$$\frac{\chi}{2}-1000+\frac{\chi}{3}-800+\frac{\chi}{4}-600=\chi$$ ἢ

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}-1000-800-600=\chi$$ πρός.

$$\frac{13}{12}\chi-2400=\chi \quad .12$$

$$13\chi-2400\,.\,12=12\chi$$

$$13\chi-12\chi=2400\,.\,12$$

$\chi=2400\,.\,12=28800=$ πάσῃ τῇ κληρονομίᾳ. ἐξ ἧς ὁ α'. ἐκομίσατο $\frac{\chi}{2}-1000=\frac{28800}{2}-1000=13400$ θαλ.

Ὁ β'. $\frac{\chi}{3}-800=\frac{28800}{3}-800=8800.$

Ὁ γ'. $\frac{\chi}{4}-600=\frac{28800}{4}-600=6600$

$=28800$ θαλ.

§. 354. Δ'. Δίελε 50 θαλ. εἰς 10 μέρη, ὥ-ς' ἀεὶ ἕκαςον μέρος μεῖζον εἶναι τοῦ ἑτέρου θαλήρῳ. Ὁποῖον τὸ ἐλάχιςον μέρος, καὶ ἕκαςον τῶν μερῶν; Λύσις. Ἔςω τὸ ἐλάχιςον $=\chi$. τὸ ἄρα τούτῳ ἀμέσως ἑπόμενον, τὸ μονάδι αὐτοῦ μεῖζον $=\chi+1$. τὸ δὲ τούτῳ, $\chi+2$, κτ. Τοῦτο δὲ Ἀριθμητ. Πρόοδον ἡμῖν παρέχει, ἐκ 10 ὅρων. Καὶ ἐπεὶ ὁ ἔσχατος ὅρος ἑκάςης Ἀριθμ. Πρ. ἐν γένει $=\alpha+(\pi-1)\delta$. §. 224. Ἐνταῦθα δὲ α, ἢ ὁ α'. ὅρος $=\chi$. ἢ πληθὺς τῶν ὅρων $=\pi=10$, καὶ δ, ἢ ἡ διαφορὰ $=1$. Ἔςαι ὁ ἔσχατος ὅρος, $\chi+10-1$, ἢ $\chi+9$. Ὥςε τὸ ὁλικὸν κεφάλ. τῆς Προόδου, ὅπερ εὑρίσκεται, (§. 226.) ἐὰν ὁ α'. καὶ ἔσχατος ὅρος προσαθροισθέν-

τες

τες τῇ ἡμισεία πληθύϊ τῶν ὅρων πολλαπλασιασθῶσιν, ἴσαι $(\chi + \chi + 9) \cdot 5 = (2\chi + 9) \cdot 5 = 10\chi + 45$. Ὃ κατὰ τὴν ὑπόθ. $= 50$. πάντες γὰρ οἱ ὅροι τοὺς 50 συμπληροῦσι θαλ.

Ἡ οὖν Ἐξίσωσις

$$10\chi + 45 = 50$$

$$10\chi = 50 - 45 = 5$$

$\chi = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Τὸ α΄. τοίνυν μέρος $\frac{1}{2}$ θαλ. τυγχάνει· τὰ δὲ λοιπὰ χωροῦσι κατὰ τὴν ἑξῆς τάξιν. $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2} = 50$.

§. 355. Ε΄. Τρεῖς μύλοι ἀλήθουσιν, ὁ μὲν α΄. ἐν 2 ὥραις 6 σίτου μεδίμνους ὁ δὲ β΄. ἐν 3 ὥρ. 5 μεδ. Ὁ δὲ γ΄. ἐν 4 ὥρ. 3 μεδ. Ἐὰν οὖν ἅμα τοῦ ἀλήθειν ἄρξωνται, Ζητεῖται, ἐν πόσαις ὥραις ἀλεσθήσονται 130 μέδιμνοι, καὶ πόσους μεδ. ἕκαστος ἀλήσει;

Λύσις. Αἱ ἄγνωστοι ὧραι τεθήτωσαν $= \chi$. πόσους δὲ μεδ. ἕκαστος μύλος ἀλήσει ἐν χ ὥραις, εὑρήσομεν διὰ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου. (§. 248.)

2 ὧραι : 6 μεδ. $= \chi$ ὧραι : $\frac{6\chi}{2} = 3\chi$ μεδ.

τοσούτους ἀλήσει ὁ α΄.

Αὖθις. 3 ὧραι : 5 μεδ $= \chi$ ὧραι : $\frac{5\chi}{3}$ μεδ.

τοσ. ἀλ. ὁ β΄.

Καὶ 4 ὧραι : 3 μεδ. $= \chi$ ὧραι : $\frac{3\chi}{4}$ μεδ.

τοσούτους ἀλήσει ὁ γ΄.

ἅπαντες

ἅπαντες δὲ οἱ μέδ. οἱ ὑπὸ τῶν τριῶν ἐν χ ὥραις ἀλεσθησόμενοι ἴσοι 130 μεδ.

