ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ἐν γένει, καὶ περὶ τῶν Ἐξισώσεων τοῦ α'. βαθμοῦ, καὶ τῆς τούτων ἐπιλύσεως.

§. 342. Ἐξίσωσις ἐςὶν Ἔκφρασις διάφορος τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἧς μεταξὺ τὸ τῆς ἰσότητος τίθεται σημεῖον (=). Ὡς $5 + 7 = 10 + 2$. ἢ $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$, κτ. Ἧς (Ἐξισ.) δύω οἱ ὅροι, ὁ μὲν δεξιόθεν, ὁ δ' ἀριςερόθεν τοῦ σημείου κείμενος. Ἑκάτερος δὲ ἤτοι ἁπλοῦς, ἢ συμπεπλεγμένος. Εἰ οὖν ταύτῃ τῇ Ἐξισώσει ἄγνωςος ἐνυπάρχοι Ποσότης, ὡς $4 \cdot 6 = 3 \cdot \chi$. διὰ τῶν δοθεισῶν ῥᾳδίως ἂν εὑρεθείη, Ἀναγκαῖον μέντοι τὴν Ἐξίσωσιν οὕτω μετατίθεσθαι, ὡς ἀεὶ ἑκατέρωθι τοῦ σημείου τοὺς ὅρους ἰσοδυναμεῖν, εἰς ὃ τὸ χ (ἤτοι ἡ ἄγνωςος ποσότης, ἡ δι' αὐτοῦ δηλουμένη (§. 42.) μονωθὲν τὴν ἑαυτοῦ δύναμιν ἡμῖν ὑποδείξῃ. Ἵνα δὲ τὸ χ μόνον ἐπὶ τάδε, ἢ ἐπ' ἐκεῖνα τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος ὑπολειφθῇ, χρηςέον Προσθέσει, Ἀφαιρέσει, Πολλαπλασιασμῷ, Διαιρέσει, εἰς Δυνάμεις ἐξάρσει, Ἐξαγωγῇ τῶν Ῥιζῶν, Λογαριθμικοῖς, καὶ παντὸς ἑτέρου εἴδους ὑπολογισμοῖς κατὰ τὴν χρείαν, ὅπερ ὑπὸ τοῦ ὀρθοῦ διδαχθησόμεθα λόγου. Ἐπὶ τοῦ προτεθέντος παραδ. διαιρεθέντων ἀμφοῖν τῶν ἴσων διὰ 3, μονωθήσεται τὸ χ, (ἐκείνων καὶ μετὰ τοῦτο ἴσων τηρουμένων (§. 114. α'.)) ἴσον ὂν ταῖς γνωςαῖς ποσότησι, ταῖς ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου. Ἔςαι γὰρ

4 · 6

$$4 \cdot 6 = 3 \cdot x$$

$$: 3$$

$$\frac{4 \cdot 6}{3} = \frac{3 \cdot x}{3} = x. \quad \text{Ἀλλ'} \quad \frac{4 \cdot 6}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

Ἄρα $8 = x$.

§. 343. Προβλήματος δὲ εἰς ἐπίλυσιν προκειμένου, τὰς αὐτοῦ καταστάσεις, καὶ τὰς ἐν αὐτῷ γνωστὰς, καὶ ἀγνώστους Ποσότητας ὅτι μάλιστα διασκέπτεσθαι, καὶ ἐκ τούτων τὴν Ἐξίσωσιν συνιστᾶν χρή. Κανόνες γὰρ τούτων οὐ δίδονται. Χρήσιμος δ' εἰς τοῦτο καὶ ἡ συνεχὴς ἄσκησις, θήγουσα τὴν διάνοιαν, ὥστε ῥᾳδίως τὰ προβαλλόμενα κατανοεῖν, καὶ τὴν ἐκ τούτων Ἐξίσωσιν διατάττειν. Πολλάκις δὲ ἡ ἐπίλυσις τοῦ Προβλήματος καθ' ἑαυτὴν εὐχερεστέρα, ἢ ἡ τῶν ὅρων τῆς Ἐξισώσεως διάταξις, ἔνθα προσοχῆς πολλῆς χρεία. Ὅλως δὲ, ἡ Ἄλγεβρα χρησμός ἐστιν ἄντικρυς, ἀεὶ μὲν ἀποκρινομένη, ὀρθῶς δὲ καὶ ἀπταίστως τῷ οὕτω χρηστηριαζομένῳ.

