ἑτέρων ἀντικαθίςαται Ἐξισώσεων, ἢ καὶ ἐκ δύω Ἐξισώσεων τὴν δύναμιν μιᾶς εὑρόντες ἀγνώςου, ἄμφω τὰς δυνάμεις καινὴν ποιοῦμεν Ἐξίσωσιν, ἢ τρίτον δυάδα Ἐξισώσεων προσθέντες, ἢ ἀφελόντες, τάχιςα εἰς πέρας τοῦ προκειμένου ἂν ἀφικοίμεθα. Διὰ παραδειγμάτων ἀναπτυχθήσεται τὸ λεγόμενον.

§. 364. Καὶ α'. Εἰ δύω ἄγνωςοι ποσότητες τῷ προβλήματι ἔνεισι.

Δοθέντων τοῦ Κεφαλαίου, καὶ τῆς Διαφορᾶς δύω ἀριθμῶν, εὑρεθήτωσαν οἱ ἀριθμοί. Κληθήτωσαν δὲ, ἅτε ἄγνωςοι, ὁ μὲν μείζων χ, ὁ δ' ἐλάσσων ψ. Τὸ τούτων Κεφάλαιον δέδοται. Ὅπερ ἔςω $= \alpha$. Ἀλλὰ καὶ ἡ τούτων Διαφορὰ, ἥτις $= \beta$ τεθήτω. Ἐκ τούτων συνίςανται δύω Ἐξισώσεις αἱ ἑξῆς. $\chi + \psi = \alpha$. Καὶ $\chi - \psi = \beta$, ἃς κατὰ τοὺς διαφόρους ἐπιλύσωμεν τρόπους.

1) Διὰ τῆς ἀντικαταςάσεως τῆς εὑρεθείσης τιμῆς καὶ δυνάμεως τῆς ἑτέρας τῶν ἀγνώςων ἐπὶ τῆς ἑτέρας Ἐξισώσεως. $\chi + \psi = \alpha$. $\chi = \alpha - \psi$. Τὸ τῷ χ ἴσα δυνάμενον, ἤτοι τὸ $\alpha - \psi$ θὲς ἐπὶ τῆς ἑτέρας Ἐξισ. ἤτοι τῆς $\chi - \psi = \beta$, ἀντὶ τοῦ χ, ἥτις εἰς τήνδε τραπείη $\alpha - \psi - \psi = \beta$

$$\text{ἢ } \alpha - 2\psi = \beta$$

$$\alpha = \beta + 2\psi$$

$$\alpha - \beta = 2\psi \quad : 2$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \psi$$

Ἐπειδὴ οὖν εὕρηται τὸ ψ, ἔςαι γνωςὸν καὶ τὸ χ. Ἐπειδὴ γὰρ κατὰ τὴν α'. Ἐξίσ. $\chi = \alpha - \psi$, ἀντικαταςήσας

τοῦ

τοῦ ψ τὸ ἰσοδύναμον ἕξεις $\chi = \alpha - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $= \frac{2\alpha - (\alpha - \beta)}{2} = \frac{2\alpha - \alpha + \beta}{2}$ $= \frac{\alpha + \beta}{2}$. Ὥςε ὁ μείζων ἀριθμὸς $\chi = \frac{\alpha + \beta}{2}$, καὶ ὁ ἐλάσσων, ἢ $\psi = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

2) Ἐὰν ἐξ ἑκατέρας Ἐξισώσ. ἡ δύναμις καὶ τιμὴ τῆς αὐτῆς ποσότητος ζητῆται, καὶ ὡς καινὴ Ἐξίσωσις θεωρῆται. Καὶ οὗτός ἐςιν ὁ Φυσικώτατος τρόπος. Τῇ γὰρ δευτέρᾳ Ἐξισώσει τηνικαῦτα μία καὶ μόνη ἄγνωςος παρέςαι. Τουτ.

$$\chi + \psi = \alpha. \qquad \text{Καὶ} \qquad \chi - \psi = \beta$$
$$\chi = \alpha - \psi \qquad\qquad \chi = \psi + \beta$$

