$$\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi}{4}=\pm\varrho+\frac{\pi^2}{4}$$

ἐξαχθ. τῆς ῥίζ. ἔςαι $$\chi+\frac{\pi}{2}=\sqrt{}\left(\pm\varrho+\frac{\pi^2}{4}\right)$$

Ὥςε $$\chi=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{}\left(\pm\varrho+\frac{\pi^2}{4}\right)$$

Ἐπὶ δὲ τῆς β΄. $$\chi^2-\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=\pm\varrho+\frac{\pi^2}{4}$$

τῆς $\sqrt{}$ ἐξ. ἔςαι $$\chi-\frac{\pi}{2}=\sqrt{}\left(\pm\varrho+\frac{\pi^2}{4}\right)$$

καὶ $$\chi=+\frac{\pi}{2}+\sqrt{}\left(\pm\varrho+\frac{\pi^2}{4}\right)$$

Ἀλλὰ σημειωτέον κἀνταῦθα ἐν γένει, ὅτι, ἐπειδὴ πᾶσα τετραγωνικὴ ῥίζα, ὡς κἀπὶ τῶν ἀμιγῶν τετραγωνικῶν Ἐξισώσ. καὶ καταφατ. καὶ ἀποφ. λαμβάνεται, πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ τίθενται ἄμφω τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$.

Ὥςε $$\chi+\frac{\pi}{2}=\pm\sqrt{}\left(\pm\varrho+\frac{\pi^2}{4}\right)$$

καὶ $$\chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{}\left(\pm\varrho+\frac{\pi^2}{4}\right)$$

Ὡσαύτως κἀπὶ τοῦ ἑτέρου $\chi=+\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{}\left(\pm\varrho+\frac{\pi^2}{4}\right)$. Ἐπεὶ δὲ ἡ ῥίζα καταφατικῶς ληφθεῖσα, καὶ τῷ π προςεθεῖσα, τὴν ἑτέραν τοῦ χ τιμὴν

τιμὴν παρέχει, ἀποφατικῶς δὲ, τὴν ἑτέραν, ἐπὶ τῆς ἐσχάτης Ἐξισ. ἔςαι α′. $\chi = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$.

καὶ β′. $\chi = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\left(\pm \rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$.

Τὴν οὖν ῥίζαν ἐξάξομεν, τὰς ποσότητας τὰς μετὰ τὸ ῥιζικὸν κειμένας, συνάψαντες τῇ προσθέσει. πρόκειται δὲ τοῦ ρ τὸ + καὶ —, ὡς καὶ καταφατικοῦ, καὶ ἀποφατικοῦ εἶναι δυναμένου, ἐν ᾧ τὸ $\frac{\pi^2}{4}$ ἀεὶ καταφατικὸν τυγχάνει. Τούτοις δὴ πρόσθες καὶ τὸ, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γνωςὴ ποσότης, ἤ τὸ ρ, ἡ ἀποφατικὴ, καὶ μείζων τοῦ $\frac{\pi^2}{4}$, τηνικαῦτα $\sqrt{\left(-\rho + \frac{\pi^2}{4}\right)}$ ἡ ῥίζα γίνεται ἀδυνάτου ποσότητος, ἐξαχθῆναι ἀδυνατοῦσα, (§. 305.) καὶ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον εἶναι, κατὰ τὴν τοιαύτην ὑπόθεσιν, δεικνύουσα.

§. 379. Ἐκ πάντων τούτων οἱ τῆς ἐπιλύσεως κανόνες τῶν μεμιγμένων Τετραγωνικῶν πηγάζουσιν Ἐξισώσεων. τουτέςι, τῆς Ἐξισώσεως, κατὰ τὰ προηγηθέντα, διαταχθείσης, ἡμίσευσον, καὶ τετράγωνισον τὸν συνεργὸν τοῦ χ, προσθεὶς τοῦτον ἑκατέρωθι, καὶ τὴν ῥίζαν ἐξαγαγὼν ἑκατέρωθεν, (ἥτις ἐπὶ θάτερα, εἴθε καὶ ἄγνωςοι τῶν ποσοτήτων, ῥαδίως εὑρίσκεται. (§. ἀνωτ.)) μετάθες τὸ β′. μέρος τῆς ῥίζης, τὸ παρὰ τῷ χ ὄν, ἐναντίῳ τῷ σημείῳ ἐπὶ θάτερα, καὶ τὸ χ ὑπολειφθήτεται ἴσοι μόνον, καὶ ἡ τούτου διττὴ δύναμις ἐν γνωςαῖς ποσότησι.

§. 380. Τὰ ἑξῆς παραδείγματα τὰ ἐς δεῦρο ῥηθέντα σαφῶς ἀναπτύξουσι.