§. 344. Καὶ αὐτὰ δὲ τὰ Προβλήματα πολλῷ ἀλλήλων διαφέροντα τυγχάνει. Τοῖς μὲν γὰρ, μία καὶ μόνη ἄγνωστος Ποσότης, τοῖς δὲ, δύω, τρεῖς, καὶ ἔτι πλείους ζητούμεναι πάρεισιν. Ἔνθεν τοι ἐπ' ἐκείνων μὲν, καὶ Ἐξισώσεως μιᾶς χρεία, ἐπὶ δὲ τούτων, τοσούτων, ὅσαι αἱ ζητούμεναι ἄγνωστοι, ἃς πάσας (Ἐξισ.) ἐκ τοῦ Προβλήματος ἐπαγαγεῖν δεήσει. Αὖθις τῶν Προβλημάτων τὰ μὲν Διωρισμένα, οἷς μοναχῶς ἀπαντῶμεν. Τὰ δὲ, Ἀδιόριστα, ἢ Ἀόριστα, οἷς πολλαχῶς. Περὶ ὧν (Ἀδιορ.) ὕστερον. Ἤδη δὲ λόγος περὶ τῶν διωρισμένων, ἔνθα τὸ Πρόβλημα διὰ τῶν κατ' αὐτὸ καταστάσεων οὕτω διορίζεται, ὥστε τὴν τιμὴν καὶ δύναμιν τῆς ἀγνώστου ποσότητος μίαν εἶναι καὶ μόνην. Καὶ

Ἐξίσωσις μὲν τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἀκούει, ἐν ᾗ ἡ ἄγνωςος ποσότης πρώτης τυγχάνει δυνάμεως, οἷον χ, ψ, ω. Ἡ δ' Ἐξίσωσις καταλλήλως διαταχθεῖσα, ἐὰν ἡ ἄγνωςος ἐν τῇ β'. ᾖ δυνάμει, ὡς χ^2, ψ^2, κτ., τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καλεῖται. Τοῦ δὲ χ, ἢ καὶ ἑτέρων ἀγνώςων εἰς τὴν γ'. ἐξηρμένων δύναμιν, οἷον χ^3, ψ^3, κτ. τοῦ τρίτου βαθμοῦ. Ὅλως δὲ, ἡ Ἐξίσωσις ἐκ τῆς δυνάμεως, εἰς ἣν ἡ ἄγνωςος ἠρμένη ἀπαντᾷ, προσαγορεύεται. Τούτων δ' εὐχερέςεραι εἰς ἐπίλυσιν αἱ τοῦ α'. βαθμοῦ, περὶ ὧν καὶ δὴ ῥητέον.

§. 34ε. Καὶ τούτων αὖθις, (τῶν τοῦ α'. βαθμοῦ) ἃς διὰ Προσθέσεως, ἢ Ἀφαιρέσεως μόνης δυνατὸν ἐπιλύειν, αἱ μάλιςα εὐχερεῖς. π. χ. Ἔςω $\chi + \alpha = \beta$. Ἐὰν ἀμφοῖν $+ \alpha$ ἀφαιρεθῇ, ἢ $- \alpha$ προςεθῇ, ἐπὶ θάτερα τοῦ σημείου τοῦ χ μονωθέντος, ἀναφανήσεται ἡ τούτου δύναμις. Ἐπειδὴ γὰρ $\chi + \alpha = \beta$. Ἔςαι καὶ (§.48.α'.)

$$\begin{array}{rl} & \chi + \alpha = \beta \\ \text{προς.} & \underline{-\alpha = -\alpha} \\ & \chi = \beta - \alpha \end{array}$$

Διὰ γὰρ τῆς προσθέσεως τοῦ $-\alpha$, τοῦ τῷ χ συμπεπλεγμένου $+\alpha$ ὑπ' ἐκείνου ἀναιρεθέντος, μένει μόνον τὸ χ. Ἡ δὲ πλαγίως ἀγομένη γραμμὴ τὸ, Ἄρα σημαίνει.

Ὡσαύτως καὶ
$$\begin{array}{rl} & \chi - \alpha = \beta \\ & \underline{+\alpha = \beta} \ \text{προς.} \\ & \chi = \beta + \alpha \end{array}$$

Ἐν ἀριθμοῖς.

$$\begin{array}{l} 4 + \chi = 16 \\ \underline{-4 = -4} \ \text{προς.} \\ \chi = 16 - 4 = 12 \end{array} \quad\Bigg|\quad \text{Καὶ} \begin{array}{rl} & \chi - 8 = 15 \\ \text{προς.} & \underline{+8 = 8} \\ & \chi = 15 + 8 = 23 \end{array}$$

§. 346.

