$$
\begin{array}{lcr}
\text{Ἐςὶ δὲ λ. } 1458 & = & 3,1637575 \\
\text{ἀφαιρ. λ. } 2. & = & 0,3010300 \\
\hline
 & & 2,8627275
\end{array}
$$

οὗτος διαιρ. διὰ τοῦ λ. 3. Ἀλλὰ λ. $3 = 0,4771212$,

Ὥςε $\dfrac{2,8627275}{0,4771212} = \dfrac{28627275}{4771212}$ (ὅτι ἀμφοῖν ἴσα δεκαδικὰ ἔνεισι.) =

28627275 (4771212) 28627272	6. Ὁ τὸ πηλίκον τυγχάνει. Τὸ δὲ λείψ. 5 ὑ-

πολέλειπται, ὅτι οἱ λογάριθμοι σχεδὸν πάντες ἄλογοι ποσότητες εἰσί. Τούτῳ προςεθήτω ἔτι 1. Ὥςε $6 + 1 = \chi =$ τῇ πληθύϊ τῶν ὅρων. Ὅθεν 7 οἱ ὅροι. Καὶ ἡ Σειρὰ ἔςαι

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458.

Περὶ Συνδυασμοῦ.

§. 334. Ἡ Μέθοδος, καθ᾽ ἣν, ποσαχῶς ἡ τάξις δεδομένων πραγμάτων οἱωνοῦν, καὶ ὁποσωνοῦν, μετακινεῖται, καὶ μετατίθεται, ἀνὰ δύω, ἢ ἀνὰ τρία, ἢ ἀνὰ δ', κτ. λαμβανομένων. ἢ ἐν γένει, καθ᾽ ἣν Συζυγίαι καὶ Μεταθέσεις τῶν δοθέντων καθ᾽ ὁροθετηθέντας γίνονται νόμους, καὶ ποσάκις τοῦτο ἐν δοθείσῃ τινὶ πληθύϊ πραγμάτων τελέσαι δυνατὸν, εὑρεῖν δυνάμεθα, Συνδυασμοῦ Μέθοδος καλεῖται. Αὐτίκα οὖν δῆλον ταύτην διεξοδικωτάτην, καὶ ἐπὶ μυρίων εἶναι ἐν χρήσει, ὡς πᾶς τις συνομολογήσει, ἐνίων μόνον ἁψαμένοις.

§. 335.