Ὥςε καὶ $\alpha - \psi = \beta + \psi$ (§. 48. δ'.)

$$\alpha = \beta + \psi + \psi = \beta + 2\psi$$
$$\alpha - \beta = 2\psi$$
$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \psi$$

Ἵνα δὲ οὕτω καὶ τὸ χ εὕρωμεν, Ἔςω αὖθις

$$\chi + \psi = \alpha. \qquad \text{Καὶ} \qquad \chi - \psi = \beta$$
$$\psi = \alpha - \chi \qquad\qquad -\psi = \beta - \chi$$
$$\chi - \beta = +\psi$$

Εὐθέντοι

Ἔνθεντοι καὶ $\alpha - \chi = \chi - \beta$ (§. αὐτ.)

$$\alpha = 2\chi - \beta$$

$$\alpha + \beta = 2\chi$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \chi$$

3) Διὰ τῆς προσθέσεως τῶν Ἐξισώσεων, πάνυ καλῶς ἐνταῦθα ἐγχωρούσης.

$$\chi + \psi = \alpha$$
$$\chi - \psi = \beta$$

$$2\chi = \alpha + \beta$$

$$\chi = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Εἰδὲ τὸ ψ εὑρεῖν βούλει, ἔςαι τοῦτο διὰ τῆς Ἀλγεβραϊκῆς Ἀφαιρέσεως.

$$\chi + \psi = \alpha$$
$$\chi - \psi = \beta$$
$$+ \quad -$$

$$2\psi = \alpha - \beta$$

$$\psi = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

§. 36ς.

ἐπὶ πάντων, ὁ μείζων ἀριθμὸς τὸ ἥμισυ κεφάλαιον ἐςί, καὶ ἡ ἡμίσεια διαφορᾶς, ὁ δ' ἐλάσσων. τὸ ἥμισυ κεφάλαιον πλὴν τῆς ἡμισείας διαφορᾶς.

Τὸ παράδειγμα ἐν ἀριθμοῖς. Ἔςω τὸ Κεφάλαιον δύω.ἀριθμῶν 24, ἡ τούτων Διαφορὰ $= 6$. Τίνες οἱ ἀριθμοί; Ἐνταῦθα $\alpha = 24$. καὶ $\beta = 6$. Ἔνθεντοι $\chi = \frac{24 + 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$. Καὶ $\psi = \frac{24 - 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$. Ὥςε ὁ μείζων ἀριθμὸς 15, ὁ δ' ἐλάττων 9.

§. 365. Ἑτέρου παράδ. Δύω τινῶν ἐν καλάθοις μῆλα φερόντων, ὁ ἕτερος ἐρωτηθείς, πόσα ἄμφω φέροιεν, ἀπεκρίνατο. Ἐὰν ἐκ τῶν ἐμῶν 100 λαβὼν τοῖς τοῦ ἑταίρου μου ταῦτα προσθῇς, ἕξει ἐν τῷ ἑαυτοῦ καλάθῳ τρὶς τοσαῦτα, ὅσα ἐν τῷ ἐμῷ. Ἐὰν δ' ἐκ τῶν ἐκείνου 100 τοῖς ἐμοῖς προσθῇς, ἔσονται ἴσα τὰ μῆλα ἐν ἀμφοῖν τοῖς καλάθοις.

Λύσις. Ἐνταῦθα πρόκεινται δύω ἄγνωςοι. Ὅθεν καὶ δύω Ἐξισώσεις, ἔνθα οὐδετέρα τῶν ἀγνώςων τῇ ἑτέρᾳ διὰ πολλαπλασιασμοῦ συναπτέα εἶναι ὀφείλει. Ἐν τῷ α'. καλάθῳ ἔςω χ μῆλα, ἐν δὲ τῷ β'. ψ. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ α'. 100. λάβῃς, ὑπολείποιτ' ἔτι $\chi - 100$. Τὰ δὲ τοῦ ἑτέρου, οἷς τὰ 100 προςέθειται, $\psi + 100$. Οὕτως οὖν ἐγένοιτο ταῦτα τρὶς τοσαῦτα, κατὰ τὴν ὑπόθ. ὅσα τὰ τοῦ α'. Ἄρα $\psi + 100 = (\chi - 100) \cdot 3 = 3\chi - 300$. Ἡ α'. Ἐξίσωσις. Αὖθις, ληφθέντων ἀπὸ τῶν ψ μήλων 100, εἶεν ἂν λοιπὰ $\psi - 100$. Καὶ τηνικαῦτα, ἢ τὸ Πρόβλημα βούλεται, ἴσα ἑκατέρων τὰ μῆλα. Ὥςε $\psi - 100 = \chi + 100$. Ἡ β'. Ἐξίσ. Αἱ δύω τοίνυν. Ἐξισώσεις, $\psi + 100 = 3\chi - 300$. Καὶ