§. 346. Ἤπου ἑκάςῳ, τὰς προκειμένας Ἐξι-
ώσεις θεωροῦντι, πρὸ ὀφθαλμῶν παρίςαται, ἐὰν, ἵνα
ὁ χ μόνον ὑπολειφθῇ, τὴν τούτῳ προσκειμένην πο-
σότητα διὰ προσθέσεως, ἢ Ἀφαιρέσεως ἀπὸ θατέρου
τῆς Ἐξισώσεως ἀποβάλλωμεν, ἐναντίως ἔχοντι τῷ ση-
μείῳ ἐπὶ θάτερα μετατίθεται ἡ αὐτὴ ποσότης. Ὅθ-
εν ὁ κανών. Ἀπὸ θατέρου ἐπὶ θάτερα τοῦ
σημείου ποσότητα μεταθεῖναι βουλόμε-
νος, ἀπαλείψας αὐτὴν θὲς ἐπὶ θάτερα
ἀντιθέτῳ τῷ σημείῳ. Οἷον, εἰ Ἐξίσωσις πρό-
κειται

$$\chi + \alpha - \gamma\delta = \beta$$

ἔςαι

$$\chi = \beta - \alpha + \gamma\delta,$$

τῶν γνωςῶν ποσο-
τήτων μετ' ἐναντίων
τοῖς προτέροις σημείων εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου με-
τενεχθεισῶν.

§. 347. Τῶν δ' Ἐξισώσεων οὕτως ἐχουσῶν,
ὥςε τὴν ἄγνωςον ἐγνωσμένῃ ἑτέρᾳ τῷ πολλαπλασια-
σμῷ συνημμένην εἶναι, διὰ τῆς διαιρέσεως τὸ χ μονώ-
σαντες ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τῆς ἰσότητος σημείου τὸ ἴσον
τηρήσομεν. ὡς

$$\beta\chi - \gamma + \delta = 5\alpha$$

$$\beta\chi = 5\alpha + \gamma - \delta \quad : \beta$$

$$\chi = \frac{5\alpha + \gamma - \delta}{\beta}.$$

Παράδειγμα. Παῖς τις πρὸς ἕτερόν φησιν. εἴ-
περ τετραπλασίω τῶν σῶν μῆλα ἔσχον, καὶ 8 πρὸς
τούτοις, εἶχον ἂν τὰ ἐμὰ 60. Ζητεῖται οὖν, πόσα εἶ-
χεν

χεν ὁ ἕτερος. Ἐπειδὴ ἄγνωςα, τεθήτω = χ. Ὁ α΄. ἔφη. εἰ τετραπλασίω ἔσχε, καὶ ἔτι 8, εἶεν ἂν τὰ αὐτοῦ = 60. Ὥςε ἀνάγκη τέσσαρα χ, καὶ 8 = 60 εἶναι. Ἔςαι ἄρα ἡ Ἐξίσωσις

$$4\chi + 8 = 60$$

8 ἐπὶ τάδε μετεν.

$$4\chi = 60 - 8 = 52$$

: 4

$$\frac{4\chi}{4} = \chi = \frac{52}{4}$$

· ἤ

$$\chi = 13.$$

Τὰ οὖν τοῦ ἑτέρου παιδὸς μῆλα = 13. Καὶ γὰρ 13 · 4 + 8 = 60.

§. 348. Τῶν δὲ ὅρων τῆς Ἐξισώσεως ἤτοι πάντων, ἢ τινῶν, κλασματικῶν ὄντων, πειρατέον τῷ πολλαπλασιασμῷ ἁπάντων τῶν ὅρων ἐπὶ πάντας τοὺς τῶν κλασμάτων παρονομαςὰς, εἰς ὁλοσχερεῖς αὐτοὺς μεταβαλεῖν ἀριθμούς. Καὶ μετὰ τοῦτο γάρ, οἱ ἑκατέρωθι ὅροι τὸ ἴσον τηρήσουσι. (§. 79. α΄.) ἢ ἐκ πάντων τῶν παρονομαςῶν ἕνα ποιήσαντες, μετὰ τούτου τοὺς τῆς Ἐξισώσεως πολλαπλασιάσομεν ὅρους.

Ὡς

Ὡς $\frac{\chi}{3} + \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta\delta}{4} = \gamma \quad \cdot 3$

$$\chi + \alpha - \frac{3\beta\delta}{4} = 3\gamma \quad \cdot 4$$

$$4\chi + 4\alpha - 3\beta\delta = 12\gamma$$

$$4\chi = 12\gamma - 4\alpha + 3\beta\delta. \quad (\S. 346.) \quad : 4$$

$$\chi = \frac{12\gamma - 4\alpha + 3\beta\delta.}{4}$$

ἢ $\chi = 3\gamma - \alpha + \frac{3\beta\delta.}{4}$

Τὸ αὐτὸ δ' ἂν προκύψειε, καὶ ἐὰν ἡ Ἐξίσωσις τῷ κοινῷ τῶν κλασμάτων παρονομαςῆ, ἤτοι τῷ 36, πολλαπλασιασθῆ, ἢ τῷ 12. (§. 125. σχόλ.)