§. 335. Ἀπὸ τοίνυν τῶν εὐχερεςάτιων ποιησάμενοι τὴν ἀρχὴν εἴπωμεν περὶ τῆς δυνατῆς Μεταθέσεως ὀλιγαρίθμιων δοθέντων πραγμάτων. Ἐὰν δύω τινὰ δοθῶσι, (νοήσεις δὲ ὅ, τι ἂν βούλῃ, δύω ἀριθμοὺς, ἢ ὀνόματα, ἢ ἀνθρώπους, ἢ γράμματα, κτ.) ἅπερ α καὶ β ῥηθήτω, μόνον δὶς ταῦτα μετακινῆσαι, καὶ μεταθεῖναι δυνήσῃ, τουτ. μόνον δύω θέσεις διαφόρους ἡ τούτων ὑποίσεται τάξις. ἤτοι γὰρ οὕτως, αβ, ἢ οὕτω, βα. τεθήσεται. Αἱ δυναταὶ ἄρα δύω τινῶν Μεταθέσεις καὶ οὕτως ἂν ἐκδηλωθεῖεν. 1 . 2 = 2. ἤτοι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μετ' ἀλλήλων τῶν δύω πρώτων ἀριθμητικῶν χαρακτήρων. Ληφθήτω πρὸς τούτοις καὶ τρίτον τι, τὸ γ, ὅπερ πρὸς τῷ αβ τρισσῶς τεθῆναι δύναται, ἐν ἀρχῇ, γαβ, μεταξὺ τούτων, αγβ, καὶ μετ' αὐτὰ, αβγ. Τρισσῶς δὲ καὶ πρὸς τῷ βα. τουτ. γβα. βγα. βαγ. Τοῦτο οὖν δίδωσι μεταθέσεις τριπλασίονας τῶν προτέρων, ἤτοι τῶν τοῦ αβ. Ὥςε τὸν ἀριθμὸν, ἢ τὴν πληθὺν τῶν προτέρων μεταθέσεων ἐπὶ τὸν 3 πολλαπλασιάσαι χρὴ, ἐφ' ᾧ, ποσάκις τρία τινὰ μετατεθῆναι δύνανται, εἰδέναι. ἤτοι 1 . 2 . 3 = 6. Ὅπερ αὖθις διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων τριῶν ἀριθμητικῶν προκύπτει χαρακτήρων. Πλείους δὲ τῶν 6 μεταθέσεις ἐπὶ τριῶν οὐ δυνατα. Αὖθις τοῦ δ'. γράμματος παραληφθέντος, ἤτοι τοῦ δ, ἔσονται δυναταὶ μεταθέσεις τῶν δ'. γραμμάτων 24. Εἰσὶ δέ. δγαβ . γδαβ . γαδβ . γαβδ . δαγβ . αδγβ . αγδβ . αγβδ . δαβγ . αδβγ . αβδγ . αβγδ . δγβα . γδβα . βγδα . γβαδ . δβγα . βδγα . βγδα . βγαδ . δβαγ . βδαγ . βαδγ . βαγδ . Τῆς τοίνυν πληθύος τῶν προτέρων μεταθέσεων τῷ 4 πολλαπλασιασθείσης, ἔςαι γνωςὸν, ποσάκις δ'. τινὰ μετατεθῆναι δυνατόν. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς, ὁ, ποσάκις τρία μετατίθενται, δηλῶν, προέκυψε διὰ τοῦ 1 . 2 . 3. Ὁ δὲ, ποσάκις δ'. διὰ τοῦ 1 . 2 . 3 . 4 = 24, προκύψει. Ἐὰν δὲ ϛ'. ὑποτεθῶσιν, ὧν τὴν μετάθεσιν εἰδέναι βουλόμεθα, δῆλον, ὅτι μετατεθήσονται 1 . 2 . 3 . 4 . 5 : κις = 120 : κις. Καὶ ἐν γένει. ὁ τῶν μεταθέσεων δυνατὸς ἀριθμὸς, ἢ πληθὺς προσλεύσεται, τοσούτων χαρακτήρων, ἀλλήλοις φυσικῇ τάξει ἑπομένων, (ἀπὸ τῆς 1 τῆς ἀρχῆς γινομένης) πολλαπλασιαζομένων, ὅσα τὰ πράγματα, περὶ ὧν τῆς δυνατῆς μεταθέσεως λόγος. Οὕτω π. χ. καὶ ϛ'. πραγμάτων αἱ δυνατοὶ μεταθέσεις εἶεν ἂν 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720. Ἐὰν οὖν ὁ ἀριθμὸς τῶν δοθέντων π κληθῇ, τὴν τῶν δυνατῶν μεταθέσεων πληθὺν διὰ τοῦ ἑξῆς γενικοῦ ἂν παραστήσαιμεν τύπου. π . π — 1 . π — 2 . π — 3 . π — 4 . π — 5, κτ. μέχρις ἂν ὁ ἔσχατος ὅρος = 1 γένηται. Ὅπερ τελευταῖον ἀναγκαίως γενήσεται, εἰ τὸ π ἐνεργείᾳ τυγχάνει ἀριθμὸς, ἤτοι εἰ διορισθῇ. Τὸ αὐτὸ γὰρ προκύπτει, τῶν παραγόντων, τῶν μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθησομένων, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἴτ' ἐκ δεξιῶν, εἴτ' ἐξ ἀριστερῶν ἀρχομένου. Ἐπὶ τοῦ ὑποτεθέντος τύπου ἡ μὲν ἀρχὴ γίνεται ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ἀριθμοῦ, τοῦ π, τὸ δὲ πέρας εἰς τὴν 1. Παράδειγμα εἰς ἀνάπτυξιν. Ζητεῖται, ποσάκις αἱ λέξεις „μία σωτηρία ἡττηθεῖσι μηδεμίαν ἐλπίζειν σωτηρίαν„ ἂν μετατεθεῖεν; Ἐπειδὴ ἓξ αἱ λέξεις, μετατεθήσονται δήπου καὶ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720 : κις. Ἕτερον. Εἰ δέοι δέκα τινὰς τοσάκις ἑστιάσαι, ὁσάκις ἡ τάξις ἐκείνων ἀνακειμένων ἔχει μετατεθῆναι, ἔσαι τοῦτο 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 : κις = 3628800 : κις. Ἐὰν οὖν τις τούτους δὶς ἑστιᾷ τῆς ἡμέρας, ἀπαλλαγείη ἂν τῶν ξένων σχεδὸν μετὰ 4971 ἐνιαυτούς.

