$$\psi = \frac{16 + 32 - 24}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$\chi = \frac{16 - 32 + 24}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\omega = \frac{32 - 16 + 24}{2} = \frac{40}{2} = 20.$$

Ἔςιν ἄρα $\chi + \psi = 4 + 12 = 16$

$\chi + \omega = 4 + 20 = 24$

$\psi + \omega = 12 + 20 = 32$. Καὶ τῶν μὲν τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξισώσεων ἅλις.

Περὶ τῶν Ἐξισώσεων τοῦ β'. βαθμοῦ.

§. 368. Τοῦ δὲ δευτέρου βαθμοῦ, ἢ Τετραγωνικαὶ Ἐξισώσεις καλοῦνται, ἐν αἷς ἡ ὑπερτάτη δύναμις τῆς ἀγνώςου ἡ β'. τυγχάνει. Ὡς $\chi^2 = 3\alpha + \beta$. ἢ $3\chi^2 - \gamma = 5\alpha\beta + \frac{\delta}{2}$. ἢ $\chi^2 - \pi\chi = 3\pi\rho - \frac{3}{4}\delta$. ἢ

$$5\chi^2 - 3\pi\chi + \rho\chi = 2\gamma\chi + \delta.$$

§. 369. Προὔργου δὲ κἀνταύταις, κατὰ τὰς τοῦ προβλήματος ὑποθέσεις, τὴν Ἐξίσωσιν συγκροτεῖν, τοὺς ὅρους, τοὺς τὴν ἄγνωςον περιέχοντας, ἄγοντας ἐπὶ θάτερα τῇ Προσθέσει, ἢ Ἀφαιρέσει, ἢ μᾶλλον, τῇ τῶν σημείων τροπῇ. Ὡς, εἰ αὐτὴ πρόκειται

κειται $3\chi^2 + 5\chi\gamma - \gamma = 15\chi + \rho$. ἥτις, μεταθέντων τῶν ὅρων, ἔςαι $3\chi^2 + 5\chi\gamma - 15\chi = \rho + \gamma$. Οὕτως οὖν οὐ μόνον τοὺς γνωςοὺς, καὶ ἀγνώςοὺς τῶν ὅρων ἰδίᾳ ἐπὶ θάτερα. ἀλλὰ καὶ τὴν Ἐξίσωσιν εἰς τὸ ο (ὅ ἐςι τὸ ο τὸν ἕτερον ὅρον (§. 342.) εἶναι τῆς Ἐξισώσεως) ἀγαγεῖν ἔχομεν. ἐς τὰ μάλιςα τοῦτο χρήσιμον ὂν ἐπὶ τῶν ὑπερτέρων Ἐξισώσεων, ὡς κατωτέρω δειχθήσεται. π. χ. τῆσδε τῆς Ἐξισώσεως $3\chi^2 + 5\gamma\chi - 15\chi = \rho + \gamma$ εἰς τὸ ο ἀχθῆναι προκειμένης, διὰ τῆς μεταθέσεως τοῦ $\rho + \gamma$ μετ' ἀντικειμένων σημείων δεξιόθεν πρὸς τ' ἀριςερὰ τοῦ σημείου, εὐχερῶς τὸ ζητούμενον τελεσθήσεται. Ἐὰν γὰρ ἀμφοῖν τοῖς τῆς Ἐξισώσεως ὅροις τὸ $-\rho - \gamma$ προςεθῇ, ἐπὶ θάτερα μὲν μετὰ τοῦ ἀποφατικοῦ προςεθήσεται σημείου, ἐπὶ δὲ θάτερα, τὸ $\rho + \gamma$ ἀναιρήσει, καὶ ἀντεισάξει τὸ ο. Οἷον

$$3\chi^2 + 5\gamma\chi - 15\chi = \rho + \gamma$$

προς. $\qquad -\rho - \gamma = -\rho - \gamma$

$$3\chi^2 + 5\gamma\chi - 15\chi - \rho - \gamma = 0$$

Ὅσα δ' ἂν χ^2, ἢ χ παρῇ, μετὰ, ἢ ἄνευ συνεργῶν, τοῖς αὐτοῖς, ἢ καὶ διαφόροις σημείοις, τὸ χ^2, ἢ χ, ὡς κοινὸς θεωρούμενον παράγων, μετὰ τὸ τὰς λοιπὰς ποσότητας ἐν παρενθέσει ἐναπολαβεῖν, ἐν δεξιᾷ, ἢ ἀριςερᾷ τῆς παρενθέσεως τεθήσεται. Ὡσαύτως καὶ πλείους τῶν γνωςῶν προκείμεναι ποσοτήτων, διὰ τῆς προσθέσεως, ἢ ἀφαιρέσεως εἰς ἕνα ὅρον γενήσονται. Οἷον, ἡ Ἐξίσωσις $3\chi^2 + 6\gamma\chi - \chi = \chi^2 + 5\alpha\chi - \gamma + \delta\upsilon$ εἴη ἂν $= 3\chi^2 - \chi^2 + 6\gamma\chi - 5\alpha\chi - \chi + \gamma - \delta\upsilon = 0$. Αὕτη δὲ $= (3 - 1)\chi^2 + (6\gamma - 5\alpha - 1)\chi + \gamma - \delta\upsilon = 0 = 2\chi^2 + (6\gamma - 5\alpha - 1)\chi + \gamma - \delta\upsilon = 0$. Ἐπεὶ δὲ οἱ ἔσχατοι γνωςοὶ