Α'. Ζήτησον δύω ἀριθμοὺς, ὧν ὁ ἕτερος 12 μονάσι τοῦ ἑτέρου μείζων. Τούτων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθέντων τὸ παραγόμενον ἐςὶ 220.

Λύσις. Ἔςω ὁ ἐλάττων $= \chi$. Ὁ ἄρα μείζων $\chi + 12$. Οὗτοι πολλαπλασιασθήτωσαν. Ὥςε $\chi . (\chi + 12) = \chi^2 + 12\chi$. Τὸ δὲ προκύψαν παραγόμ. $= 220$.

Ἡ δ' Ἐξίσωσις

ἡμίσ. τὸν συν. $\chi^2 + 12\chi = 220$.

τοῦ χ. τετρ. ——————

αὐτὸν, $\chi^2 + 12\chi + 36 = 220 + 36 = 256$

καὶ πρ. ἑκατ. ——————

Ἐξάγ. τὴν $\chi + 6 = \pm \sqrt{256} = \pm 16 =$ τῇ ῥίζῃ

ῥ. ἑκατ.

——————

$$\chi = -6 \pm 16$$

Ἔχει ἄρα τὸ χ δύω τιμὰς, ἢ δυνάμεις, ἄμφω δυνατὰς οὔσας. ἤτοι $\chi = -6 + 16 = 10$. Καὶ $\chi = -6 - 16 = -22$. Ὡς ἐπὶ μὲν τοῦ α'. ὁ μείζων ἀριθμὸς $= 10 + 12 = 22$. ἐπὶ δὲ τοῦ β'. $= -22 + 12 = -10$ Ἐπ' ἀμφοῖν δ' ἀληθεύει καὶ τὸ Πρόβλημα. Καὶ γὰρ $10 . 22 = +220$. Καὶ $-22 . -10 = +220$. Τῆς δ' Ἐπιλύσεως τοῦ προβλ. γενικῶς ἀποδιδομένης, κείσθω $= \chi$ ὁ ἐλάσσων. Ἡ μεταξὺ τῶν δυοῖν διαφορὰ $= \beta$. ὁ μείζων ἄρα $\chi + \beta$. Τὸ ἐξ ἀμφοῖν παραγόμ. ἔςω $= \gamma$. Ἡ δ' Ἐξίσωσις

$$x \cdot (x + \beta) = \gamma$$ ἢ

$$x^2 + \beta x = \gamma.$$

ἀναπλήρ. τὸ τετράγ. $x^2 + \beta x + \frac{1}{4}\beta^2 = \gamma + \frac{1}{4}\beta^2 = \frac{4\gamma + \beta^2}{4}$

Ἐξαχθ. ἡ $\surd$

$$x + \tfrac{1}{2}\beta = \pm \surd \frac{(4\gamma + \beta^2)}{4}$$ Καὶ ἐπεὶ ἡ ῥίζα τοῦ παρον. λογιστή,

$$x + \tfrac{1}{2}\beta = \pm \surd \frac{(4\gamma + \beta^2)}{2}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\beta \pm \surd \frac{(4\gamma + \beta^2)}{2}$$

§. 381. Β΄. Ζητηθήτωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, ἐν συνεχεῖ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ κείμενοι, καὶ οὕτως ἔχοντες, ὥςε τὸ κεφάλ. τοῦ α΄. καὶ β΄. = 10 εἶναι, τὴν δὲ διαφορὰν τῶν δύω τελευταίων = 24.

Λύσις. Ἔςω ὁ α΄. = χ. Καὶ ἐπεὶ τὸ κεφάλ. τοῦ α΄. καὶ β΄. = 10, κατὰ τὴν ὑπόθ. ἀναγκαίως ὁ β΄. τοσούτῳ ἐλάττων ἔςαι τοῦ 10, ὅσῳ μέγας ὁ α΄. τουτ. ἔςαι 10 − χ. Ὅτι 10 − χ + χ = 10. Ἐπεὶ δ' αὖθις οἱ δύω ἔσχατοι διάφοροι ἀλλήλων 24 μονάσι, καὶ συνεχῆ γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι χρή, ἔνθα ὁ β΄ καὶ γ΄. ἀριθμὸς ἴσοι ἀλλήλοις. (§. 234.) ἤτοι καὶ ὁ γ΄ = 10 − χ. ὁ δ΄. ἀριθμὸς, ὅς ὁ παρ' ἡμῖν ζητούμενος γ΄. τυγχάνει = 34 − χ ἔςαι. Τὴν γὰρ διαφορὰν 24 εἶναι χρὴ ἀπὸ τοῦ προηγουμένου, καὶ ἐὰν 10 − χ ἀπὸ τοῦ 34 − χ ἀφαιρεθῇ, ὑπολείπ. ἡ διαφορὰ 24. Πᾶσα οὖν ἡ ἀναλογία εἴη

$$x : 10 - x = 10 - x : 34 - x.$$

Ἐὰν

Ἐὰν οἱ δύω ἄκροι, καὶ οἱ δύω μέσοι ὅροι ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιασθῶσι, προκύψει ἤγε ἡ Ἐξίσωσις.