"Οθεν ἡ Ἐξίσωσις.

$$3\chi + \tfrac{5}{3}\chi + \tfrac{3}{4}\chi = 130$$ τὰ κλάσμ. προς. ὑπὸ τὴν αὐτὴν παρονομ. ἀχθ.

$$3\chi + \tfrac{29}{12}\chi = 130 \quad . \ 12$$

$$36\chi + 29\chi = 1560. \quad \text{ἢ} \quad 65\chi = 1560$$

$\chi = \frac{1560}{65} = 24.$ "Ωςε 24 ὡρῶν χρεία, εἰς τὸ τοὺς τρεῖς μύλους τοὺς 130 μεδ. ἀλῆσαι.

Ἐπεὶ οὖν τὸ χ γνωςὸν. τὸ τὰς ὥρας δηλοῦν, γνωςὸν καὶ τὸ, πό σους ἕκαςος μεδ. ἀλήσει ἐν 24 ὥραις, ἅμα ἀρχόμενοι, καὶ ἅμα παυόμενοι. "Ητοι

Ὁ μὲν α΄.	$3\chi = 3 \cdot 24 = 72$ μεδ.
Ὁ δὲ β΄.	$\frac{5}{3}\chi = \frac{5}{3} \cdot 24 = 40$ μεδ.
Ὁ δὲ γ΄.	$\frac{3}{4}\chi = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18$ μεδ.
τὸ κεφάλ. $=$	130 μεδ.

Ἐπὶ τούτου τοῦ παραδ. προαπαιτεῖται ἡ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου γνῶσις, δι᾽ ἧς καὶ ἡ Ἐξίσωσις τελευταῖον συνάγεται, εἰς εὕρεσιν τῶν ἀγνώςων ποσοτήτων. Τὸ δὲ Πρόβλημα καὶ ἀνάπαλιν ἔχει προβάλλεσθαι, τουτ: δοθεισῶν τῶν ὡρῶν, εὑρεῖν τοὺς μεδίμνους, τοὺς ὑπὸ τῶν τριῶν μύλων ἐν τοσαύταις ὥραις ἀλεσθησομένους, οὗ ἡ ἐπίλυσις κατὰ τὸν αὐτὸν γίνεται τρόπον. Καὶ τῶν μύλων πλειόνων ὄντων, ῥᾳδίως ἂν αὖθις αἱ ὧραι, καὶ οἱ μέδιμνοι εὑρεθεῖεν.

Δύναται δὲ καὶ καθόλου προτεθῆναι. Τριῶν μύλων ὁ μὲν α΄ ἀλήθει ἐν α ὥραις β μεδ. ὁ δὲ β΄. ἐν γ ὥραις δ μεδ. ὁ δὲ γ΄. ἐν ε ὥρ. ϛ μεδ. Ἐν πόσαις ὥραις ἀλήσου-

ἀλήσουσιν η μεδίμνους; Τεθεισῶν κἀνταῦθα τῶν ὡρῶν $= \chi$, συνάξομεν

$$\alpha \text{ ὧραι} : \beta \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὧραι} : \frac{\beta\chi}{\alpha} \text{ μεδ.}$$

$$\text{Καὶ } \gamma \text{ ὧραι} : \delta \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὧραι} : \frac{\delta\chi}{\gamma} \text{ μεδ.}$$

$$\text{Καὶ } \varepsilon \text{ ὧραι} : \zeta \text{ μεδ.} = \chi \text{ ὧραι} : \frac{\zeta\chi}{\varepsilon} \text{ μεδ.}$$

Ἡ δ' Ἐξίσ.

$$\frac{\beta\chi}{\alpha} + \frac{\delta\chi}{\gamma} + \frac{\zeta\chi}{\varepsilon} = \eta$$

$$\overline{} \cdot \alpha$$

$$\beta\chi + \frac{\alpha\delta\chi}{\gamma} + \frac{\alpha\zeta\chi}{\varepsilon} = \alpha\eta$$

$$\overline{} \cdot \gamma$$

$$\gamma\beta\chi + \alpha\delta\chi + \frac{\alpha\gamma\zeta\chi}{\varepsilon} = \alpha\gamma\eta$$

$$\overline{} \cdot \varepsilon$$

$$\gamma\varepsilon\beta\chi + \alpha\varepsilon\delta\chi + \alpha\gamma\zeta\chi = \alpha\gamma\eta\varepsilon$$

$$\overline{} \text{ ἢ}$$

$$(\gamma\varepsilon\beta + \alpha\varepsilon\delta + \alpha\gamma\zeta)\chi = \alpha\gamma\eta\varepsilon$$

$$\overline{}$$

$$\chi = \frac{\alpha\gamma\eta\varepsilon}{\gamma\varepsilon\beta + \alpha\varepsilon\delta + \alpha\gamma\zeta}.$$

Εὔρηται οὖν ἐν γένει τὸ χ. Τῶν δὲ γραμμάτων, κατὰ τὸ ἀνιστ. παράδ. διορισθέντων, ἔςαι $\alpha = 2$. $\beta = 6$. $\gamma = 3$. $\delta = 5$. $\varepsilon = 4$. $\zeta = 3$, καὶ $\eta = 130$.