ὅροι

ὅροι (τὸ $γ$ — $δυ$) ἐπὶ πάντων προςιθέμενοι ἀλλήλοις, ἢ ἀφαιρούμενοι εἰς ἕνα ὅρον γενέσθαι δύνανται, κληθήτωσαν ἐν γένει $= ρ$. οὗ ἀντὶ τοῦ $γ$ — $δυ$ ἀντικαταςάντος, ὡδέπως ἂν ἡ Ἐξίσωσις ἀποδοθείη. $2χ^2 + (6γ - 5α - 1) χ \pm ρ = 0$. Ἀποδέδοται δὲ τῷ $ρ$ δύω διάφορα σημεῖα $+$ καὶ $-$, διὰ τὸ τὸν ἔσχατον ὅρον καὶ καταφατικὴν, καὶ ἀποφατικὴν ποσότητα ἔχειν εἶναι. Διὰ γὰρ τῆς προσθέσεως, ἢ ἀφαιρέσεως τῶν δεδομένων ποσοτήτων ἐνεργείᾳ τοῦτο γίνεται. Αὖθις καὶ τοὺς συνεργοὺς τῶν ἀγνώςων ὅρων, εἰς τὸν ἤδη δειχθέντα τύπον ἀχθέντας, ὡς μίαν ποσότητ' ἂν ἐκδεξαίμεθα. Τὰ γὰρ $6γ - 5α - 1$ γνωςὰ ὄντα εἰς μίαν συγκεφαλαιωθήσονται, ἤτοι καταφατικὴν, ἢ ἀποφατικὴν ποσότητα. Παραπλησίως, ἐὰν ἕν, ἢ πλείω $χ^2$ συνεργοὺς ἔχωσι, θεωρήσομεν καὶ τούτους ὡς μίαν, ἀλλὰ $+$ ἀεὶ, ἤτοι καταφατικὴν ποσότητα, διὰ λόγον τὸν αὐτίκα ῥηθησόμενον. Καὶ τὸ μὲν ἐκ τῶν διαφόρων συνεργῶν τοῦ $χ^2$ προκύψον, εἰς μίαν ποσότητα προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει ἀχθέντων, κείσθω $= α$, τὸ δὲ διὰ τῶν συνεργῶν τοῦ $χ = β$. Πᾶσαι οὖν αἱ δυναταὶ τῶν Ἐξισώσεων, αἱ Τετραγωνικαὶ, εἰς τὸ μηδενικὸν ἀχθεῖσαι, τοιόνδε λήψονται σχῆμα.

$$αχ^2 \pm βχ \pm ρ = 0.$$

Τοὺς δὲ συνεργοὺς τοῦ $χ^2$, ὡς καταφατικὴν ἀεὶ ἐκδεχόμεθα ποσότητα, τὸ $+$ αὐτῶν προτιθέντες. Ἐι γὰρ καὶ ἐκ τῶν διαφόρων συνεργῶν τῶν διαφόρων $χ^2$, εἰς μίαν γεγονότων ποσότητα, ἀποφατικὴ προκύψειεν, ἀλλ' οὖν τὸ $χ^2$, ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος μεταβιβασθὲν σὺν ταῖς λοιπαῖς ποσότησι, καταφατικὸν ἔςαι, — τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ ἐν τῇ τῆς Ἐξισώσεως ἐπιλύσει λίαν συμ-

= ... βαλ-

βαλλόμενον. Οἷον, $4 - 3\chi^2 = 5\chi - 6$. ἔνθα τὸ χ^2 ἀποφατικόν. Ἀλλ' ἀχθείσης εἰς τὸ μηδενικὸν τῆς Ἐξισώσ. ἔςαι τὸ χ^2 καταφατικόν. $3\chi^2 + 5\chi - 10 = 0$. Ἡ τοιᾶσδε προκειμένης Ἐξισώσεως,

$$-5\chi^2 + 10\chi - 8 = 0$$

προσθεὶς ἑκατέρ.

$$+5\chi^2 - 10\chi + 8 = 5\chi^2 - 10\chi + 8$$

ἕξεις $0 = 5\chi^2 - 10\chi + 8$. Ἢ ἀμειψαμένῳ πάντων τῶν ὅρων τὰ σημεῖα, ἔςαι τὸ χ^2 καταφατικόν.

§. 370. Ὁ τύπος τῆς γενικῆς Τετραγωνικῆς Ἐξισώσ. κατὰ τὸ §. ἀνωτ. ἐςὶν $\alpha\chi^2 \pm \beta\chi \pm \rho = 0$. Καὶ κλασμάτων δὲ ταῖς Ἐξισώσ. ἐνυπαρχόντων, εἰς ἐκεῖνο, τὸ ἐκ τριῶν συνιςάμε[illegible]ν ο[illegible] κ- ναχθεῖεν ἂν σχῆμα, καὶ τῆς ἀγνώςου ποσότητος τῷ παρονομαςῇ τῶν κλασμάτων ἑνούσης. Ὡς

$\alpha\chi + \beta$

$$\frac{\alpha\chi+\beta}{\gamma\chi+\delta}=\frac{\varepsilon\chi+\zeta}{\eta\chi+\vartheta}$$

Ἀποσκυβαλισθήτω τὰ κλάσματα τῷ πολλαπλασιασμῷ.