$$34\chi - \chi^2 = \chi^2 - 20\chi + 100$$

$$-100 = 2\chi^2 - 54\chi \quad : 2$$

$$-50 = \chi^2 - 27\chi$$

ἀναπλήρ. τὸ τετράγ.

$$-50 + \left(\tfrac{27}{2}\right)^2 = \chi^2 - 27\chi + \left(\tfrac{27}{2}\right)^2 \text{ ἢ}$$

$$-50 + \tfrac{729}{4} = \chi^2 - 27\chi + \tfrac{729}{4}$$

$$\tfrac{529}{4} = \chi^2 - 27\chi + \tfrac{729}{4}$$

ἐξάγ. τὴν $\surd$

$$\pm \surd \tfrac{529}{4} = \chi - \tfrac{27}{2} \quad (\S.\ 78.)$$

Ἡ τῆς ῥίζης ἐνεργεία ἐξαχθείσης

$$\pm \tfrac{23}{2} = \chi - \tfrac{27}{2}$$

$$\tfrac{27}{2} \pm \tfrac{23}{2}. \text{ ἢ } \frac{27 \pm 23}{2} = \chi$$

Ὥςε χ. α'. $= \frac{27 + 23}{2} = \frac{50}{2} = 25$

Καὶ β'. $= \frac{27 - 23}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Ὡς ἐπὶ μὲν τοῦ α'. οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ χ, $10 - \chi$, $34 - \chi$ εἰσὶ $+ 25$ — 15 καὶ $+ 9$ ἡ δ' ἀναλογία $25 : -15 = -15 : 9$. Ἐπὶ δὲ τοῦ β'. οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ, 2, 8, 32. καὶ ἡ ἀναλογία $2 : 8 = 8 : 32$. Ἐπ' ἀμφοῖν τὸ κεφάλ. τοῦ α'. καὶ β'. ὅρου $= 10$. Ὅτι καὶ $25 - 15$, Καὶ $2 + 8 = 10$.

= 10. Καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύω τελευτ. ὅρων = 24. κατὰ τὸ Πρόβλημα.

§. 382. Γ΄. Ζήτησον 2 ἀριθμοὺς, ὧν τὸ κεφάλ. 15, καὶ ὧν τὸ παραγόμενον 54. Τοῦτο δοκεῖ Ἐξίσωσιν παράγειν, δύω ἀγνώςους περιλαμβάνουσαν, χ καὶ ψ. Ἀλλ' εὐχερῶς, ὡς αὐτίκα προφανὲς ἔςαι, εἰς μίαν ἄγνωςον ἀναχθήσεται. Οἱ δύω ἀριθμοὶ ἔςωσαν χ καὶ ψ. Ὥςε κατα τὸ Πρόβλ. $\chi + \psi = 15$. Καὶ $\chi\psi = 54$.

Ἐπειδὴ $\chi + \psi = 15$ ἀντικαταςάντος τούτου ἀντὶ τοῦ χ ἐν τῇ Ἐξισ. $\chi\psi = 54$. ἔςαι

$$\chi = 15 - \psi$$

$$(15 - \psi)\,\psi = 54$$

$$15\,\psi - \psi^2 = 54$$

ἢ

$$-\,54 = \psi^2 - 15\,\psi$$

ἀναπ. τὸ τετρ.

$$-\,54 - \left(\tfrac{15}{2}\right)^2 = \psi^2 - 15\,\psi - \left(\tfrac{15}{2}\right)^2$$

$$-\,54 + \tfrac{225}{4} = \psi^2 - 15\,\psi + \tfrac{225}{4}$$

ἢ

$$-\tfrac{216}{4} + \tfrac{225}{4} = \tfrac{9}{4} = \psi^2 - 15\,\psi + \tfrac{225}{4}$$

Ὥςε

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \tfrac{3}{2} = \sqrt{\left(\psi^2 - 15\,\psi + \tfrac{225}{4}\right)} = \psi - \tfrac{15}{2}$$

$\tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{2} = \tfrac{18}{2} = 9 = \psi$. Ἦν δὲ $\chi + \psi = 15$. ψ δὲ $= 9$. ἄρα $\chi = 6$.