Καὶ $\psi - 100 = \chi + 100$ ῥᾶςα διὰ τῆς Ἀφαιρέσεως ἐπιλυθῆναι δύνανται. Οὕτω γὰρ τὸ ψ τῶν Ἐξισώσεων ἐκπεσεῖται.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Ἤτοι} & \psi + 100 & = & 3\chi - 300 \\ \text{Καὶ} & \psi - 100 & = & \chi + 100 \\ & + & & - \quad . \; . \; . \quad \text{ἄφελε} \\ \hline & +200 & = & 2\chi - 400. \quad (\S.\ 49.) \end{array}$$

$$200 + 400 = 600 = 2\chi$$

$$\frac{600}{2} = 300 = \chi$$

Ἀντικατάςησον ἤδη τοῦ χ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν Ἐξισ. τὸ εὑρεθὲν ἴσον, ἤτοι 300, καὶ ἕξεις ψ. Γενέσθω τοῦτο ἐν τῇ β΄. $\psi - 100 = \chi + 100$.

$$\text{Ὅθεν} \quad \psi - 100 = 300 + 100 = 400$$

$$\psi = 400 + 100 = 500$$

Ὡς ἐν τῷ ἑτέρῳ καλάθῳ, τὰ χ μῆλα $= 300$. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ τὰ $\psi = 500$. Ἐὰν ἀπὸ τῶν 300 ἑκατὸν ἀφαιρεθῇ, καὶ τοῖς 500 προςεθῇ, ἔςαι $500 + 100 = 600 = 200 . 3$. Ἑκατὸν δ' ἀπὸ τῶν 500 ἀφαιρεθέντα, καὶ τοῖς 300 προςεθέντα, ποιήσουσι $300 + 100 = 400 =$ τοῖς τοῦ ἑτέρου ὑπολειφθεῖσι 400.

§ 366 Τριῶν δ' ἀγνώςων τῇ πρωτοβαθμίῳ ἐνυπαρχόντων Ἐξισώσει, εἴπερ ἐκ τοῦ Προβλήματος τρεῖς Ἐξισώσεις συςαταί, καὶ τοῦτο ἔχει πάντως, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον, ἐπιλυθῆναι. λίαν μέντοι δυσχερῶς τῶν πλειόνων ἕνεκα Ἐξισώσεων, ὅτε καὶ κίνὄυνος τοῦ ἀκριβοῦς ὑπολογισμοῦ ἁμαρτάνειν. Ἀλλ' ἐπιλυτέον καὶ κατὰ τοῦτο τὴν εὐχερεςέραν, ἵνα μὴ καὶ τῆς τοιαύτης ἄμοιροι ὦμεν.

§. 367. Εὑρεθήτωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οὕτως ἔχοντες, ὥςε τὸ Κεφάλαιον τοῦ α'. καὶ β'. $=\alpha$, τὸ Κεφάλ. τοῦ α'. καὶ γ'. $=\beta$, τὸ Κεφάλ. τοῦ β'. καὶ γ'. $=\gamma$ εἶναι.

Λύσις. Ῥηθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ, χ, ψ, καὶ ω. Ὥςε κατὰ τὸ Πρόβλημα $\chi+\psi=\alpha$. $\chi+\omega=\beta$. Καὶ $\psi+\omega=\gamma$. Τρεῖς ἄρα αἱ Ἐξισώσεις.