Τὰ αὐτὰ γενήσεται, καὶ τῆς ἀγνώςου ποσότητος τῷ τοῦ κλάσματος παρονομαςῆ ὑπαρχούσης. οἷον

$$\frac{100}{\chi} - 8 = 12 \quad \cdot \chi$$

$$100 - 8\chi = 12\chi$$

$$100 = 12\chi + 8\chi = 20\chi \quad : 20$$

$$5 = \chi$$

Ὡσαύτως καὶ τοῦ ἑπομένου παραδείγ. προκειμένου.

5χ + 3

$$\frac{\frac{5x + 3}{x - 1} = 7}{5x + 3 = 7x - 7} \cdot x - 1$$

$$\frac{5x + 3 = 7x - 7}{3 + 7 = 7x - 5x} \quad (\S.\ 346.)$$

$$10 = 2x.\ \text{ἢ}\ \tfrac{10}{2} = x.\ \text{ἢ}\ 5 = x.$$

Ἔνθα ἑκατέρωθι τοῦ σημείου, τοῦ κλάσματος ἀποσκευασθέντος τῆς β'. Ἐξισώσεως, ἔγκειται ἡ ἄγνωςος ποσότης. Τούτου οὖν κἀπὶ ἄλλων οὕτως ἔχοντος, διὰ σπουδῆς ἔχειν χρὴ μετ' ἀντικειμένων σημείων ἐπὶ θάτερα μόνον τὴν ἄγνωςον μεταβιβάζειν. Εἰ δὲ τὸ x ἐν πλείοσιν ὅροις ὁλοσχερῶν ποσοτήτων, τὸ προτεθὲν παράδειγμα, ὅπως χωρητέον, διδάξει. τουτ. τῶν συνεργῶν τοῦ x ἀριθμιῶν ὄντων, προςιθέαμεν τούτους ἀλλήλοις, ἢ ἀφαιροῦμεν, ὡς ἐνταῦθα. Ἔςι γὰρ $7x - 5x = 2x$. Τῆς δ' Ἐξισώσεως καθόλου οὔσης, τουτ. μόνον ἐκ γραμμάτων συγκειμένης, τὴν ἄγνωςον ποσότητα, πλείοσιν ὅροις ἐνυπάρχουσαν τῆς αὐτῆς δυνάμεως, ὡς τοῦτο ἀεὶ αἱ τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξισώσεις ἀπαιτοῦσι, γενικὸν παράγοντα ποιητέον. τὰς λοιπὰς δὲ τῷ σημείῳ τῆς Παρενθέσεως ἐναποληπτέον. (§. 78.) Καὶ ἐν γένει, ἐπὶ πασῶν τῶν Ἐξισώσεων τὰς ποσότητας εἰς τοὺς κατ' αὐτὰς παράγοντας ἀναλύειν, καὶ τρόποις ἑτέροις, τὴν εὕρεσιν τῆς ἀγνώςου ἐξευμαρίζουσι, χρῆσθαι, ὅτι χρήσιμον. Ἔςω ἡ Ἐξίσωσις.

$$\frac{\alpha\chi + \beta}{\chi - \gamma} = \eta\delta - \zeta$$

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot \chi - \gamma$$

$$\alpha\chi + \beta = \eta\delta\chi - \zeta\chi - \gamma\eta\delta + \gamma\zeta.$$ μεταχθ. τὸ αχ.

$$\beta = \eta\delta\chi - \alpha\chi - \zeta\chi - \gamma\eta\delta + \gamma\zeta.$$ πᾶσαι αἱ γνωςαὶ ἐπὶ θάτερα.

$$\beta + \gamma\eta\delta - \gamma\zeta = \eta\delta\chi - \alpha\chi - \zeta\chi$$

Ἔνθα τὸ χ κοινὸς ὅρος. Ὥςε

$$\beta + \gamma\eta\delta - \gamma\zeta = (\eta\delta - \alpha - \zeta)\,\chi$$

$$\overline{\qquad\qquad} : \eta\delta - \alpha - \zeta$$

$$\frac{\beta + \gamma\eta\delta - \gamma\zeta}{\eta\delta - \alpha - \zeta} = \chi. \text{ ἢ } \frac{\beta + (\eta\delta - \zeta)\gamma}{\eta\delta - \alpha - \zeta} = \chi.$$

κλασματικῆς δὲ οὔσης τῆς ἀγνώςου ἐν πλείοσιν ὅροις τῆς Ἐξισ. τῶν κλασμάτων ἀλλήλοις προσαθροισθέντων, μετὰ τὸ εἰς τὸν αὐτὸν ἀχθῆναι παρονομ. τελεῖται τὰ σύνηθη.