§. 383. Γυνή τις ἐρωτηθεῖσα, ποσαετὴς εἴη, ἀπεκρίνατο. Ἡ ἐμὴ μήτηρ ἐν τῷ γεγεννηκέναι με ἦν εἰκοσιτεσσαραετής. Ἐὰν οὖν ἡ παροῦσα ἡλικία τῆς μη-

μητρός μου μετὰ τῆς ἐμῆς, ἣν ἤδη ἄγω, ἡλικίας πολλαπλασιασθῇ, προκύψουσιν 756 ἔτη. Ζητεῖται, ποσαετὴς ἡ θυγάτηρ, καὶ ποσαετὴς ἡ μήτηρ.

Λύσις. Κείσθω τὴν θυγατέρα εἶναι χ ἐτῶν. Ἡ μήτηρ ἄρα ἔσαι $24 + \chi$ ἐτῶν, ἦν γὰρ 24 ἐτῆς, ἐκείνην γεννήσασα, οἷς (24 ἔτ.) προςίθεται καὶ τὰ παρόντα ἔτη τῆς θυγατρός, πολλαπλ. δι' ἀλλήλων τὰ ἔτη ἀμφοῖν. $(24 + \chi) \cdot \chi = 24\chi + \chi^2$. Ταῦτα δ' ἔσαι $=$ 756. Ὅθεν ἡ Ἐξίσ.

$$\chi^2 + 24\chi = 756$$

ἡ μίσ. τὸν συν. τοῦ χ. τετρ. καὶ πρόσθες ἑκατ. $\chi^2 + 24\chi + 144 = 756 + 144$

ἢ

$$\chi^2 + 24\chi + 144 = 900$$

ἐξ. τὴν $\surd$ ἑκ.

$$\chi + 12 = \pm \surd 900 = \pm 30.$$

$\chi = - 12 \pm 30 =$ τῇ ἡλικίᾳ τῆς θυγατρός. Ἐνταῦθα μόνον ἡ ἑτέρα τιμὴ τοῦ χ χρήσιμος, ἤτοι $\chi = - 12 + 30 = 18$. Οὐχὶ δὲ καὶ ἡ ἑτέρα $\chi = - 12 - 30$. Ὥςε ἡ μὲν θυγάτηρ 18 ἐτῆς. Ἡ δὲ μήτηρ, ὡς 24 ἐτῆς, ὂν τῷ ταύτην τεκεῖν, ἐςὶν ἤδη $24 + 18 = 42$ ἐτῶν. Καὶ $42 \cdot 18 = 756$. Λέλυται ἄρα τὸ ζητούμενον.

§. 384. Ε'. Πρόβατά τινας 200 θαλήρων ὠνησαμένου, εἰ τοσούτου 20 ἔτι εἰλήφει, ἕκαςον πρόβατον ἡμίσει θαλήρῳ ἔλαττον ἂν ἐτιμήθη, ἢ ἤδη. Ζητεῖται, πόσα τὰ πρόβατα;

Λύσις.

Λύσις. Τεθήτω τὰ πρόβ. ψ. Καὶ ἐπεὶ πάντα 200 θαλήρων ἄξια, ἕκαςον πρόβ. τιμᾶται $\frac{200}{\psi}$ θαλ.

Καὶ γὰρ ψ πρόβατα : 200 θαλ. = 1 πρόβατον : $\frac{200}{\psi}$ θαλ. εἴκοσι πρόβ. ἔτι ἐκείνοις προςεθ. εἶεν ἂν ψ + 20 πρόβ. Καὶ τηνικαῦτα ἦν ἂν τὸ πρόβ. ἄξιον $\frac{200}{\psi+20}$ θαλ. Τὸ δὲ ἡμ. θαλ. ἔλαττον ἄξιον τῆς προτέρας τιμῆς τοῦ προβάτου. Ὥςε, ἐὰν ἀπὸ τῆς προτέρας τιμῆς ἑκάςου προβάτου $\frac{1}{2}$ θάλ. ἀφαιρεθῇ, ἔςαι ἴση τῇ β΄. τιμῇ. τουτ.

$$\frac{200}{\psi+20} = \frac{200}{\psi} - \frac{1}{2}$$

τὰ κλ. ὑπὸ τὸν αὐτ. παρον.

$$\frac{200}{\psi+20} = \frac{400-\psi}{2\psi}$$

τὰ κλ. τῷ πολλαπ. ἀποσκευασθ.

$$400\psi = 400\psi - \psi^2 + 8000 - 20\psi$$

τὰς ἀγν. ἐπὶ θάτ.

$$\psi^2 + 20\psi = 8000.$$

τὸ τετρ. ἀναπλ.

$$\psi^2 + 20\psi + 100 = 8100$$

ἐξαχθ. ἡ $\sqrt{}$,

$$\psi + 10 = \pm\sqrt{8100} = \pm 90$$

$$\psi = -10 \pm 90.$$ Τὸ -90 περιττόν.