$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\chi+\omega=\beta$$
$$\psi+\omega=\gamma.$$

Πρὸ πάντων ἄφελε τὴν β'. ἀπὸ τῆς α'.

$$\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \underline{\chi+\omega=\beta} \quad \text{ἀφαιρ.} \\ \psi-\omega=\alpha-\beta \quad (\S\ 49.) \end{array}$$

πρόσθες ταύτῃ τὴν γ'. $\underline{\psi+\omega=\gamma}$

$$2\psi=\alpha+\gamma-\beta$$

Προέκυψεν οὖν οὕτως Ἐξίσωσις, μετὰ μιᾶς μόνου ἀγνώςου. Ὥςε $\underline{2\psi=\alpha+\gamma-\beta}$

$$\psi=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$$

Καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου ἀντὶ τοῦ ψ ἀντικαταςάντος ἐν τῇ α'. ἢ γ'. Ἐξισώσει, εὑρεθήσεται χ, καὶ ω.

Καὶ

Καὶ ἡ μὲν α΄. ἔςαι οὕτω

$$\chi + \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} = \alpha \quad . \; 2$$

$$2\chi + \alpha + \gamma - \beta = 2\alpha$$

$$2\chi = 2\alpha - \alpha - \gamma + \beta$$

$$\text{ἢ } 2\chi = \alpha - \gamma + \beta \quad : \; 2$$

$$\chi = \frac{\alpha - \gamma + \beta}{2}$$

Ἡ δὲ γ΄.

$$\frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} + \omega = \gamma \quad . \; 2$$

$$\alpha + \gamma - \beta + 2\omega = 2\gamma$$

$$2\omega = 2\gamma - \gamma - \alpha + \beta = \gamma - \alpha + \beta \quad : \; 2$$

$$\omega = \frac{\gamma - \alpha + \beta}{2}$$

Παράδ. ἐν ἀριθμοῖς. Ἔςω $\chi + \psi = 16$. $\chi + \omega = 24$. $\psi + \omega = 32$. Ὥςε $\alpha = 16$. $\beta = 24$. $\gamma = 32$. Καὶ ἔςαι, κατὰ τὰ ἀνακύψαντα ἰσοδύναμα τῶν ἀγνώςων,

$$\psi = \frac{16 + 32 - 24}{2} = \tfrac{24}{2} = 12$$

$$\chi = \frac{16 - 32 + 24}{2} = \tfrac{8}{2} = 4$$

$$\omega = \frac{32 - 16 + 24}{2} = \tfrac{40}{2} = 20.$$

Ἐςιν ἄρα $\chi + \psi = 4 + 12 = 16$

$\chi + \omega = 4 + 20 = 24$

$\psi + \omega = 12 + 20 = 32.$ Καὶ τῶν μὲν τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξισώσεων ἅλις.

Περὶ τῶν Ἐξισώσεων τοῦ β'. βαθμοῦ.

§. 368. Τοῦ δὲ δευτέρου βαθμοῦ, ἢ Τετραγωνικαὶ Ἐξισώσεις καλοῦνται, ἐν αἷς ἡ ὑπερτάτη δύναμις τῆς ἀγνώςου ἡ β'. τυγχάνει. Ὡς $\chi^2 = 3\alpha + \beta$. ἢ $3\chi^2 - \gamma = 5\alpha\beta + \frac{\delta}{2}$. ἢ $\chi^2 - \pi\chi = 3\pi\rho - \frac{3}{4}\delta$. ἢ

$$5\chi^2 - 3\pi\chi + \rho\chi = 2\gamma\chi + \delta.$$

§. 369. Προὔργου δὲ κἀνταύταις, κατὰ τὰς τοῦ προβλήματος ὑποθέσεις, τὴν Ἐξίσωσιν συγκροτεῖν, τοὺς ὅρους, τοὺς τὴν ἄγνωςον περιέχοντας, ἄγοντας ἐπὶ θάτερα τῇ Προσθέσει, ἢ Ἀφαιρέσει, ἢ μᾶλλον, τῇ τῶν σημείων τροπῇ. Ὡς, εἰ αὕτη πρόκειται