Παράδειγμα. Ποιμὴν τις ἐρωτηθεὶς, πόσα πρόβατα ἔχοι; ἀπεκρίνατο τὸ δ'. μέρος τῶν προβάτων ὁ ἐμὸς ποιμαίνει δοῦλος. τὸ η'. ὁ ἐμὸς ἀδελφός. τὰ δ' ὑπ' ἐμοῦ ποιμαινόμενα τὸ ἥμισυ πάντων, ὧν ἔχω, εἰσὶ προβάτων. Εἰσὶ δ' ἔτι καὶ 4, ἐν τῇ μάνδρᾳ. Ζητεῖται οὖν τὸ κεφάλαιον τῶν αὐτοῦ προβάτων. Ὡς ἄγνωςον ῥηθήτω χ.

Τούτων

Τούτων ὁ δοῦλος ποιμαίνει τὸ δ'. μέρος. ὥϛε $\frac{1}{4}\chi$.
ὁ ἀδελφὸς . . τὸ η'. ἤτοι $\frac{1}{8}\chi$.
αὐτὸς δὲ . . τὸ ἥμισυ. τουτ. $\frac{1}{2}\chi$.
ἐν δὲ τῇ μάνδρᾳ εἰσὶ 40.

Ὥϛε πάντα εἰσὶ $\frac{1}{4}\chi + \frac{1}{8}\chi + \frac{1}{2}\chi + 40$. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου ταῦτα ἐξισοῦνται τῇ ἀγνώϛῳ ποσότητι, ἤτοι τῷ χ. Κατὰ τοῦτο οὖν ῥᾳϛα τὴν Ἐξίσωσιν περανοῦμεν.

$$\frac{1}{4}\chi + \frac{1}{8}\chi + \frac{1}{2}\chi + 40 = \chi$$

πρόσθες τὰ κλάσμ.

$$\frac{7}{8}\chi + 40 = \chi$$

. 8 ἀποσκευασθήτω τὸ κλάσμα διὰ πολλαπλ. (§. 348.)

$$7\chi + 320 = 8\chi$$

$$320 = 8\chi - 7\chi \quad (\text{§. } 346.)$$

ἢ

$$320 = \chi$$

Ἔχει τοίνυν 320 πρόβατα. Τούτων ποιμαίνει ὁ δοῦλος $\frac{1}{4}\chi = \frac{320}{4} = 80$
ὁ ἀδελφὸς $\frac{1}{8}\chi = \frac{320}{8} = 40$
αὐτὸς δὲ $\frac{1}{2}\chi = \frac{320}{2} = 160$
καὶ 40 ἐν τῇ ποίμνῃ $= 40$

τὸ κεφ. $= 320$

§. 349. Ἐνίοτε δὲ ἡ τοῦ α'. βαθμοῦ Ἐξίσωσις, β. βαθμοῦ εἶναι δοκεῖ, διὰ τὸ δευτέρας δυνάμεως εἶναι τὸ ταύτης χ, καίτοι τῷ ὄντι τοῦ α'. οὖσα. π. χ. ἐπὶ τοῦδε τοῦ Προβλήματος, Ζήτησον ἀριθμόν, οὗ οὗ ὁ Τετράγωνος τηλικοῦτος, ἡλίκος ὁ ἀριθμὸς, δὶς ληφθείς. Ἔςω ὁ ἀριθμος $= \chi$. Ὥςε κατὰ τὴν ὑπόθεσιν.

$$\frac{\chi^2 = 2\chi.}{\chi = 2} : \chi$$

Ὁ 2 ἄρα ἐςὶν εἷς καὶ μόνος ἀριθμὸς τοιοῦτος. Ἔςι γὰρ $2^2 = 4$. καὶ $2 . 2 = 4$.

