐν τοῖς ἀνωτέρω δέδεικται, μόνον ἐπὶ θάτερα. Ὡς $\chi^3 = 343$ ἐςὶν Ἐξίσ. Κυβικὴ ἀμιγής. Ὡσαύτως καὶ ἥδε. $3\chi^3 + 15 = 549$ τοιαύτη ἂν γένοιτο. $3\chi^3 = 549 - 15$. ἢ $3\chi^3 = 534$. καὶ $\chi^3 = \frac{534}{3} = 178$. ἢ καθόλου. $\chi^3 = a$, τοῦ a ὁλοσχερῆ ἀρι μὸν, ἢ κλάσμα, ἢ οἱανδήτινα ἐγνωσμένην ποσότητα σημαίνοντος.

§. 395. Τῷ τοίνυν τὰς τοιαύτας τῶν Ἐξισώσεων ἐπιλύσειν μέλλοντι, ἐξακτέα ἡ κυβικὴ ῥίζα ἐξ ἀμφοῖν τῶν ποσοτήτων, κατὰ τὰ προηγηθέντα, τὴν τοῦ χ διωρισμένην τιμὴν δεικνύουσα, εἴτε καταφατικὴν, εἴτε ἀποφατικὴν οὖσαν, ἧπερ ἂν τὸ σημεῖον ἔχοι, τὸ πρὸ τῆς δεδομένης. Ἡ γὰρ κυβικὴ ῥίζα θάτερον τῶν δυοῖν εἶναι δύναται, ἀλλ' οὐκ ἄμφω ἅμα. π. χ. $\chi^3 = 343$

$$\sqrt[3]{\chi^3} = \sqrt[3]{343}.$$

Καὶ $\chi = 7 =$ τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ 343.

Παρα-