§. 336. Σημείωσαι, ὅτι, ἐὰν ἐν τοῖς δεδομένοις, καί τι, ἢ τινὰ τὰ αὐτὰ δὶς, ἢ τρὶς, ἢ πολλάκις ἀπαιτᾷ, τηνικαῦτα ἐξαιρέσει ὁ ἀνωτέρω κανὼν ὑπόκειπόκειται. Ἐάν τι τὸ αὐτὸ ἐν τῇ τῶν δοθέντων πληθύϊ δὶς ἐνυπάρχῃ, ἐλαττωθήσονται κατὰ τὸ ἥμισυ αἱ Συζυγίαι. (εἰ δ' ὡς διάφορον τῷ ἀριθμῷ θεωρεῖται, κρατήσει ὁ α'. νόμος) Ἔςω α μόνον. προσελθέτω καὶ ἕτερον α, καὶ ἔςαι αα, μία μόνη μετάθεσις, τουτ: τὸ ἥμισυ τῶν μεταθέσεων, ἃς δύω διάφορα τῷ εἴδει συνιςῶσι. Προςεθέντος δὲ τῷ αα καὶ τοῦ γ, ἕξομεν ααγ. γαα. αγα, τρεῖς μόνον μεταθέσεις, τὸ ἥμισυ τῶν ἐκ τριῶν διαφόρων τῷ εἴδει ἀνακυπτουσῶν. (§. ἀνωτ.) Ἔνθεντοι τὴν τῶν δοθέντων πληθὺν (τοῦ ἑνὸς δὶς ἀπαντῶντος) διὰ 2 διαιρεῖν χρή. Ὁ δὲ γενικὸς τούτου τύπος ἂν εἴη, τῆς πληθύος τῶν πραγμάτων $= \pi$ τεθείσης, $\frac{\pi . \pi - 1 . \pi - 2 . \pi - 3 . \pi - 4}{1 . 2}$, τῆς σειρᾶς τοῦ ἀριθμητοῦ προαγομένης, ἐς ὃ ὁ ἔσχατως ὅρος $= 1$ ᾖ. Εἰ δὲ δύω τὰ αὐτὰ ἐν τοῖς δοθεῖσι, τὸ σχῆμα εἰς τόδε τραπήσεται. $\frac{\pi . \pi - 1 . \pi - 2 . \pi - 3}{1 . 2 . 1 . 2}$, κτ. Εἰ δὲ τρία, εἰς τόδε. $\frac{\pi . \pi - 1 . \pi - 2 . \pi - 3 . \pi - 4}{1 . 2 . 1 . 2 . 1 . 2}$; κτ. Εἰ δέ τι τὸ αὐτὸ τρὶς ἀπαντήσειεν ἐν τοῖς δοθεῖσιν, ὁ Διαιρέτης ἔςαι $1 . 2 . 3 = 6$. Τηνικαῦτα γὰρ ἀναγκαίως αἱ μεταθέσεις κατὰ τὸ ς'. μειωθήσονται, ὡς τῶν ἑξάκις μεταθέσεων τῶν τριῶν, τῶν ἤδη ὡς τὸ αὐτὸ θεωρουμένων, ἐκπιπτουσῶν. Εἰ γὰρ π. χ. α τρὶς ἐνυπάρχει, εἴη ἂν τοῦ ααα μία καὶ μόνη μετάθεσις, ἐν ᾧ τούτου μὴ ἔχοντος οὕτως, ἓξ ἂν ἐγένοντο. (§. ἀνωτ.) Ὥςε ὁ γενικὸς τύπος ἔςαι

$$\frac{\pi . \pi - 1 . \pi - 2 . \pi - 3 . \pi - 4 .}{1 . 2 . 3}$$

Τετράκις δέ τινος παρόντος, διὰ τὰ αὐτὰ ἔςαι τὸ σχῆμα

$$\frac{\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3 \cdot \pi - 4 \cdot \pi - 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