Καὶ ῥιζικῶν δὲ σημείων τῇ Ἐξισώσει προσόντων, μένοι μέντοι τοῦ α΄. βαθμοῦ. Ἀλλ' ἐπὶ τὸ τὸ ῥιζικὸν διαφυγεῖν σημεῖον, εἰς τὴν εἰς δυνάμεις ἔξαρσιν καταφευκτέον. π. χ. Ζητηθήτω ἀριθμὸς, οὗ ἀπὸ 1000 ἀφαιρεθέντος τὸ λείψανον ἕξει ῥίζαν Τετραγωνικὴν τὸν 16 ἀριθμόν. τουτ. ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ λειψάνου $= 16$. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔςω $= \chi$. Οὗτος ἀφαιρεθήτω ἀπὸ 1000, καὶ ἀπὸ τοῦ λειψάνου ἐξαχθήτω ἡ τετρ. ῥίζα. Τὸ δὲ σχῆμα εἴη ἂν $\sqrt{(1000 - \chi)}$. Καὶ τούτου γεγονότος, ἡ ῥίζα ἔςαι $= 16$. Ὥςε προκύπτει ἡ Ἐξίσ. $\sqrt{(1000 - \chi)} = 16$. Καὶ τῶν ὅρων τῆς Ἐξισ. εἰς Τετράγωνον ἀρθέντων, ἐκπίπτει τὸ $\sqrt{}$.

Ἤτοι $1000 - \chi = 16 . 16 = 256$.

$$\frac{\overline{}}{1000 = 256 + \chi}$$

$$1000 - 256 = \chi. \quad \text{ἢ} \quad 744 = \chi.$$

Εἰ οὖν ἀπὸ 1000 ὁ 744 ἀφαιρεθῇ, ὑπολείπεται λείψανον ὁ ἀριθμὸς 256, οὗ ἡ τετρ. ῥίζα 16. ἤτοι $\sqrt{256} = 16$.

§. 350. Εἰδ' ἡ ἄγνωςος ποσότης, ἤτοι τὸ χ, ὡς Ἐκθέτης ἑτέρας πάρεςι ποσότητος, τῆς α΄. ὄν καὶ αὐτὸ δυνάμεως, τὴν Ἐξίσωσιν ὡς α΄. βαθμοῦ θεωρήσαντες,

τες, διὰ τῶν λογαρίθμων αὐτὴν ἐπιλύσομεν. π. χ. Ἔϛω ἡ Ἐξίσωσις

$$2^{x} = 512$$

Διὰ τὴν ἰσότητα τῶν δύω ποσοτήτων, ἔσονται ἴσοι καὶ οἱ λογάριθμοι. Ὥϛε

$$x λ.2 = λ.512$$

Καὶ τῶν λογαρίθμων ἐκ τῶν πινάκων ληφθέντων, ἔϛαι

$$\text{ἄρα } x = \frac{λ.512}{λ.2}$$

$$x = \frac{2,7092700}{0,3010300}$$

Τῶν δ' ὅρων ἀμφοῖν τοῦ κλάσμ. τῷ 10 πολλαπλασιασθέντων, προκύψει παραγόμενον $= \frac{27092700}{3010300} = 9$. Ὥϛε $x = 9$.

Καὶ $2^{x} = 2^{9} = 512$.

Ἔϛω δεδομένον. $5 \cdot 3^{2x} - 100 = 305$: 5 πάντας τοὺς ὅρους

$$3^{2x} - 20 = 61$$

$$3^{2x} = 61 + 20 = 81$$

$$2x Λ.3 = Λ.81 \quad : Λ\,3$$

$$2x = \frac{Λ.81}{Λ3} \quad : 2$$

$$x = \frac{Λ\,81}{2.Λ.3}$$

Καὶ

Καὶ τοὺς λογαρίθμους ζητήσαντος, ἔςαι

$$\chi = \frac{1{,}9084850}{0{,}4771212 \cdot 2} = \frac{1{,}9084850}{0{,}9542424} \cdot 10 =$$

$$\frac{19084850}{9542424} = 2 = \chi.$$ Τὸ δ' ὑπολειπόμενον λεῖψ. 2 μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν προῆλθεν ἐκ τοῦ τὸν ἔσχατον ἀριθμὸν τοῦ Λ. 3 μὴ εἶναι ἀκριβῆ, ὅς μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν κυρίως 5 ὤφειλεν εἶναι,

Παραδείγματα γυμνασίας χάριν.