Ὥσε πολλαπλ. μετὰ τοῦ $\gamma\chi+\delta$

$$\alpha\chi+\beta=\frac{\gamma\varepsilon\chi^2+\zeta\gamma\chi+\delta\varepsilon\chi+\zeta\delta}{\eta\chi+\vartheta}\quad\cdot\ \eta\chi+\vartheta$$

$$\alpha\eta\chi^2+\beta\eta\chi+\alpha\vartheta\chi+\vartheta\beta=\gamma\varepsilon\chi^2+\zeta\gamma\chi+\delta\varepsilon\chi+\zeta\delta$$

$$\alpha\eta\chi^2-\gamma\varepsilon\chi^2+\beta\eta\chi+\alpha\vartheta\chi-\zeta\gamma\chi-\delta\varepsilon\chi=\zeta\delta-\vartheta\beta$$

$$(\alpha\eta-\gamma\varepsilon)\chi^2+(\beta\eta+\alpha\vartheta-\zeta\gamma-\delta\varepsilon)\chi=\zeta\delta-\vartheta\beta$$

$$(\alpha\eta-\gamma\varepsilon)\chi^2+(\beta\eta+\alpha\vartheta-\zeta\gamma-\delta\varepsilon)\chi-\zeta\delta+\vartheta\beta=0$$

Ἐνταῦθα

Ἐνταῦθα, κατὰ τὸν καθόλου τύπον, $\alpha\chi^2 \pm \beta\chi \pm \rho = 0$, τὰ μὲν $(\alpha\eta - \gamma\varepsilon)$ παρίςησι τὸ α. τὰ δὲ $(\beta\eta + \alpha\vartheta - \zeta\gamma - \delta\varepsilon)$ τὸ β, καὶ $-\zeta\delta + \vartheta\beta$ τὸ ρ. Ὥςε οἱ πάντων τῶν ὅρων συνεργοὶ εἰς ὁλοσχερεῖς ἐγένοντο ποσότητας ἀριθμὸν πάντα, καὶ αὐτὴν τὴν 1 σημαινούσας. Ἡ δὲ τοιαύτη Ἐξίσωσις, ἥτινι χ^2, καὶ χ, καὶ πρὸς τούτοις καὶ γνωςὴ ἔνεςι ποσότης, Ἐντελὴς Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις, καὶ Μικτὴ ἀκούει. Τοῦ δὲ μέσου ὅρου ἀπόντος, τοῦ μετὰ τοῦ χ πολλαπλασιασθέντος, ὅ ἐςιν ἐπὶ τοῦ γενικοῦ τύπου τὸ $\pm \beta\chi$, ὡς ὑπολείπεσθαι $\alpha\chi^2 \pm \rho = 0$, καλεῖται Ἀμιγὴς Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις. ἣν καὶ διὰ τοῦ γενικοῦ τύπου παραςῆσαι δυνατὸν, τὸν συνεργὸν β τοῦ β'. ὅρου $= 0$ τιθεμένους. ἐκπεσεῖται γὰρ οὕτως ὅλος ὁ ὅρος. (§. 69.) Ἐὰν δ' ἐπί τινος Ἐξισώσεως ἡ γνωςὴ ἀπῇ τῶν ποσοτήτων, τουτ: $\pm \rho$, τῶν χ^2, καὶ χ παρόντων μόνον μετὰ συνεργῶν, ὡς $\alpha\chi^2 \pm \beta\chi = 0$; τηνικαῦτα ἡ Ἐξίσωσις τοῦ α'. βαθμοῦ ῥηθείη.

Ἔςι γὰρ

$$\alpha\chi^2 = \pm \beta\chi \quad \text{δίελε διὰ } \chi$$

$$\alpha\chi = \pm \beta \quad : \alpha$$

$$\chi = \pm \frac{\beta}{\alpha}$$

§. 371. Ὁ ἄρα τύπος τῆς ἀμιγοῦς δευτεροβαθμίου Ἐξισώσεως ὁ γενικὸς, ὁ $\alpha\chi^2 \pm \rho = 0$, ἢ $\alpha\chi^2 = \pm \rho$ τυγχάνει. Ἐπεὶ δὲ τὸν τῆς ἀγνώςου συνεργὸν ἀπεῖναι τοῦ χ^2 χρὴ, ὡς ἡ δυνάμεως τοῦ χ ζητουμένης, διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦτον ἀποσκευαζόμεθα. Ἔνθεν τοι

$\alpha\chi^2$

$$\frac{\alpha\chi^2 = \pm \varrho}{\chi^2 = \pm \frac{\varrho}{\alpha}} : \alpha$$

Ἀντὶ δὲ τοῦ κλάσματος $\frac{\varrho}{\alpha}$ τεθήτω ἑτέρα τις ποσότης. Ὥςε κείσθω ἐν γένει $\frac{\varrho}{\alpha} = \zeta$.

Τὸ οὖν γενικώτατον σχῆμα πασῶν τῶν Τετραγωνικῶν ἀμιγῶν Ἐξισώσεων ἐςὶ $\chi^2 = \pm \zeta$, τοῦ ζ ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν, ἢ κλάσμα (γνήσιον, ἢ νόθον) καταφατικὸν, ἢ ἀποφατικὸν ὑπεμφαίνοντος. Τῷ ἄρα τοιαύτην Ἐξίσωσιν ἐπιλύσαι βουλομένῳ, ἢ τὸ χ εὑρεῖν, ἐξακτέα ἐξάμφοῖν τῶν ὅρων ἡ $\surd$. Ἡ $\surd \chi^2$ δὲ $= \chi$. Ἐνταῦθα τοίνυν $\chi = \surd \pm \zeta$. Σημειωτέον δὲ τὰ ἑξῆς.