κτ. Ἐὰν δὲ συμβῇ τι τρὶς παρεῖναι, δὶς δ' ἕτερόν τι, εὐχερῶς ἐκ τῶν ῥηθέντων καὶ τοῦτο ἂν διορίσαιμεν. τουτέςιν ὁ διαιρέτης ἐκ τῶν 1 . 2 . 3 . 1 . 2 συςήσεται. ὅτι ἓξ μεταθέσεις ὡς μία, καὶ δύω αὖθις ὡς μία ὑπολογισθήσονται. π. χ. Τεθήτωσαν αἱ ποσότητες αααββγ. ποσάκις αὗται μετατεθῆναι δύνανται; ὡς οὖν 6 τυγχάνουσαι, μετατεθήσονται 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 : κις. Ἐπεὶ δὲ τὸ α τρὶς, καὶ τὸ β δὶς παρὸν τυγχάνει, ὁ διαιρέτης ἔςαι 1 . 2 . 3 . 1 . 2. τουτ. τὸ σχῆμα $\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}{1 . 2 . 3 . 1 . 2} = \frac{4 . 5 . 6}{2} = 60$: κις. Ὡσαύτως. ποσάκις τὰ ἐννέα ταῦτα ααααβββγγ μεταθεῖναι δυνατόν; 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 : κις. Διὰ δὲ τὸν διαιρέτην 1 . 2 . 3 . 4 . 1 . 2 . 3 . 1 . 2 = $\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9}{1 . 2 . 3 . 4 . 1 . 2 . 3 . 1 . 2} = 1260$: κις. Αἱ γὰρ μεταθέσεις, αἱ ἐκ τεσσάρων ἀναφυόμεναι, ὡς μία νομίζονται, ὡς τοῦ α τετράκις. αἱ δ' ἐκ τριῶν, ὡσαύτως ὡς μία, ὡς τοῦ β τρίς αἱ δ' ἐκ τοῦ γ παραπλησίως ὡς μία, ὡς τοῦ γ δὶς. παρόντων. Παράδ. μεταξὺ τῶν 10 (§. ἀνωτ.) ἔςωσαν καὶ 5 γυναῖκες. Αἱ δὲ τούτων μεταθέσεις οὕτω γινέσθωσαν, ὥς' ἑκάςην γυναῖκα παρὰ τῷ ἰδίῳ εἶναι ἀεὶ ἀνδρί. Ἐπεὶ οὖν ὁ ἀνὴρ, καὶ ἡ γυνὴ ὡς ἓν ὑπολογίζονται, ἔςαι μόνον τῶν 5 μετάθεσις. Ὥςε 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120: κις οἱ τούτων τόποι μετατεθήσονται. Ἄρα δὶς τῆς ἡμέρας ἑςιωμένων, 60 ἡμερῶν μόνον χρεία.

§. 337, Καὶ μυρία ἕτερα εἴδη Συνδυασμῶν δίδοται, ὧν κανόνας οὐ δυσχερὲς ἐπινοῆσαι. Θεωρηθήτω τω καὶ τούτων τινά. Ἀριθμοῦ τινὸς πραγμάτων δοθέντος, ἐξ ὧν τοσαύτας διαφόρους Δυάδας, τοσαύτας διαφόρους Τριάδας, τοσαύτας διαφ. Τετράδας λαμβάνειν δέει, ὅσα Κ π. χ. σημαίνει αὗται καλοῦνται Συνδυασμοὶ, Συντρισσασμοὶ, ἢ Συντρισσεύσεις, Συντετρασσεύσεις, κτ. Ζητητέος ἤδη ὁ τῶν δυάδων νόμος. Εἰ ς τινὰ δοθεῖεν, ἅπερ ἀνὰ δύω συνάψαι δέοι, ἔνθα μέντοι οὐδένα λόγον ποιούμεθα τοῦ, πότερον ἐφ' ἑκάςης δυάδος προτίθεται, ἢ ἐπιτίθεται, εὑρήσομεν τὰς δυάδας κατὰ τὸ ἐχόμενον Πινακίδιον, οὗ ἐν τῇ α'. σειρᾷ ἡ τῶν δοθέντων πληθὺς, ἐν δὲ τῇ β'. αὐτὰ τὰ δοθέντα, ἐν δὲ τῇ γ'. αἱ τούτων δυάδες κεῖνται

ἡ τῶν πραγμάτων πληθύς.	αὐτὰ τὰ πράγμ.	αἱ δυάδες.
1	α	ο
2	β	αβ
3	γ	αγ, βγ.
4	δ	αδ, βδ, γδ
5	ε	αε, βε, γε, δε.