§. 351. Α΄. Δίελε 30 εἰς δύω μέρη, ὥςε τὸ μεῖζον τούτων 8 μονάσι τοῦ ἐλάσσονος πλεονεκτεῖν.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἄμφω τὰ μέρη ἄγνωςα, ἔςω τὸ μεῖζον $= \chi$. Ἐπεὶ δὲ τὸ μεῖζον, κατὰ τὴν ὑπόθ. ὀκτὼ μονάσι τοῦ ἐλάσσονος ὑπερτερεῖ, ἀνάγκη πᾶσα τὸ ἔλαττον 8 μονάσι τοῦ μείζ. ἐλαττοῦσθαι, ἤτοι τοῦ χ. Ὥςε τὸ ἔλαττον $= \chi - 8$. Ἐξ ἀμφοῖν οὖν, τοῦ χ, καὶ $\chi - 8$ συνίςαται ὁ 30 ἀριθμός. ἄμφω γὰρ ἅμα 30 ἔσονται. Ὥςε παρὰ πόδας καὶ ἡ Ἐξίσωσις, δι' ἧς τοῦ χ, ἤτοι τοῦ μείζ. μέρους εὑρεθέντος, γνωσθήσεται καὶ τὸ ἔλαττον, ἤτοι τὸ $\chi - 8$. Ἔνθεντοι

$$\chi + \chi - 8 = 30$$

$$\chi + \chi = 30 + 8 \quad \text{ἢ}$$

$$2\chi = 38 \quad : 2$$

$$\chi = \tfrac{38}{2} = 19 =$$ τῷ μείζονι μέρει. Τὸ δ' ἔλαττον $\chi - 8 = 19 - 8 = 11$. Καὶ $19 + 11 = 30$. Καὶ ἐν γένει. Δίελε α εἰς δύω μέρη, ὥςε τὸ ἕτερον τούτων μεῖζον τοῦ ἑτέρου κατὰ

τὰ τὸ γ εἶναι. Κἀπὶ τούτου εἴη ἂν τὸ μὲν μεῖζον χ, τὸ δ' ἔλαττον χ — γ.

$$\text{Καὶ} \quad \chi + \chi - \gamma = \alpha$$

$$2\chi = \alpha + \gamma$$

$$\chi = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Ἐπειδὴ οὖν εὕρηται τὸ μεῖζον, ῥᾷστα διορίζεται καὶ τὸ ἔλαττον. Ἔστι γὰρ $= \frac{\alpha+\gamma}{2} - \gamma = \frac{\alpha+\gamma}{2} - \frac{2\gamma}{2}$ (§. 133.) $= \frac{\alpha+\gamma-2\gamma}{2} = \frac{\alpha-\gamma}{2}$.

§. 352. Β΄. Μῦθος. Ὅτε κατὰ τοὺς Αἰσωπείους χρόνους τὰ ζῶα ὁμόφωνα ἦν τοῖς ἀνθρώποις, Ἀλώπηξ, πολλὰς ὄρνιθας γεωργοῦ καταφαγοῦσα, τέλος ὑπ' αὐτοῦ συνελήφθη. Μέλλουσα οὖν ἀποκτανθήσεσθαι, ἐδεῖτο αὐτοῦ ἀφεθῆναι. οὐ δὲ γὰρ τοσαύτας ὄρνιθας καταφαγεῖν. Τοῦ δὲ, ὅσας, πυθομένου, ἀπεκρίνατο, δὶς τοσούτους ἀλεκτρυόνας, ὅσας ὄρνιθας, ἀπεκτονέναι, λέγουσα· εἰ ἕκαστος ἀλεκτρυὼν 2 λεπτῶν, ἑκάστη δὲ ὄρνις 6 ὑπ' ἐμοῦ ἀπημπωλήθη, ἔσχον ἂν ἤδη 100 θαλήρους. Ἔχω μέντοι τούτους, καί σοι αὐτοὺς χαριζομένη, ἀντὶ τούτων σωτηρίας τυχεῖν δέομαι. Πόσους τοίνυν ἀλεκτρυόνας, καὶ ὄρνιθας ἡ Ἀλώπηξ κατεβεβρώκει;

Λύσις. Ἐπειδὴ δὶς τοσούτους ἀλεκτρυόνας, ἢ ὄρνιθας ἀπέκτεινεν, ὁ μὲν τῶν ἀλεκτρυόνων ἀριθμὸς ἔστω $= \chi$. ὁ δὲ τῶν ὀρνίθων, ἅτε τὸ ἥμισυ ἐκείνων $= \frac{1}{2}\chi$, ἢ $\frac{\chi}{2}$ (§. 104. σχ.) Εἰ τοίνυν ἑκαϛον ἀλεκτρυόνα 2 λεπτῶν ἀπεδέδοτο, εἶεν ἂν τὰ λεπτὰ 2χ. καὶ εἰ ἑκάϛην ὄρνιθα 6, εἶεν ἂν $\frac{\chi}{2}$. ὁ τά- λεπτὰ $= \frac{6\chi}{2} = 3\chi$ λεπ. Ἄμφω αἱ τιμαὶ 100 συμπληροῦσι θαλήρους $= 28800$ λεπτοῖς. Ἐξ ὧν ἡ Ἐξίσωσις.