Ὥςε ὑπολείπεται ἡ ἑτέρα τοῦ ψ τιμή. ἤτοι $\psi = -10 + 90 = 80$. Ὠνήσατο ἄρα 80 πρόβ.

πρόβ. 200 θαλ. Ὧν ἕκαστον ἄξιον $\frac{200}{90} = 2\frac{2}{9}$ θαλ.

Εἰ δ' ἔτι καὶ 20 εἰλήφει τοσούτου, εἶχεν ἂν 100. πρόβ. ὧν ἕκ. 2 θαλ. ἐτιμήθη, ἤτοι $\frac{2}{9}$ θαλ. ἔλαττον, ἢ ἤδη.

§. 385. Ζ'. Ἵππον τρεῖς Α, Β, καὶ Γ κοινῶς πριάμενοι 120 θαλ. συνέθεντο καταβαλεῖν. Ζητοῦσι δ' εἰ τοσαῦτα χρήματα μεθ' ἑαυτῶν ἔχοιεν, 121 θάλ. τοῖς τρισὶν ἅμα πάσεισιν, οὕτω μέντοι, ὥστε Β 1 θαλήρῳ τοῦ Α πλεονεκτεῖν, Γ δὲ τοσούτους ἔχειν, ὅσος ὁ τῶν θαλ. τοῦ Α ἀριθμὸς, ἑαυτῷ πολλαπλασιασθεὶς, ἢ τετραγωνισθείς. Πόσους ἕκαστος ἰσχήκει;

Λύσις. Ἐχέτω Α, χ θαλ. Β, $\chi + 1$, Γ δὲ $\chi \cdot \chi = \chi^2$. πάντες δὲ ἴσοι 121. Ἤτοι

$$\chi^2 + \chi + 1 + \chi = 121$$

ἢ

$$\chi^2 + 2\chi + 1 = 121$$

ἐξάγ. τὴν $\surd$.

$$\chi + 1 = \surd 121 = \pm 11$$

$\chi = -1 + 11$. Κἀνταῦθα ἡ $+$ μόνον τιμὴ τοῦ χ χρήσιμος. Ὥστε $\chi = -1 + 11 = 10$. Ἔνθεντοι Α ἔχει 10 θαλ. Β. 11. καὶ Γ, 100.

Εἰ δ' ἡ τιμὴ -11 παρείληπτο, ἦν ἂν $\chi = -12$. Καὶ $\chi + 1 = -11$. Καὶ $\chi^2 = +144$. Ὅθεν καὶ -11, -12 καὶ $+144$ ὡσαύτως $= 121$. Ἀλλὰ ταύτῃ χρήσασθαι περιττόν.

§. 386.

§. 386. Εἰσὶ δὲ καὶ Προβλήματα εἰς τετραγωνικὰς φέροντα Ἐξισώσεις, ἐν οἷς δύω, τρεῖς, καὶ πλείους ἐνυπάρχουσι τῶν ἀγνώςων ποσοτήτων. Ἐὰν οὖν καὶ τοσαῦται συνιςῶνται τῶν Ἐξισώσεων, τὸ Ζήτημα ἐςὶ διωρισμένον. Καὶ δίδονται ἄρα δύω διωρισμέναι τιμαὶ, κατὰ τὸν αὐτὸν εὑρισκόμεναι τρόπον, ὡς κἀπὶ τῶν τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξισώσ. (§. 363. κτ.)

§. 387. Η'. Ἄνδρες καὶ γυναῖκες συνέπιον ἀριθμοῦντινα ξεςῶν οἴνου, τὸ ἥμισυ τῶν ξεςῶν, ὅσος ὁ τῶν γυναικῶν ἀριθμός. Ἀποτίσαι δ' ὑπὲρ τούτων θαλ. 3, καὶ γρόσσους 20 (ἕκαςος γρόσσος = 2 ὀβ. καὶ 2 λεπτοῖς παρ' ἡμῖν) χρή. Ἀλλὰ συντίθενται ἀλλήλοις κληρώσασθαι, πότερον, οἱ ἄνδρες, ἢ αἱ γυναῖκες ἀποτίσουσι. Καὶ εἰ μὲν οἱ ἄνδρες, ἕκαςος ἀποτίσει τετράκις τοσαῦτα λεπτὰ, ὅσοι αὐτοὶ ἅμα. Εἰ δ' αἱ γυναῖκες, τοσαῦτα λεπτὰ, ὅσαι αὐταί. Πόσοι οἱ ἄνδρες, καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες; πόσους ξέςας οἴνου ἔπιον; καὶ πόσου ἕκαςος τιμᾶται ξέςης;