$$\text{Ὥςε } \chi = \frac{2 \cdot 3 \cdot 130 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{3120}{72 + 40 + 18}$$

$$= \frac{3120}{130} = 24.$$

Ἐφαρμόσει δὲ τὸ παράδ. ἐν γένει, καὶ ἐὰν διάφορα πράγματα ἐν διαφόρῳ χρόνῳ διάφορα παράγωσιν ἀποτελέσματα, καὶ εἰδέναι βουλώμεθα τὸ παραγόμενον συνάμα ἐκείνων ἐνεργούντων. π. χ. Τριῶν οἰκοδόμων ὁ μὲν ἐν 1 ἡμέρᾳ 6 κυβικοὺς οἰκοδομεῖ πόδας, ὁ δ' ἕτερος ἐν 2 ἡμ. 9 κυβ. πόδ. ὁ δὲ γ'. ἐν 3 ἡμ. 14 κυβ. π. πόσον χρόνον οἰκοδομήσουσιν 180 κυβ. πόδας, συνάμα ἐργαζόμενοι;

Κατὰ τὸν τύπον ἔςι $\chi = \dfrac{\alpha\gamma\eta\varepsilon}{\gamma\varepsilon\beta + \alpha\varepsilon\delta + \alpha\gamma\zeta}$

$\alpha = 1.\ \beta = 6.\ \gamma = 2.\ \delta = 9.\ \varepsilon = 3.\ \zeta = 14.\ \eta = 180.$ καὶ $\chi = \dfrac{1.2.180.3}{2.3.6 + 1.3.9 + 1.2.14} = \dfrac{1080}{36 + 27 + 28}$

$\dfrac{1080}{91} = 11\,\frac{79}{91}$ ἡμ. σχεδὸν $= 11\,\frac{8}{9}$ ἡμ.

§. 356. Ζ'. Ἐργάτας τις μισθωσάμενος, τὸν μισθὸν αὐτοῖς τελέσειν μέλλων, οὐχ ἱκανῶς ἔχει χρημάτων, εἰς τὸ ἑκάςῳ ἴσον μισθὸν ἀποδοῦναι. Εἰ μὲν γὰρ ἕκαςος παρ' αὐτοῦ 6 θαλήρους λάβοι, τὸν ὁμολογηθέντα μισθὸν, ἐνδεῖ αὐτῷ (τῷ μισθωσαμένῳ) ἔτι 20 θαλήρων. Εἰδὲ 4. ὑπολείπονται αὐτῷ ἔτι 12. Ζητεῖται, πόσα τὰ χρήματα, καὶ πόσοι οἱ ἐργάται;

Λύσις. Ἔςω τῶν ἐργατῶν ὁ ἀριθμὸς $= \chi$. Ἐπειδὴ οὖν ἑκάςῳ 6 θαλ. ὀφείλει ὁ τούτους μισθωσάμ. εἴη ἂν τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον τῶν καταβληθησομένων χρημάτων ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν ἐργατῶν, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν θαλ. τῶν ἑκάςῳ ὀφειλομένων, τουτ: $= 6\chi$ ἀλλ' εἰ ἕκαςος 6 θαλ. λήψεται, κατὰ τὴν ὑπόθ. δεήσει τῷ μισθωσ. ἔτι 20 θαλ. τουτ: ἔχει $6\chi - 20$ θαλ. Βούλεται δ' ἑκάςῳ θαλ. 4 δοῦναι, ὥςε πᾶσιν ἅμα 4χ. Ὑπολείπονλείπονται δ' αὐτῷ ἔτι 12. Ὥςε ἔχει ἐνεργείᾳ $4\chi +$ 12 θαλ. Προέκυψαν οὖν οὕτω δύω τιμαὶ τῶν αὐτοῦ χρημάτων, ἴσαι ἀλλήλαις ἀναγκαίως οὖσαι, ὡς ἄμφω ἀληθεύουσαι. Ἐξ ὧν Ἐξίσωσις συνίςαται, τὸ χ διορίσουσα.

Καὶ γὰρ $6\chi - 20 = 4\chi + 12$

$6\chi - 4\chi - 20 = 12$ (§. 346.)

ἢ

$2\chi - 20 = 12$

$2\chi = 12 + 20 = 32$

$\chi = \frac{32}{2} = 16 =$ τοῖς ἐργάταις.

Ἐφ' ᾧ δὲ καὶ τὰ χρήματα εὑρεθῆναι, ἀντικαταςήτω ἐφ' ἑτέρας τῶν πρώτων τιμῶν τὸ εὑρεθὲν ἀντὶ τοῦ χ. Οἷον ἐπὶ τοῦ $4\chi + 12$. Ἐπειδὴ $\chi = 16$, ἔςαι $4\chi + 12 = 4 \cdot 16 + 12 = 64 + 12 = 76 =$ τοῖς χρήμασιν. Ἐπεὶ δὲ τὰ ὀφειλόμενα $6\chi = 6 \cdot 16 = 96$ θαλ. τυγχάνουσιν, εἰκότως ἄρα 20 θαλ. αὐτῷ ἐδέησε.