Πρῶτον. Τῆς γνωςῆς ποσότητος ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου τῷ καταφατικῷ σημείῳ συνεζευγμένης οὔσης, μόνον μίαν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν ἔχειν, ἢ τὴν $\surd + \zeta$ μόνον ἐνεργείᾳ ποσότητα εἶναι, ὡς τῆς $\surd$ τῆς ἀποφατικῆς ποσότητος, ἢ τῆς $\surd - \zeta$ ἀδυνάτου καθεςηκυίας (§. 305.) Ἐν δὴ τῷ ὑπολογίζεσθαι ἐπὶ τετραγωνικῶν ὑπολογισμῶν τοιούτῳ σχήματι περιτυχοῦσι δεῖγμα σαφὲς τὸ Πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. π. χ.

$$\frac{\chi^2 = -18.}{\chi = \surd - 18}$$

Σώζεται τοίνυν ὁ τύπος τῶν ἐνεργείᾳ δυνατῶν τετραγωνικῶν ἀμιγῶν Ἐξισώσεων ὧδε. $\chi^2 = \surd \zeta$.

Δεύτερον. Καὶ καταφατικοῦ τοῦ ζ ὄντος, οὐκ ἀεὶ τὴν $\surd$ ἀκριβῶς ἐξάγεσθαι, ἀλλ' ὡς τὰ πολλὰ ἔτι ἔγγιςα γίνεσθαι αὐτῆς ἀρκεῖσθαι δεῖν. Τοῦ γὰρ ζ ἐ-

κρι-

κριβοῦς τετραγώνου ὄντος, καὶ ἡ τοῦ χ τιμὴ καὶ δύναμις ἀκριβὴς, καὶ λογικὴ ἔσαι. π. χ.

$$\chi^2 = 144$$

τῆς √ ἀμφοῖν ἐξαχθ.

$$\chi = \sqrt{144} = 12.$$ Ὡσαύτως

$$\chi^2 = \frac{16}{25}$$

τῆς √ ἀμφοῖν ληφθ.

$$\chi = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$ Ἀλλὰ $$\chi^2 = 18$$ $$\chi = \sqrt{18}$$

ἡ δύναμις τοῦ χ οὐ λογικὴ, ὡς τῆς √ 18 ἀκριβῶς ἐξαχθῆναι μὴ ἐχούσης.

Ὡσαύτως καὶ $\chi^2 = \frac{24}{25}$. Καὶ τῆς ῥίζης ἀμφοῖν ἐξαχθείσης, $\chi = \sqrt{\frac{24}{25}}$. ἢ $\chi = \frac{\sqrt{24}}{5}$ τοῦ γὰρ 25 ἡ √ λογικὴ, ἄλογος δὲ ἡ τοῦ 24.

Τρίτον. Ἐπειδὴ τῆς ἀποφατικῆς ποσότητος ῥίζα οὐ δίδοται τετράγωνος, μόναις ταῖς δυναταῖς Ἐξισώσεσι τῶν ἀμιγῶν τετραγωνικῶν Ἐξισώσεων τὸν τύπον $\chi = \sqrt{\zeta}$ ἀνήκειν. Ἀλλὰ τὴν $\sqrt{\zeta}$ καὶ καταφατικὴν, καὶ ἀποφατικὴν εἶναι δύνασθαι. Εἴτε γὰρ +, εἴτε — ἡ $\sqrt{\zeta}$ ληφθῇ, ἀεὶ τὸ ζ καταφατικὸν ἔσαι. Ἔσι γὰρ $-\sqrt{\zeta} \cdot -\sqrt{\zeta} = +\zeta$. Καὶ $+\sqrt{\zeta} \cdot +\sqrt{\zeta}$ αὖθις $= \zeta$. Ἢ ἐν ἀριθμοῖς. Εἰ $\chi^2 = 49$. ἔσαι $\chi = \sqrt{49} = +7$, ἢ -7. Ὅτι $+7 \cdot +7 = 49$. Καὶ $-7 \cdot -7 = 49$. Ταῦτ᾽ ἄρα ἐπὶ τῶν Τετραγωνικῶν Ἐξισώσεων προτίθεται τοῦ ῥιζικοῦ ἄμφω τὰ σημεῖα +, καὶ —. Ὡς ἐν γένει $\chi^2 = \zeta$. Καὶ $\chi = \pm\sqrt{\zeta}$, ὅπερ δυνατὴν Ἐξίσωσιν παρίσησι. Καὶ τοῦτο κυρίως ὁ ἀληθὴς καθόλου τύπος τῶν δυνατῶν ἀμιγῶν Τετραγ. Ἐξισώσεων.

§. 372.

§. 372. Θηράσιμος δ' ἡ ἐπίλυσις τῶν τοιῶνδε Ἐξισώσ. καὶ διὰ λογαρίθμων. Εἰ γὰρ

$$\chi^2 = \zeta$$

ἔσαι καὶ $2\Lambda \, . \, \chi = \Lambda \, . \, \zeta$ (§. 333.)