Λύσις. Τὰ δύω τελευταῖα τῶν Ζητημάτων, ὡς ἐκ τοῦ προβλήμ. δῆλον, διὰ τῆς ἐπιλύσεως διορίζονται τῶν πρώτων. Κείσθωσαν ψ ἄνδρες, καὶ χ γυναῖκες. Εἴπερ οἱ ἄνδρες ἀποτίσαι ὀφείλουσι, καταβαλεῖ ἕκαςος τετράκις τοσαῦτα, ἢ αὐτοί. Ἐκ τούτου ἔχομεν εὑρεῖν τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνδρῶν καταβληθησόμενον. ἤτοι 1 ἀνὴρ : $4\psi = \psi$ ἀνδ. : $4\psi^2$. Ὥςε $4\psi^2$ λεπτὰ διδοῦσι πάντες οἱ ἄνδρες. Εἰδ' αἱ γυναῖκες, κατὰ τὴν ὑπόθ.

1 γυνὴ : χ λεπτὰ = χ γυναῖκες : χ^2 λεπτά. Ἔνθεντοι πᾶσαι αἱ γυναῖκες διδόασι χ^2 λεπτά. Ἐπεὶ δ' ἄμφω ἴσα, ἔςαι ἄρα $\chi^2 = 4\psi^2$

$$\chi = \sqrt{4\psi^2} = 2\psi.$$

Ὥςε

Ὥςε ὅτι ἅπαξ τοσαῦται γυναῖκες, ἢ ἄνδρες. τὸ κεφάλ. τὸ ὑπὸ τῶν γυν. καταβλ. ἦν χ^2 λ. ἦν δὲ 3 θαλ. καὶ 20 γρ $=$ 1024 λεπτοῖς. Ὅθεν

$$\chi^2 = 1024$$

$\chi = \sqrt{1024} = 32 =$ τῷ ἀριθμῷ τῶν γυναικῶν. Καὶ ἐπειδὴ $\chi = 2\,\psi$. $\frac{\chi}{2} = \psi$. ἦσαν $\frac{32}{2} = 16$ ἄνδ. ἔπιον δὲ οἶνον ἥμισυ ξεςῶν, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν, ἤτοι $\frac{\chi}{2}$ ξές. $\frac{32}{2} = 16$ ξές. Ἐπεὶ δὲ 16. ξ. τιμῶνται 3 θαλ. καὶ 20 γρόσσων, ὁ ξ. τιμᾶται 8 γρ. Εἰ οὖν οἱ ἄνδρες ἀποτίσουσιν, ὀφείλει ἕκαςος 4ψ λεπτ. ἢ $4 \cdot 16$ λεπτ. $=$ 8 γρόσ. Εἰ δ' αἱ γυναῖκες, ἑκάςη καταβαλεῖ χ λεπτ. ἢ 32 λεπτ. $=$ 4 γρόσ. Ἐπ' ἀμφοῖν προκύπτει 3 θαλ. 20 γρόσ.

§. 388. Θ'. Ζήτησον δύω ἀριθμοὺς, χ καὶ ψ, ὧν τὸ παραγόμενον, τὸ κεφάλαιον, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν κατ' αὐτοὺς τετραγώνων ἴσα.

Λύσις. Τὸ παραγόμ. τῶν ἀριθμῶν τεθήτω $=$ $\chi\psi$. τὸ τούτων κεφάλαιον $\chi + \psi$. ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν $= \chi^2 - \psi^2$. Ὥςε, κατὰ τὸ πρόβλημα, I) $\chi + \psi = \chi\psi$. II) Καὶ $\chi^2 - \psi^2 = \chi\psi$. Καὶ $\chi + \psi = \chi^2 - \psi^2$. Ἀλλὰ $\chi^2 - \psi^2 = (\chi + \psi) \cdot (\chi - \psi)$, ἐξ ὧν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκεῖνο ἀναφύεται. Ἄρα, ἐὰν

$\chi + \psi$

$$\underline{\chi+\psi = \chi^2-\psi^2}$$ ἔσαι καὶ

$$\underline{\chi+\psi = (\chi+\psi)\cdot(\chi-\psi)} : \chi+\psi.$$

$$\underline{\chi+\psi} = \chi-\psi$$

$$\underline{\chi+\psi}$$ ἢ

$$\underline{= \chi-\psi}$$ ὥστε

$$1+\psi = \chi.$$

'Επειδὴ ἐν 1) $\chi+\psi = \chi\psi$, ἀντικατασήσασιν ἐν ταύτῃ τῇ Ἐξισώσει τὸ ἰσοδύναμόν τοῦ χ, ἤτοι ἀντὶ τοῦ χ τὸ $1+\psi$, ἔσαι $\underline{1+\psi+\psi = (1+\psi).\psi}$ ἢ

$$\underline{2\psi+1 = \psi^2+\psi}$$

$$\underline{1 = \psi^2+\psi-2\psi = \psi^2-\psi}$$

τὸν συνεργὸν τοῦ ψ, ὅς $=1$ ἐστιν, ἡμισ. τετραγ. καὶ πρόσθες ἑκατερ.

$$\underline{1+\tfrac{1}{4} = \psi^2-\psi+\tfrac{1}{4}}$$ ἐξάγ. τ. $\sqrt{}$

$$\underline{\pm\sqrt{\tfrac{5}{4}} = \psi-\tfrac{1}{2}}$$

$$\underline{\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{5}{4}} = \psi}$$ Καὶ ἐπειδὴ ἡ ῥίζα τοῦ 4 λογική.