Καὶ ἐν γένει δὲ καὶ τοῦτο ἐπιλύσαι δυνατόν. Εἰ γάρ τις ἐργατῶν ἀριθμῷ α θαλ. δοῦναι βουλόμενος, β θαλ. ἔτι χρείαν ἔχει, καὶ διὰ τοῦτο δίδωσιν αὐτοῖς γ θαλ. ὑπολειπομένων αὐτῷ καὶ δ θαλ. κατὰ ταῦτα ἂν εἴη

$\alpha\chi - \beta = \gamma\chi + \delta$

μετενεχθ. αἱ γνωςαὶ ἑτέρωσε, ὡσαύτως καὶ αἱ ἄγνωςοι

$\alpha\chi - \gamma\chi = \beta + \delta$

ἢ

$(\alpha - \gamma)\chi = \beta + \delta$

$\chi = \dfrac{\beta + \delta.}{\alpha - \gamma}$

§. 357. Η'. Ἐκ δύω εἰδῶν οἴνου, τοῦ μὲν ἀρίςου ὁ ξέςης 15 ὀβολῶν τιμᾶται, τοῦ δὲ κακίςου 10. Ἐθέλει οὖν τις τούτους κεράσαι, κἀκ τῶν δύω εἰδῶν ἕνα ξέςην ποιῆσαι, 12 ὀβολῶν τιμώμενον. Πόσον λήψεται ἐξ ἑκατέρου;

Λύσις. Λαβέτω ἀπὸ μὲν τοῦ κακίςου τὸ μέρος χ, ὅπερ (χ) κλάσμα τοῦ ξέςου τυγχάνει, ὡς ἔλαττον τοῦ ξέςου εἶναι κατὰ τὴν ὑπόθ. ὀφεῖλον. ἀπὸ τοῦ ἀρίςου ἄρα εἰς συμπλήρωσιν τοῦ ξέςου $1 - \chi$. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ ὅλου τοῦ ξέςου ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ τοῦ κακίςου οἴνου ληφθὲν ἤτοι τὸ χ. λειπόμενον ἔτι καὶ τὸ τοῦ ἀρίςου μέρος. τουτ. ἀπὸ μὲν τοῦ κακ. $= \chi$. ἀπὸ δὲ τοῦ ἀρ. $= 1 - \chi$. Ὁ ξέςης τοῦ κακ: τιμᾶται 10. ὥςε τὸ μέρος χ, $10 . \chi$. τοῦ δ' ἀρίςου 15 ὀβολῶν Ὥςε τὸ μέρος $1 - \chi$ τιμηθήσεται $(1 - \chi) . 15 = 15 - 15\chi$. Ἔνθεν τοι ὁλικὸς ὁ ξέςης τιμᾶται $10 . \chi + 15 - 15\chi$. τοῦτο δὲ κατὰ τὴν ὑπόθ. εἶναι ὀφείλει $= 12$. Ἐκ τούτου εὑρήσομεν τὸ χ. Ἡ δ' Ἐξίσωσις ἔςαι

$$10\chi - 15\chi + 15 = 12$$

$$15 - 12 = 15\chi - 10\chi$$

$$3 = 5\chi.$$

Καὶ $\chi = \frac{3}{5}$. Ἤτοι ἀπὸ μὲν τοῦ κακίςου λήψεται $\frac{3}{5}$, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου ἀπὸ τοῦ ἀρίςου $\frac{2}{5}$. Ἔςι γὰρ $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$. Ἀντὶ δὲ τοῦ ξέςου καὶ ἕτερον μέτρον ἂν παραληφθείη.

Εἰ οὖν ὁ ξέςης τοῦ κακίςου 10 τιμᾶται ὀβολῶν, $\frac{3}{5}$ τοῦ ξέςου τιμηθήσονται $\frac{3 . 10}{5} = 6$ ὀβ. τοῦ δὲ

ἀρίςου

ἀρίςου 15 ὀβ, $\frac{2}{5}$ ξ. τιμ. $\frac{2 \cdot 15}{5} = 6$ ὀβ. Ὥςε $6 + 6 = 12$ = τῇ τιμῇ τοῦ κραθέντος οἴνου.

Καὶ ἐν γένει. Ἔςω μικτέα δύω τινά, ὧν ἡ τιμὴ δεδομένη, εἰς τρίτον τι. Καὶ τοῦ μὲν ἡ τιμὴ κείσθω = α, τοῦ δ' ἑτέρου = β, τοῦ δ' ἐκ τῆς μίξεως ἀμφοτέρων = γ. Ὥςε κἀνταῦθα ἡ μὲν τοῦ κακίςου τιμὴ εἴη τὸ $\alpha\chi$, ἡ δὲ τοῦ ἀρίςου τὸ $(1 - \chi)\beta = \beta - \beta\chi$. Ἄμφω δὲ = γ.

Ὥςε $\alpha\chi + \beta - \beta\chi = \gamma$

$$\alpha\chi - \beta\chi = \gamma - \beta$$

$$(\alpha - \beta)\chi = \gamma - \beta$$

$$\chi = \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$$

Καὶ τοῦτό ἐςιν ὁ γενικὸς τύπος τῆς Μεθόδου τῆς Μίξεως διαφόρων εἰς ἕν, χρήσιμος ὢν παντὶ μίξεως εἴδει, χρυσοῦ, ἀργύρου, κτ.