$: \; 2$

$$\Lambda \, . \, \chi = \frac{\Lambda \, . \, \zeta}{2}.$$

Τουτ. ζητήσομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ καινοῦ λογαρίθμου. τοῦ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ Λ . ζ προελθόντος, τὴν τοῦ χ δύναμιν δεικνύοντα. Τοῦτο δ' ἐπὶ τῶν Ἐξισώσεων ὑπερτέρου βαθμοῦ μᾶλλον ἐν χρήσει. Ἀλλ' ἀναπτυχθήτω τὸ ῥηθὲν καὶ παραδείγματι.

$$\chi^2 = 148$$

$$2\Lambda \, . \, \chi = \Lambda \, . \, 148$$

$$\Lambda \, . \, \chi = \frac{\Lambda \, . \, 148}{2}.$$

Ἔςι δὲ ὁ λογ. τοῦ $148 = \frac{2,1702617}{2}$. Ὃς διὰ 2 διαιρεθεὶς δίδωσι 1,0851308 λογ. Ζητηθέντος δὲ τούτου ἐν τοῖς μείζοσιν ἀριθμοῖς, καὶ κατα τὸ χαρακτηριςικὸν τῆς πῶν ἀριθμῶν δυνάμεως διορισθείσης, ὡς εἴρηται, ὁ ἀριθμὸς, ὁ τῷ χ ἰσοδύναμος, μεταξὺ 12, 16 καὶ 12, 17 ἐμπίπτει. Κατὰ δὲ τὸν συνήθη τρόπον τοῦ ὑπολογισμοῦ πρυτανευθέντος, ἐπειδὴ $\chi^2 = 148$. ἔσαι καὶ $\chi = \pm \sqrt{148}$. Ὡς οὖν ἄλογος ἡ ῥίζα τοῦ 148 οὖσα οὐκ ἂν ἀκριβῶς ἐξαχθείη. Ὡς ἔγγιςα δ' αὐτῆς γενέσθαι βουλομένοις ἔσαι $= 12, 165 = \chi$.

§. 373. Ἀναπτύξεως χάριν τῶν προχειρισθέντων, κείσθω τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

Α΄. Ζήτησον ἀριθμὸν, οὗ τὸ ἥμισυ ἐπὶ τὸ αὐτοῦ τεταρτημόριον πολλαπλασιάσας, καὶ ἀπὸ τοῦ παραγομένου 10 ἀφελὼν, ἕξεις διαφορὰν τὸν 152 ἀριθμόν.

Λύσις. Ἔςω ὁ ἀριθμὸς $= \chi$. οὗ τὸ ἥμισυ $= \frac{\chi}{2}$. Τὸ δὲ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ $\frac{\chi}{4}$, ἔςαι $\frac{\chi}{2} \cdot \frac{\chi}{4} = \frac{\chi^2}{8}$. Ἀφαιρεθέντος δ' ἀπὸ τοῦδε τοῦ 10, ὑπολείπεται $\frac{\chi^2}{8} - 10$. Τοῦδο δὲ $= 152$.

Ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις $\frac{\chi^2}{8} - 10 = 152$

$$\frac{\chi^2}{8} = 152 + 10 = 162$$

$$\cdot 8$$

$$\chi^2 = 162 \cdot 8 = 1296$$

Ἐξάγαγε τὴν $\surd$

$$\chi = \pm \surd 1296 = \pm 36.$$

Τούτου τὸ ἥμισυ, ἤτοι $\frac{\chi}{2} = 18$. τὸ δὲ τεταρτημ. $\frac{\chi}{4} = 9$. Ὥςε $18 \cdot 9 = 162 - 10 = 152$.

§. 374. Β΄. Δαθέντος τοῦ κεφαλαίου δυοῖν ἀριθμῶν, ὅ $= \alpha$ τεθήτω, καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν Τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν $= \beta$, εὑρεῖν ἐκ τούτων τοὺς ἀριθμούς.

Λύσις. Κατὰ τὸ §. 364. δοθέντων τοῦ κεφαλαίου, καὶ τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν, εὑρηνται οἱ ἀριθμοὶ, ὥςε, εἰ α τὸ κεφάλ. τῶν ἀριθμῶν, καὶ β τὴν

τὴν διαφορὰν σημαίνει, τὸν μείζω ἀριθμὸν $= \frac{\alpha + \beta}{2}$, τὸν δ' ἐλάσσονα $= \frac{\alpha - \beta}{2}$ εἶναι. Ἐν τῷ παρόντι Προβλήμ. τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν δύω ἀριθμῶν $= \alpha$, δέδοται, οὐχὶ δὲ καὶ ἡ τούτων διαφορά. Τεθήτω οὖν αὕτη $= \psi$. Ἔνθεντοι ὁ μείζων ἀριθμὸς $= \frac{\alpha + \psi}{2}$, ὁ δ' ἐλάσσων $= \frac{\alpha - \psi}{2}$.

Δέδοται δὲ καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦ Τετραγώνου ἀμφοῖν τῶν ἀριθμῶν $= \beta$. Κατὰ τὸ Πρόβλ. τοίνυν, τετραγωνιςέον τὸν μείζω, καὶ ἐλάσσω ἀριθμὸν, καὶ εἶτα ἀλλήλοις προσθετέον τοὺς τετραγώνους, ἵνα τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς εὕρωμεν. Ἀλλὰ $\left(\frac{\alpha + \psi}{2}\right)^2 =$

$$\left(\frac{(\alpha + \psi) \cdot (\alpha + \psi)}{4}\right) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\psi + \psi^2}{4}.$$

Καὶ $\left(\frac{\alpha - \psi}{2}\right)^2 = \left(\frac{(\alpha - \psi \cdot (\alpha - \psi)}{4}\right)$ $= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\psi + \psi^2}{4}$. Προςεθέντες ἄρα οἱ Τετράγωνοι ἀλλήλοις ἔσονται ἴσοι τῷ δοθέντι β.