$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = \psi$$

'Επεὶ δὲ κατὰ τὴν προηγηθεῖσαν Ἐξίσωσιν $1+\psi=\chi$, ἀντικατασάντος, ἀντὶ τοῦ ψ, τοῦ εὑρεθέντος, ἔσαι $\chi =$

$$1+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}. \quad \text{ἢ} \quad \frac{2}{2}+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} =$$

$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \chi$. Εὕρηνται οὖν οἱ ἀριθμοὶ οἱ ζητούμενοι. ἕκαςος δ' ἔχει δύω τιμὰς, ὧν ἐν τοῖς ῥιζικοῖς σημείοις ταῖς δύω + ποσότησιν, ἢ ταῖς δύω — ἂν χρησαίμεθα. παραληφθήτωσαν αἱ + ποσότητες, ἐν αἷς 1) τὸ παραγόμ. ἀμφοῖν τῶν ἀριθμῶν ἐςὶ χψ, ἢ ψχ. Ὥςε $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. ὁ πολλαπλ.

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$+ \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4}$$
$$+ \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4}$$
$$\frac{3}{4} + \frac{4\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} + \sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}.$$

Τὸ κεφάλαιον ἀμφοῖν τῶν ποσοτήτων, ἢ $\chi + \psi$ $= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{2} =$ $2 + \sqrt{5}$.

Ἡ διαφορὰ τῶν Τετραγώνων, ἢ $\chi^2 - \psi^2$.

Τετραγων. τὸ ψ. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$+\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{5}}{4}+\frac{5}{4}=\frac{6}{4}+\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\psi.$$

τετραγων. καὶ χ ἤδη

$$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$+\frac{3\sqrt{5}}{4}+\frac{5}{4}$$

$$+\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{9}{4}+\frac{6\sqrt{5}}{4}+\frac{5}{4}=\frac{14}{4}+\frac{6\sqrt{5}}{4}=\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Ὥστε $\chi^2-\psi^2=\left(\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$=\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}+$

$\frac{3\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{7-3}{2}+\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2}=\frac{4}{2}+$

2

$\frac{2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} = \chi^2 - \psi^2$. Λέλυται ἄρα τὸ Πρόβλημα.

§. 389. Καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ περὶ τῶν Τετραγωνικῶν Ἐξισώσεων. Πρὶν ἢ δ' εἰς τὰς τοῦ γ'. βαθμοῦ μεταβῆναι, σημειωτέον ἔτι τινὰ περὶ ἐκείνων, τῆς ἐκείνων φύσεως, καὶ ἐπιλύσεως μᾶλλον καθολικωτέραν τὴν ἔννοιαν παρέχοντα. Αἱ τετραγωνικαὶ τῶν Ἐξισώσεων, καθὰ προὐχειρίσαμεν, ἐπιδεκτικαὶ διπλῆς ἐπιλύσεως τυγχάνουσιν, ὡς πρὸ τῆς ῥίζης ἀμφοῖν τῶν σημείων + καὶ — προκειμένων, καὶ τῆς τετραγ. ῥίζης καταφατικῆς τε καὶ ἀποφατικῆς ἐκληφθῆναι δυναμένης. ἀεὶ γὰρ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῆς ἐφ' ἑαυτὴν καταφατικὸς προκύπτει τετράγωνος. Ἐὰν δὲ καὶ τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης, τὸ παρὰ τῷ χ, ἐπὶ θάτερα μετενεχθῇ, ἵνα τὸ χ μονωθῇ, τὸ χ, ἢ κυρίως, ἡ ῥίζα τῆς Ἐξισώσεως διπλῆν τιμὴν λαμβάνει. καὶ ἐπὶ μὲν τῶν πλειόνων Ἐξισώσεων γίνεται τοῦτο ἐνεργείᾳ, τουτ. ἡ ῥίζα αὐτῶν ἅμα τὰς τιμὰς ἄμφω παραδέχεται, αἵτινες ἤτοι ἄμφω καταφατικαὶ, ἢ ἄμφω ἀποφατικαὶ, ἢ ἡ μὲν καταφατικὴ, ἡ δ' ἑτέρα ἀποφατική. Ἐνίοτε δὲ μίαν καὶ μόνην λαμβάνει, μᾶλλον δὲ ἄμφω εἰσὶν ἀδύνατοι. Ὡς ἐκ τῶν παραδ. δῆλον ἡμῖν ἔςαι.