§. 358. Θ'. Α ———— Γ. Ὁδοιπόρος τις ἀπὸ τοῦ Α ἀποδημήσας ἐπὶ τὸ Γ πορεύεται, 80 μίλλια τοῦ Α ἀπέχον, 6 μίλλια καθ' ἑκάςην διανύων ἡμέραν. Μετὰ δὲ 4 ἡμέρας, ἕτερος ἱππάζων ἀποδημήσας αὐτῷ ἕπεται, 10 μίλλια ἑκάςης διανύων ἡμέρας. Ζητεῖ μαθεῖν, ἐν πόσαις αὐτὸν καταλήψεται ἡμέραις.

Λύσις. Κἀπὶ τούτου ἡ τῶν Τριῶν Μέθοδος ἀναγκαία. Ἔςωσαν αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς αὐτὸν ὁ β'. καταλήψεται = χ. ὁ δὲ α' πρὸ δ' ἡμ. ἀποδημήσας, καὶ 6 μίλ. τῆς ἡμέρας διανύων, ἤδη $4 \cdot 6 = 24$ μιλ. τὸν β'. ὑπερέχει. Ἐν χ ἡμ. ἐν αἷς α. τὸν ὁ β'.

κι. α-καταλήψεται, ἔχεται τῆς ὁδοῦ. 6 μίλ. ὁσημέραι διανύων. ἐν χ ἄρα ἡμέρας ὁδοιπορήσει 6 χ μίλ. Ὅτι 1 ἡμέρα : χ μίλλ. = χ ἡμ. : 6 χ μίλ. Ὥςε ἡ ὁλικὴ ὁδοιπορία τοῦ α΄. πρὶν καταληφθῇ, ἐςὶν 24 + 6 χ μίλ. Ὁ β΄. ὁσημέραι ἱππάζεται 10 μίλ. ἔνθεντοι ἐν χ ἡμ. 10 χ μίλ. Καὶ ἐπειδὴ μετὰ τοῦτο τὸν α΄. καταλήψεται, τὰ διαςήματα, τὰ ὑπ᾽ ἀμφοῖν διανυσθέντα, ἐξ ἀνάγκης ἔςαι ἴσα.

ἤτοι $24 + 6\chi = 10\chi$

$24 = 10\chi - 6\chi = 4\chi$

$\frac{24}{4} = \chi$. ἢ $6 = \chi$. Ἐν 6 ἄρα ἡμ. καταληφθήσεται ὁ α΄. Ὥςε καὶ τὸ διάςημα τὸ διανυσθὲν ἔςαι = 60 μιλλίοις.

Ἐὰν αἱ ὁσημέραι ὁδοιπορίαι τοῦ α΄. ὁδοιπόρου = α κληθῶσι. τοῦ β΄. = β. ὁ χρόνος, καθ᾽ ὃν ὁ α΄. προεπορεύθη = γ. ἔςαι τοῦ α΄. τὸ διανυσθὲν διάςημα α΄. = αγ, καὶ β΄. ἔτι αχ. ὅτι γ ἡμέρας προώδευσε, καὶ χ ἡμέρας ὁδεύει ἔτι. Τηνικαῦτα οὖν τοῦ β΄. τὸ διάς. ἔςαι = βχ. Καὶ ἐπεὶ ἀμφοῖν τὰ διανυσθ. διαςήμ. ἴσα, ἔςαι $\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$

$\alpha\gamma = \beta\chi - \alpha\chi = (\beta - \alpha)\chi$

$\frac{\alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \chi =$ τῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ τὸν α΄. ἂν καταλάβοι.

Ἀλλὰ θῶμεν τὸν χρόνον, ἐν ᾧ ἐκεῖνον καταλήψεται, διωρισμένον, ἤτοι τὸ χ δεδομένον εἶναι, καὶ ζητεῖσθαι, πόσα μίλλια τὸν β΄. ὁσημέραι διανύειν χρὴ ἵνα τὸν α΄. καταλάβῃ. Ἐπειδὴ οὖν χ γνωτὸν, καὶ β ζ β ζητεῖται, ῥᾷςα διὰ τῆς ἑξῆς εὑρεθήσεται Ἐξισιώσεως.

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \chi \quad \cdot\ \beta - \alpha$$

$$\alpha\gamma = \beta\chi - \alpha\chi$$

$$\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$$

ἢ $$(\gamma + \chi)\,\alpha = \beta\chi \quad :\ \chi$$

$$\frac{(\gamma + \chi)\,\alpha}{\chi} = \beta.$$

ἢ καὶ, ἐπειδὴ $$\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi \quad :\ \chi$$

$$\frac{\alpha\gamma + \alpha\chi}{\chi} = \beta$$

$$\frac{\alpha\gamma}{\chi} + \alpha = \beta$$

Ἔνθεντοι ἐν τῷ προτέρῳ παραδείγμ. ἔνθα $\alpha = 6$. $\gamma = 4$. καὶ $\chi = 6$. β ἔςαι, ἡ πορεία τοῦ β'. ἡ ζητουμένη. ἥτις, τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀκριβοῦς ὄντος, $= 10$ ἔςαι. Ἀλλὰ $\frac{\alpha\gamma}{\chi} + \alpha = \frac{6 \cdot 4}{6} + 6 = 10$.