προς.

Προςεθ. $\alpha^2 - 2\alpha\psi + \psi^2$

$\alpha^2 + 2\alpha\psi + \psi^2$

$2\alpha^2 + 2\psi^2$

Ὥςε $\frac{\frac{2\alpha^2 + 2\psi^2}{4}}{} = \beta$. ἢ

$\frac{\alpha^2 + \psi^2}{2} = \beta$. 2

$\alpha^2 + \psi^2 = 2\beta$

$\psi^2 = 2\beta - \alpha^2$

$\psi = \pm\surd(2\beta - \alpha^2)$. Ὁ μείζων ἀριθμὸς ἦν $\frac{\alpha + \psi}{2}$. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ψ τὸ εὑρεθὲν ἰσοδύναμον ἀντικαταςῇ τῷ $+$ σημείῳ, ἔςαι $= \frac{\alpha^2 + \surd(2\beta - \alpha^2)}{2}$. Ὁ δ' ἐλάσσων $\frac{\alpha - \psi}{2} = \frac{\alpha - \surd(2\beta - \alpha^2)}{2}$. Ἐνταῦθα τῆς ῥίζης τὰ σημεῖα τὸ $+$ καὶ $-$ ἄμφω χρήσιμα.

Παράδ. ἐν ἀριθμοῖς. Ἔςω τὸ κεφ. τῶν δύω ἀριθμῶν $= 10$. τὸ δὲ τῶν κατ' αὐτοὺς τετραγώνων $= 58$. Τίνες οἱ ἀριθμοί; $\alpha = 10$. Καὶ $\beta = 58$. Ὥςε ὁ μείζων ἀριθμὸς $= \frac{10 + \surd(2.58 - 10^2)}{2}$ ὁ δ' ἐλάσσων $= \frac{10 - \surd(2.58 - 10^2)}{2}$. Ἡ

ὁ μὲν

ὁ μὲν μείζων $= \frac{10 + \sqrt{(116 - 100)}}{2} = \frac{10 + \sqrt{16}}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$. Ὁ δ' ἐλάσσων $= \frac{10 - \sqrt{(116 - 100)}}{2} = \frac{10 - \sqrt{16}}{2} = \frac{10 - 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Ὧν τὸ κεφάλ. $3 + 7 = 10 = \alpha$. Τὸ δὲ τῶν Τετραγ. $= 49 + 9 = 58 = \beta$.

§. 375. Ἔμποροί τινες κοινωνίαν ποιησάμενοι, ἕκαςος τὸ ἑαυτοῦ μέρος συνεισήνεγκε δεκάκις τοσούτους θαλήρους, ὅσα τὰ τῆς κοινωνίας πρόσωπα. Ἐμπορευσαμένοις οὖν, ἑκάςη θαλήρων ἑκατοντὰς δὶς τοσοῦτον, ὅσοι αὐτοὶ, κέρδος ἤνεγκεν. Ἐὰν τοίνυν τὸ ἑκατοςὸν τοῦ κέρδους μέρος ἐπὶ $2 \frac{2}{5}$ πολλαπλασιασθῇ, προκύψει ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐμπόρων. Πόσοι οὖν ἦσαν, πόσα ἐκέρδησαν, καὶ πόσους θαλ. ἕκαςος συνεισήνεγκε, ζητεῖται.

Κείσθωσαν οἱ ἔμποροι $= \chi$. Ἕκαςος τούτων συνεισήν. δεκάκις τοσούτους θαλ. ὅσοι αὐτοί. ὥςε 10χ θαλ ἕκαςος. πόσον δὲ τὸ κεφάλαιον τῆς τούτων ἁπάντων συνεισφορᾶς, μανθάνομεν διὰ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου. 1 ἔμπορος : 10χ θαλ. $= \chi$ ἔμποροι : $10 \cdot \chi^2$ θαλ. Ὥςε τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον $= 10 \cdot \chi^2$. Ἐπεὶ δ' ἑκάςη ἑκατοντὰς τοῦ κεφαλαίου δὶς τοσοῦτον κέρδος ἤνεγκεν, ἢ οἱ ἔμποροι. Οὗτοι δὲ $= \chi$. Ἑκάςη ἄρα ἤνεγκε 2χ θαλ. Πόσα δὲ, ὅλῳ τῷ κεφαλαίῳ χρησάμενοι, ἐκέρδησαν, ἡ ἐχομένη ἀναλογία ὑποδηλοῖ. 100 θάληροι : 2χ θαλ. κέρδους $= 10\chi^2$ θάληροι : $\frac{10\chi^2 \cdot 2\chi}{100} = \frac{20\chi^3}{100} = \frac{\chi^3}{5}$ $=$ τῷ

τῷ ὁλικῷ κέρδει. Τὸ ἑκατοσημόριον τοῦ κέρδους, ὅ ἐςι $\frac{\chi^3}{5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{\chi^3}{500}$ πολλαπλασιαςέον ἐπὶ $2\frac{2}{9}$ $= \frac{20}{9}$. Τὸ δ' ἐκ τούτου παραγόμενον ἔςαι ὁ τῶν ἐμπόρων ἀριθμός. Οὗτοι δὲ τέθεινται $= \chi$.