2χ λεπ. $+ 3\chi$ λεπ. $= 28000$ λεπ. προσθὲς χ

$5\chi = 28800$

$\chi = \frac{28800}{5} = 5760$.

Τὸ δὲ χ σημαίνει τοὺς ἀλεκτρυόνας· ἀπέκτεινεν ἄρα ἡ Ἀλώπηξ 5760 ἀλεκτ. καὶ $\frac{\chi}{2} = \frac{5760}{2} = 2880$ ὄρνιθας

§. 353. Γ'. Πατήρ τις ἀποθνήσκων οὕτω τοὺς τρεῖς υἱοὺς τὴν ἑαυτοῦ χρηματικὴν περιουσίαν διανεῖμαι πρὸς ἀλλήλους ἠθέλησε· τὸν μὲν α'. τὸ ἥμισυ τῆς κληρονομίας κομίσασθαι, πλὴν 1000 θαλήρων. τὸν δὲ β'. τὸ τριτημόριον αὐτῆς, πλὴν 800 θ. τὸν δὲ γ'. τὸ τεταρτημόριον, πλὴν 600 θ. Ζητεῖται πᾶσα ἡ κληρονομία, καὶ ἡ ἑκάϛου μερίς.

Λύσις. Τεθήτω ἡ περιουσία $= \chi$. Ὁ α'. ἄρα κομίζεται $\frac{\chi}{2} - 1000$. Ὁ β'. $\frac{\chi}{3} - 800$. Ὁ γ'. $\frac{\chi}{4} - 600$. Αἱ δὲ τρεῖς αὗται μερίδες ἴσαι πάσῃ τῇ περιουσίᾳ τῇ πατρικῇ $= \chi$. Ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις.

$\chi - 1000$

$$\frac{\chi}{2} - 1000 + \frac{\chi}{3} - 800 + \frac{\chi}{4} - 600 = \chi$$ ἢ

$$\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4} - 1000 - 800 - 600 = \chi$$ πρός.

$$\frac{13}{12}\chi - 2400 = \chi \quad . \; 12$$

$$13\chi - 2400 \cdot 12 = 12\chi$$

$$13\chi - 12\chi = 2400 \cdot 12$$

$\chi = 2400 \cdot 12 = 28800 =$ πάσῃ τῇ κληρονομίᾳ. ἐξ ἧς ὁ α΄. ἐκομίσατο $\frac{\chi}{2} - 1000 = \frac{28800}{2} - 1000 =$ 13400 θαλ.

Ὁ β΄. $\frac{\chi}{3} - 800 = \frac{28800}{3} - 800 = 8800$.

Ὁ γ΄. $\frac{\chi}{4} - 600 = \frac{28800}{4} - 600 = 6600$

$=$ 28800 θαλ.

§. 354. Δ΄. Δίελε 50 θαλ. εἰς 10 μέρη, ὥς' ἀεὶ ἕκαςον μέρος μεῖζον εἶναι τοῦ ἑτέρου θαλήρῳ. Ὁποῖον τὸ ἐλάχιςον μέρος, καὶ ἕκαςον τῶν μερῶν; Λύσις. Ἔςω τὸ ἐλάχιςον $= \chi$. τὸ ἄρα τούτῳ ἀμέσως ἑπόμενον, τὸ μονάδι αὐτοῦ μεῖζον $= \chi + 1$. τὸ δὲ τούτῳ, $\chi + 2$, κτ. Τοῦτο δὲ Ἀριθμητ. Πρόοδον ἡμῖν παρέχει, ἐκ 10 ὅρων. Καὶ ἐπεὶ ὁ ἔσχατος ὅρος ἑκάςης Ἀριθμ. Πρ. ἐν γένει $= \alpha + (\pi - 1)\delta$. §. 224. Ἐνταῦθα δὲ α, ἢ ὁ α΄. ὅρος $= \chi$. ἡ πληθὺς τῶν ὅρων $= \pi = 10$, καὶ δ, ἢ ἡ διαφορὰ $= 1$. Ἔςαι ὁ ἔσχατος ὅρος, $\chi + 10 - 1$, ἢ $\chi + 9$. Ὥςε τὸ ὁλικὸν κεφάλ. τῆς Προόδου, ὅπερ εὑρίσκεται, (§. 226.) ἐὰν ὁ α΄. καὶ ἔσχατος ὅρος προσαθροισθέντες