§. 359. Γ'. Ἄνθρωπός τις 100 χρυσοῦς καθ' ἕκαςον δαπανῶν ἐνιαυτὸν, κερδαίνει τοσοῦτον, ὥςε τὴν λοιπὴν αὐτοῦ περιουσίαν κατὰ τὸ τρίτον ἐπαύξειν. Μετὰ δὲ τρεῖς ἐνιαυτοὺς δὶς τοσοῦτον πλούσιος, ὅσου

ἐν

ἐν ἀρχῇ ἦν, ἀναφαίνεται. Πόσους οὖν χρυσοῦς κατ' ἀρχὰς ἐσχήκει, καὶ πόσους ἤδη;

Λύσις. Τεθήτω ἡ ἐν ἀρχῇ αὐτοῦ περιουσία $= \chi$ χρυσ. ἀφ' ὧν 100 λαμβάνει ἐν τῷ πρώτῳ ἐνιαυτῷ. Ἔχει οὖν ἔτι $\chi - 100$. Αὔξει δὲ τὸ λείψανον τοῦτο κατὰ τὸ τριτημόριον. Τὸ δὲ γ: μόριον τοῦ $\chi - 100 = \frac{\chi - 100}{3}$. Ἔχει ἄρα μετὰ τὸν α'. ἐνιαυτὸν $\chi - 100 + \frac{\chi - 100}{3}$.

Ἃ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀχθέντα παρονομ: $= \frac{3\chi - 300 + \chi - 100}{3} = \frac{4\chi - 400}{3}$.

Ἐκ τούτων λαμβάνει ἐν ἀρχῇ τοῦ β'. ἐνιαυτοῦ αὖθις 100 χρυσοῦς. Ὑπολείπονται δ' αὐτῷ ἔτι $\frac{4\chi - 400}{3} - 100$. Καὶ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀχθ. παρον. $= \frac{4\chi - 400 - 300}{3} = \frac{4\chi - 700}{3}$.

Αὔξεται δὲ τοῦτο ἔτι κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$. Τὸ τρίτον μέρος τούτου ἐςὶ $\frac{4\chi - 700}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\chi - 700}{9}$. Ἐν τέλει ἄρα τοῦ β'. ἐνιαυτοῦ ἔσχε $\frac{4\chi - 700}{3} + \frac{4\chi - 700}{9}$

$= \frac{12\chi - 2100 + 4\chi - 700}{9} = \frac{16\chi - 2800}{9}$.

Λαμβάνει δ' ἐκ τούτων ἐν ἀρχῇ τοῦ γ'. ἐνιαυτοῦ πάλιν 100 χρυσοῦς. Εἰσὶν οὖν αὐτῷ ἔτι $\frac{16\chi - 2800}{9} - 100$

$= \frac{16\chi - 2800 - 900}{9} = \frac{16\chi - 3700}{9}$.

ὑπὸ

ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀνχθ. παρον. Αὔξεται δὲ τὸ λείψανον ἐν τῷ γ'. ἐνιαυτῷ αὖθις κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$. Τὸ δὲ τριτημόριον ἐςὶ $\frac{16\chi - 3700}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16\chi - 3700}{27}$.

Εἰ τέλει τοίνυν τοῦ γ'. ἐνιαυτοῦ ἔχει $\frac{16\chi - 3700}{2} +$

$$\frac{16\chi - 3700}{27} = \frac{48\chi - 11100 + 16\chi - 3700}{27}$$

$$= \frac{64\chi - 14800}{27}$$ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀνκχθ. παρον. Τὸ δὲ πᾶσα ἡ αὐτοῦ περιουσία ἐςὶν ἐν τέλει τοῦ γ'. ἐνιαυτοῦ. Κατὰ δὲ τὸ Πρόβλημα διπλάσιον τοῦτο εἶναι ὀφείλει τοῦ ἐν ἀρχῇ. Ἐπεὶ δ' ἐν ἀρχῇ χ εἶχεν, ἀναγκαίως τοῦτο ἔςαι $= 2\chi$. Ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις

$$\frac{64\chi - 14800}{27} = 2\chi$$

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot 27$$

$$64\chi - 14800 = 54\chi$$

$$64\chi = 54\chi + 14800$$

$$64\chi - 54\chi = 10\chi = 14800$$

$$\overline{\qquad\qquad} : 10$$

$\chi = \frac{14800}{10} = 1480$. Ἐν ἀρχῇ ἄρα ἴσχε 1480 χρυσοῦς. Μετὰ δὲ τρία ἔτη $1480 \cdot 2 = 2960$.

§. 360. ΙΑ'. Δεσπότης τις τῷ ἑαυτοῦ ὑπισχνεῖται δούλῳ ἐν τῷ α'. ἐνιαυτῷ 40 θαλ; μισθὸν αὐτῷ παρέξειν, καὶ 10 θαλήροις τοῦτον καθ' ἕκασον τῶν ἑξῆς ἐπαύ-