ὥςε $\frac{\chi^3}{500} \cdot \frac{20}{9} = \chi$

$$\frac{20\chi^3}{500 \cdot 9} = \chi$$ ἤ

$$\frac{\chi^3}{225} = \chi \quad \cdot 225$$

$$\chi^3 = 225\chi \quad : \chi$$

$$\chi^2 = 225$$

$\chi = \pm \sqrt{225} = 15$. Οἱ ἔμποροι τοίνυν εἰσὶ 15. Τὸ καταβληθὲν μέρος ἑκάςου $= 10\chi = 10 \cdot 15 = 150$ θαλ. Τὸ ἁπάντων $= 10\chi^2$ θαλ. $= 10 \cdot 15^2 = 10 \cdot 225 = 2250$ θαλ. Ἑκάςη ἑκατοντὰς ἦν. κ. 2χ θαλ. $= 30$ θαλ. Τὸ ὁλικὸν κέρδος $= \frac{\chi^3}{5} = \frac{15^3}{5} = \frac{3375}{5} = 675$ θαλ.

§. 376. Αἱ δὲ μικταὶ τῶν Ἐξισώσεων, αἱ Τετραγωνικαί, οὕτω κέκληνται διὰ τὸ μὴ ἐντελῆ Τετράγωνον περιέχειν. Εἰσὶ δὲ, ὡς εἴρηται, (§ 370.) ἐν αἷς ἡ ἄγνωςος τῆς β'. δυνάμεως τυγχάνει, καὶ ἔτι καὶ τῆς α'. καὶ γνωςῆς αὐτῇ ποσότητος προσκειμένης. Ὡς $\chi^2 + \pi\chi = \rho$, ἔνθα π, καὶ ρ αἱ γνωςαί. Νένει δ' ἀεὶ ἡ Ἐξίσ. Τετράγωνος, τοῦ χ^2 καὶ ἐν πλείοσιν ὅροις, καὶ διαφόροις σημείοις ἀπαντῶντος. Ὡσαύτως, καὶ τοῦ χ οὕτως ἔχοντος. Τῆς γὰρ Ἐξισώσεως διαταχθείσης, ἀνάξομεν αὐτὴν εἰς τὸν τύπον, ὥςε τὸ χ^2 ἑνὶ ὅρῳ ἐνυπάρχειν, καὶ ἕνα ὅρον μετὰ τῶν λοιπῶν ἀποτελεῖν, παραπλησίως καὶ τὸ χ ἕνα, τρίτον δὲ εἶναι τὸν τὰς γνωςὰς περιλαμβάνοντα. (§. 369.)

§. 377. Πρὸ δὲ πάντων τὴν ὑπερτέραν δύναμιν τῆς ἀγνώςου, ἢ τὸ χ^2 τοῦ οἰκείου συνεργοῦ ἀπαλλακτέον, εἰ πάρεςι, τῇ διαιρέσει πάντων τῶν ὅρων διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ χ^2. Ὡς $6\chi^2 + 4\chi = 48$. Δίελε διὰ 6, καὶ ἔςαι $\chi^2 + \frac{4\chi}{6} = \frac{48}{6}$. ἢ $\chi^2 + \frac{2}{3}\chi = 8$. Καὶ τούτου τελεσθέντος, ἡ Ἐξίσωσις καταλλήλως ἡ Τετραγωνικὴ, ἡ Μικτὴ φημὶ, τῷδε τῷ γενικωτάτῳ ἐκφανθείη τύπῳ. $\chi^2 \pm \pi\chi = \pm \varrho$. Ἀλλὰ σημείωσαι α΄. τὴν τοιαύτην Ἐξίσωσι ἀεὶ ἐκ τριῶν συνίςασθαι ὅρων. β΄. τοῦ $\pi\chi$, καὶ ϱ ἀμφοῖν τὰ ἐναντία σημεῖα προκεῖσθαι, ὡς τῶν ὅρων τούτων καταφατικῶν τε, καὶ ἀποφατικῶν εἶναι δυναμένων. γ΄. τὸ π καὶ ϱ πᾶσαν δυνατὴν ἐγνωσμένην παριςᾶν ποσότητα, ἤτοι ὁλοσχερεῖς, καὶ κλασματώδεις ἀριθμοὺς, καὶ τὴν 1. ἄγεσθαι δὲ εἰς τὸ 0 (§. 369.) τῇ προσθέσει τῶν ποσοτήτων ἐπὶ θάτερα ἐναντίῳ τῷ σημείῳ. ὡς $\chi^2 \pm \pi\chi \pm \varrho = 0$.