Ἡ Ἐξίσωσις $\chi^2 - 12\chi + 36$, καταλλήλως ἐπιλυθεῖσα, δίδωσι $\chi = + 6 + \sqrt{0}$. ἢ ἐπειδὴ ἡ $\sqrt{0} = 0$, $\chi = + 6$. Ἔςιν ἄρα τῷ χ μία μόνη τιμή. Εἰ γὰρ $\chi^2 - 12\chi + 36 = 0$, ἔςι καὶ $\chi^2 - 12\chi = - 36$. ἄρα καὶ $\chi^2 - 12\chi + 36 = - 36 + 36 = 0$. Ὥςε $\chi - 6 = \sqrt{0}$. καὶ $\chi = + 6 + \sqrt{0}$. Ἡ δ' Ἐξίσ. $\chi^2 + 10\chi + 48 = 0$ δίδωσι α'. $\chi = - 5 + \sqrt{- 23}$. Καὶ β'. $\chi = - 5 - \sqrt{- 23}$, ἄμφω ἀδυνάτους τι-

μὰς

μῆς οὔσας. Συνιδεῖν δὲ ῥάδιον, ὅτι, ἐὰν καὶ τιμαὶ τοῦ χ προκύψωσι, καὶ τὰς τοιαύτας τῶν Ἐξισ. εἰς τὴν $\chi = 0$ ποιεῖν ἔχομεν. Τοῦτο δ' ἔςαι, εἰ τὴν εὑρεθεῖσαν, ἢ εὑρεθείσας τιμὰς τοῦ χ, ἢ τῆς ῥίζης τῷ χ ἀντικειμένοις τοῖς σημείοις προσθείημεν. Εἰ π. χ. ἐκ τῆς Ἐξισώσεως $\chi^2 + \chi - 20 = 0$, αἱ τιμαὶ $\chi = - 5$, καὶ $\chi = + 4$ εὑρεθεῖεν, προςεθέντος ἐπὶ τῆς α'. τοῦ 5 τῷ χ ἐναντίῳ τῷ σημείῳ, ἡ Ἐξίσ. γενήσεται $\chi = 0$. Ἐὰν $\chi = - 5$, ἔςαι καὶ $\chi + 5 = 0$ ἀναγκαίως. Ὅτι $- 5 + 5 = 0$. Ἔνθα τὰ χ ἄμφω διάφορα. Ἐννοοῦνται δὲ διὰ τούτων (τῶν χ) αἱ τῆς Ἐξισώσ. ῥίζαι. Ὅθεν ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλ. χ^2 παράξουσιν. Ἐὰν ἄρα $\chi = + 3$, ἔςαι καὶ $\chi - 3 = 0$. ἢ ἐν γένει, ἐὰν $\chi = - \alpha$, ἔςι καὶ $\chi + \alpha = 0$. καὶ εἰ $\chi = + \alpha$, ἔςι καὶ $\chi - \alpha = 0$.

Ἐὰν δὲ δύω τοιαῦται τοῦ χ τιμαὶ, αἱ εἰς 0 ἀχθεῖσαι, ἢ καὶ μία, εἰ μία παρῇ, ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθῶσιν, ἀνάγκη πᾶσα τετραγωνικὴν Ἐξίσωσιν προελθεῖν $= 0$ ὡσαύτως οὖσαν, ἢ ἧς αἱ τιμαὶ καὶ δυνάμεις τῶν ὅρων ἀλλήλας ἀναιροῦσιν, εἴπερ ἀμέλει τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ χ ἀντὶ τοῦ χ ἐν τῇ Ἐξισ. ἀντικαθιςῶμεν, ὅλην τὴν Ἐξίσ. εἰς τὸ μηδενικὸν ἄγοντες. Ἀλλὰ καὶ τοιαύτην Ἐξίσωσιν προκύψαι ἀνάγκη, ἥτις, ἐπιλυομένη, τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ χ παράσχοι, ἐξ ὧν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀνέφυ. Οἷον ἐπὶ τῆς Ἐξισ. $\chi^2 + 8\chi + 15 = 0$. ἢ $\chi^2 + 8\chi = - 15$, ἡ μὲν ἑτέρα τιμὴ τοῦ $\chi = - 5$, ἡ δ' ἑτέρα $\chi = - 3$. ἔςιν ἄρα $\chi + 5 = 0$, καὶ $\chi + 3 = 0$, αἵτινες πολλαπλασιασθ. μετ' ἀλλήλων.