ἐπαύξειν ἐνιαυτῶν, ἀλλὰ καὶ δῶρον αὐτῷ δωρεῖσθαι, ὥςε τὸ τοῦ β΄ ἐνιαυτοῦ 2 θαλήροις τὸ τοῦ α΄. ὑπερτερεῖν, ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ γ΄ τὸ τοῦ β΄, κτ. Τῶν 5 δὲ παρῳχηκότων ἐνιαυτῶν, ὁ δοῦλος ἔτι λήψεται 435 θαλ. πλὴν 100, οὓς ἐν τοσούτῳ παρὰ τοῦ δεσπότου ἔλαβε. Ζητεῖται, 1) πόσος ὁ μισθὸς τῶν 5 ἐνιαυτῶν. καὶ 2) πόσου τὰ δῶρα τιμηθήσονται; Ἐπειδὴ ὁ δοῦλος ἐν γένει 100 + 435 θαλ. = 535 θ. παρὰ τοῦ δεσπότου ἀπαιτεῖ, ὁ δὲ τούτου μισθὸς, κατὰ τὴν ὑπόθ. 40 + 50 + 60 + 70 + 80 = 300 θαλ. τὰ δῶρα, ἤπου δῆλον, ἐν τοῖς ὑπολειπομένοις 35 θαλ. ἐμπεριέχεται. Ἔςω ἄρα τὸ δῶρον τοῦ α΄. ἐνιαυτοῦ = χ. καὶ κατὰ τὴν ὑπόθ. προκύψει ἡ ἐχομένη τῶν δώρων σειρά. χ, $\chi + 2$, $\chi + 4$, $\chi + 6$, $\chi + 8$ =

$$5\chi + 20 = 35.$$

$$5\chi = 35 - 20 = 15$$

$$\chi = \frac{15}{5} = 3 \text{ θαλ.}$$

= τῇ τιμῇ τοῦ δώρου τοῦ α΄. ἐν. Ὥςε τὸ τοῦ β΄. = 5. τὸ τοῦ γ΄. = 7 τὸ τοῦ δ΄. = 9. τὸ τοῦ ε΄. = 11. πάντα = 35 θαλ.

§ 361. ΙΒ΄. Ἀποθανών τις καταλείπει τοῖς ἑαυτοῦ παισὶ κληρονομίαν, σκεύη ἀργυρᾶ, λίθους τιμίας, ἱμάτια λινᾶ, καὶ χρήματα, πάντα συνάμα 1800 θαλ τιμώμενα. Εἰσὶ δ' αἱ μὲν λίθοι τρὶς τοσούτου ἄξιαι, ὅσου τὰ ἀργυρᾶ σκεύη, τὰ δὲ χρήματα 30 θαλήροις ἐλάττω τῆς ἡμισείας τιμῆς τῶν ἀργυρῶν σκευῶν, καὶ τῶν λίθων συνάμα. τῶν δὲ λινῶν ἱματίων ἡ τιμὴ 1 θαλήροις ἐλαττοῦται τοῦ ἡμίσεος τῶν χρημάτων. Ζητεῖται, πόσου ἕκαςον ἄξιον.

Λύσις. Ἔςω τὰ ἀργυρᾶ σκεύη χ θαλ. ἄξια. Ἐπεὶ δὲ τῶν λίθων ἡ τιμὴ τριπλῆ, ἔσονται ἄξιαι 3χ θαλ. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ χρήματα 30 θαλ. ἐλαττοῦται τῆς

τῆς ἡμισείας τιμῆς ἀμφοῖν συνάμα τῶν προηγουμένων, ἔςαι $\frac{\chi + 3\chi - 30}{2} = \frac{4\chi - 30}{2} = 2\chi - 30.$ = Τῶν δὲ λινῶν ἱμ. 10 θαλ. ἐλαττουμένων τοῦ ἡμίσεος τῶν χρημάτων ἡ τιμὴ = $\frac{2\chi - 30}{2} - 10 = \chi - 15 - 10 = \chi - 25$. Ἡ δὲ τιμὴ ἁπάντων

$$\chi + 3\chi + 2\chi - 30 + \chi - 25 = 1800$$

ἢ μᾶλλον

$$7\chi - 55 = 1800$$

$$7\chi = 1800 + 55 = 1855.$$

$$\chi = \frac{1855}{7} = 265 \text{ θαλ.}$$

Ὥςε τὰ ἀργυρᾶ σκεύη ἄξια $= \chi = 265$ θαλ.

αἱ λίθοι 3χ $= 795$ θ.

τὰ χρήματα $2\chi - 30 = 530 - 30 = 500$

τὰ λινᾶ ἱμάτια $\chi - 25 = 265 - 25 = 240$

1800 θαλ.

§. 262. Δίδονται δὲ καὶ Προβλήματα, ὧν ἡ ἐπίλυσις καὶ ἀκριβῶς ὑπολογιζομένοις ἀδύνατος, ἥτις μέντοι δυνατὴ, τῶν τοῦ Προβλήμ. ὑποθέσεων, καὶ καταςάσεων μεταβληθεισῶν. π. χ. Δίελε 32 εἰς δύω μέρη, ὥςε τοῦ μείζονος τὸ πηλίκον, διὰ τοῦ 8 διαιρεθέντος, καὶ τὸ τοῦ ἐλάσσονος διὰ τοῦ 6, ἄμφω τῷ 4 ἐξισοῦσθαι. Κείσθω τὸ μεῖζον $= \chi$. Τὸ ἔλαττον ἄρα $= 32 - \chi$. διαιρεθήτω τὸ μεῖζον διὰ 8, ἤτοι $\frac{\chi}{8}$, καὶ τὸ ἔλαττον διὰ τοῦ 6, τουτ: $\frac{32 - \chi}{6}$.