§. 378. Ἀλλ' εἴπερ ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2 \pm \pi\chi = \pm \varrho$ τὸ $\chi^2 + \pi\chi$, ἢ $\chi^2 - \pi\chi$ ἐνεργείᾳ, καὶ ἀληθῶς τετράγωνον ἦν, τῇ ἐξαγωγῇ ἑκατέρωθεν τῆς τετραγ. ῥίζης, ἡ τιμὴ τοῦ ϱ εὕρητο ἂν ῥᾳδίως. Ἀλλὰ τούτου μὴ ἔχοντος οὕτως, ἑτέραν ὁδὸν τραπέσθαι χρή. Ἐν τοῖς προηγηθεῖσι δέδεικται πᾶσαν ποσότητα ἔχειν θεωρεῖσθαι, ὡς ἐκ δύω μερῶν συνιςαμένην,

μένην, κἀντεῦθεν καὶ τὸ Διώνυμον ἀναφύεσθαι. (§. 270.) Καὶ τὸ $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, καὶ $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ εἶναι. Τὸ οὖν ἐντελὲς τετράγωνον τοῦ Διωνύμου ἐκ τριῶν συνίσαται ὅρων. Ἀλλ' ἐν τῷ $\chi^2 \pm \pi\chi$ δύω αἱ ποσότητες, χ καὶ π, καὶ αὐτὴν τὴν 1 τοῦ π δηλοῦντος. Οἱ δὲ ὅροι μόνον δύω. Οὐκέτι ἄρα ἐντελὲς τετράγωνον. Τοὺς δὲ γενικοὺς τύπους $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, καὶ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ ἐπιτηροῦντες ὁρῶμεν τὸν τρίτον ὅρον, ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ β'. μέρους τῆς ῥίζης ἀνακύπτειν, ἐὰν τὸ τῷ δευτέρῳ ὅρῳ ἐνυπάρχον, (πλὴν τοῦ α'. μέρους τῆς ῥίζης) ἤτοι ὁ συνεργὸς ἡμισευθῇ, καὶ ἡ ἡμισευθεῖσα ποσότης τετραγωνισθῇ, ἢ μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῇ. Οἷον ἐν τῷ β'. ὅρῳ $+ 2\alpha\beta$, πλὴν τοῦ α, ἔνεσι καὶ 2β. ὅ ἡμισευθὲν δίδωσι $+\beta$, ὅ τετραγωνισθὲν δίδωσι β^2, ἤτοι τὸν γ'. ὅρον. Ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ $-2\alpha\beta$. τὸ -2β ἡμισ. διδ. $-\beta$. τοῦτο τετραγ. διδ. $+\beta^2$, τὸν γ'. αὖθις ὅρον. Οὕτω μεταχειριζομένων καὶ τὸν συνεργὸν τῆς ἀγνώσου ποσότητος ἐν τῷ β'. ὅρῳ τῆς τετραγωνικῆς Ἐξισώσεως, προκύψει κἀνταῦθα γ'. ὅρος. Ὡς ἐπὶ θάτερα τοῦ τῆς ἰσότ. σημείου ἐντελὴς τετράγωνος, ἐκ διμεροῦς ποσότητος συγκροτούμενος. Ἀλλ' ὁ γ'. ὅρος ἀναγκαίως τηνικαῦτα κἀπὶ θάτερα προςεθήσεται, ἵνα τὸ ἴσον τῆς Ἐξισώσεως τηρηθῇ. Οὗτος δ' ὁ ἐφ' ἑκάτερα προςεθεὶς ὅρος ἀεὶ ποσότης ἐγνωσμένη τυγχάνει, ἐκ τῶν συνεργῶν τοῦ χ, γνωσῶν ὄντων, προκύπτων. π. χ. $\chi^2 + \pi\chi = \varrho$ Ἡμισευθεὶς ὁ π συνεργὸς τοῦ χ ἔσαι $\frac{\pi}{2}$. τετραγωνισθεὶς δὲ, $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$, καὶ ἐφ' ἑκάτερα προςεθεὶς ποιήσει τὴν Ἐξίσωσιν $\chi^2 + \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \frac{+}{}\varrho$

 +

$+\frac{\pi^2}{4}$. Παραπλησίως $\chi^2 - \pi\chi = \pm \varrho$. ἐὰν $-\pi$ ἡμισευθῇ, ἔςαι $-\frac{\pi}{2}$. τετραγων. δὲ $= -\frac{\pi}{2} \cdot -\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$. καὶ προς. $\chi^2 - \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \pm \varrho + \frac{\pi^2}{4}$.

Ἔχομεν οὖν ἐπὶ θάτερα ἐντελῆ δυώνυμον τετράγωνον, οὗ καὶ ἡ ῥίζα γνωςή. Τὸ γὰρ ἕτερον μέρος τῆς ῥίζης ἡ α΄. δύναμις τῆς ἀγνώςου ἐςὶ ποσότητος. Θάτερον δὲ ὁ ἡμισυνεργὸς τοῦ χ τοῦ ἐν τῷ β΄. ὅρῳ μετὰ τοῦ σημείου, τοῦ τῷ χ προσόντος. π. χ. τοῦ $\chi^2 + \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \pm \varrho + \frac{\pi^2}{4}$ ἡ ῥίζα τοῦ ἑτέρου ὅρου τῆς Ἐξισώσ. ἐςὶ $\chi + \frac{1}{2}\pi$ τοῦ δὲ $\chi^2 - \pi\chi + \frac{\pi^2}{4} = \pm \varrho + \frac{\pi^2}{4}$ ἡ ῥίζα τοῦ ἑτ. ὅρ. τῆς Ἐξ. $\chi - \frac{1}{2}\pi$. Ἐὰν οὖν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ὅρου τῆς Ἐξισ. ῥίζα ἐξάγηται, ἐξακτέα καὶ ἀπὸ θατέρου. ἄλλως γὰρ οἱ ὅροι τῆς Ἐξισ. ἰσοδυναμεῖν οὐκ ἔχουσιν. Ὅθεν ἐπὶ τῆς α΄. Ἐξισώσεως.

$\chi^2 +$