Ἄμφω

Ἄμφω τὰ πηλίκα, κατὰ τὴν ὑπόθ. = 4. Ἐντεῦθεν ἡ Ἐξίσωσις

$$\frac{x}{8} + \frac{32 - x}{6} = 4 \quad \cdot 8$$

$$x + \frac{256 - 8x}{6} = 32 \quad \cdot 6$$

$$6x + 256 - 8x = 192$$

$$6x - 8x = 192 - 256$$

$$-2x = -64 \text{ . ἄρα καὶ}$$

$$+2x = +64 \text{ . Ὥστε ὁ μείζων ἀριθμὸς ἐστὶ}$$

$$x = 32$$

32. Καὶ ἐπεὶ ὁ ἐλάττων 32 — x, εἴη ἂν 32 — 32 = 0. Ὅθεν οὐδεὶς ἐλάσσων πάρεστιν. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθ. παρεῖναι δεῖ καὶ τὸν ἐλάσσονα. Ἄρα τὸ Πρόβλ. κατὰ τὸν δοθέντα τρόπον ἀδύνατον.

§. 363. Προβλήματος δὲ προτιθεμένου τοῦ α'. βαθμοῦ, ᾧ δύω, τρεῖς, ἢ καὶ πλείους τῶν ἀγνώστων ἐνυπάρχουσι ποσοτήτων, τοσαύτας Ἐξισώσεις συστήσομεν, κατὰ τὰς τοῦ Προβλήματος ὑποθέσεις, ὅσαι τῶν ποσοτήτων αἱ ζητούμεναι ἄγνωστοι. Ἀλλ' οὐδεμίαν τούτων (τῶν ἀγν.) ἐφ' ἑτέραν (καὶ ταύτην ἄγν.) πεπολλαπλασιασμένην εἶναι χρή. Ἄλλως γὰρ ἐν τῇ τοῦ Προβλήμ: ἐπιλύσει οὐχ ἁπλαῖ προκύψουσιν Ἐξισώσεις. Χρῶνται δὲ, τὰ τοιαῦτα τῶν Προβλ. ἐπιλύσειν μέλλοντες, διαφόροις Μεθόδοις. Ἤτοι γὰρ ἡ εὑρεθεῖσα δύναμις μιᾶς ἀγνώστου ἐπὶ τῶν

ἑτέρων

ἑτέρων ἀντικαθίςαται Ἐξισώσεων, ἢ καὶ ἐκ δύω Ἐξισώσεων τὴν δύναμιν μιᾶς εὑρόντες ἀγνώςου, ἄμφω τὰς δυνάμεις καινὴν ποιοῦμεν Ἐξίσωσιν, ἢ τρίτον δυάδα Ἐξισώσεων προσθέντες, ἢ ἀφελόντες, τάχιςα εἰς πέρας τοῦ προκειμένου ἂν ἀφικοίμεθα. Διὰ παραδειγμάτων ἀναπτυχθήσεται τὸ λεγόμενον.

§. 364. Καὶ α΄. Εἰ δύω ἄγνωςοι ποσότητες τῷ προβλήματι ἔνεισι.

Δοθέντων τοῦ Κεφαλαίου, καὶ τῆς Διαφορᾶς δύω ἀριθμῶν, εὑρεθήτωσαν οἱ ἀριθμοί. Κληθήτωσαν δὲ, ἅτε ἄγνωςοι, ὁ μὲν μείζων χ, ὁ δ᾽ ἐλάσσων ψ. Τὸ τούτων Κεφάλαιον δέδοται. Ὅπερ ἔςω $= \alpha$. Ἀλλὰ καὶ ἡ τούτων Διαφορὰ, ἥτις $= \beta$ τεθήτω. Ἐκ τούτων σύνίςανται δύω Ἐξισώσεις αἱ ἑξῆς. $\chi + \psi = \alpha$. Καὶ $\chi - \psi = \beta$, ἃς κατὰ τοὺς διαφόρους ἐπιλύσωμεν τρόπους.

1) Διὰ τῆς ἀντικαταςάσεως τῆς εὑρεθείσης τιμῆς καὶ δυνάμεως τῆς ἑτέρας τῶν ἀγνώςων ἐπὶ τῆς ἑτέρας Ἐξισώσεως. $\chi + \psi = \alpha$. $\chi = \alpha - \psi$. Τὸ τῷ χ ἴσα δυνάμενον, ἤτοι τὸ $\alpha - \psi$ θὲς ἐπὶ τῆς ἑτέρας Ἐξισ. ἤτοι τῆς $\chi - \psi = \beta$, ἀντὶ τοῦ χ, ἥτις εἰς τήνδε τραπείη $\alpha - \psi - \psi = \beta$

$$\text{ἢ } \alpha - 2\psi = \beta$$

$$\alpha = \beta + 2\psi$$

$$\alpha - \beta = 2\psi \quad : 2$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \psi$$

Ἐπειδὴ οὖν εὕρηται τὸ ψ, ἔςαι γνωςὸν καὶ τὸ χ. Ἐπειδὴ γὰρ κατὰ τὴν α΄. Ἐξίσ. $\chi = \alpha - \psi$, ἀντικαταςήσας

τοῦ