Αὐτόθεν φανερὸν, ὅτι ἕν τι οὐδεμίαν δυάδα δύναται ἀποτελέσαι. διὰ τοῦτο κεῖται ο ἐν τῷ α'. τόπῳ. Ἐκ δὲ δύω τελεῖται δυὰς, ἤτοι αβ, οὐδένα λόγον τῆς τούτων θέσεως ἐχόντων, καὶ αβ, ἢ βα ὡς τὸ αὐτὸ θεωρούντων, καὶ εἰς τὰς δυάδας ἤδη μόνον ἀφορώντων. ληφθὲν δὲ καὶ τὸ γ'. ἤτοι τὸ γ, δώσει μεθ' ἑκατέρου τῶν προτέρων, μετὰ τοῦ α καὶ β, καινὴν δυάδα. Ὥςε δύω δυάδες, αἷς καὶ τῆς α'. προςεθείσης, ἔσονται τρεῖς αἱ δυάδες. Ἔνθεν τοι τρία πράγματα διδοῦσι τρεῖς δυάδας. Αὖθις καὶ τὸ δ'. ληφθὲν, ἤτοι τὸ δ, παρέξει σὺν ἑκάςῳ τῶν προηγηθέντων τριῶν καινὴν δυάδα. ἄρα τρεῖς δυάδες, αἷς καὶ τὰς πρότερον τρεῖς προσαριθμήσαντες ἕξομεν ἓξ δυάδας. Τὸ ε'. δίδωσι

μεθ'

μεθ' ἑκάςου τῶν προτέρων τεσσάρων τέσσαρας καινὰς δυάδας, σὺν ταῖς ἓξ ταῖς προηγηθείσαις $= 10$ δυάδας. Ἤδη οὖν καὶ τὸν νόμον εὐχερῶς ἂν διορίσαιμεν. Πᾶσαι ἀμέλει αἱ δυάδες τὸ κεφάλαιόν εἰσι τῶν ὅρων Ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, ἧς ἡ ἀρχὴ μονάδι ἐλαττοῦται τῆς δοθείσης πληθύος τῶν πραγμάτων, καὶ διηνεκῶς μονάδι μειοῦται. ἢ ἧς ἡ διαφορὰ ἡ 1, καὶ τὸ πέρας ἡ 1. Ὡς ἐπὶ τῶν πέντε τῶν δοθέντων ἡ τῶν δυάδων πληθὺς εἴη ἂν τὸ κεφάλαιον τοῦ $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Ἓξ δὲ δοθέντων τὸ κεφάλαιον $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Ἢ δυνάμεθα θεωρῆσαι αὐτάς, ὡς τὸ κεφάλαιον Ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, ᾗ τινι α΄. ὅρος $= 1$, καὶ ἡ διαφορὰ $= 1$. Ὁδ' ἔσχατος μονάδι ἐλαττούμενος τῆς τῶν δοθέντων πληθύος. Τὸ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου κεφάλαιον $= \alpha\pi + \frac{(\pi^2 - \pi)\,\delta}{2}$. (§. 296.) Ἔνθα π τὸν ἀριθμὸν, ἢ τὴν πληθὺν σημαίνει τῶν ὅρων. α τὸν α΄. ὅρον, καὶ δ τὴν διαφοράν, Ἐπεὶ δ' ἐνταῦθα $\alpha = 1$, καὶ $\delta = 1$, ὑπολείπεται μόνον ἐν τῷ σχήματι $\pi + \frac{(\pi^2 - \pi)}{2}$. Ἀλλὰ λόγον ποιητέον καὶ τοῦ, ὅτι οἱ ὅροι μονάδι ἐλαττοῦνται τῆς πληθύος τῶν δοθέντων. Ἐν γὰρ 5 πράγμασι π. χ. τέσσαρες οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, δι' ὧν τὸ ταύτης ἐξευρίσκεται κεφάλαιον. Ὥςε ἐν π πράγμασι, $\pi - 1$ οἱ ὅροι. Εἰ οὖν ἡ τῶν δοθέντων πληθὺς, ἡ ἀνὰ δύω συνδυασθησομένη $= \pi$, οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς, ἧς τὸ κεφάλαιον τὴν τῶν συνδυασμῶν ὑποδείκνυσι πληθὺν, εἶεν $\pi - 1$. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου ἀντὶ τοῦ π γραπτέον τὸ $\pi - 1$. Ὥςε ὁ τύπος $\pi + \frac{(\pi^2 - \pi)}{2}$ εἰς τόνδε μετασχηματισθήσεται, $\pi - 1$

+ (π

$+ \frac{(\pi - 1)^2 - (\pi - 1)}{2}$. ὅς ἀναπτυχθεὶς ἔςαι $\pi - 1 + \frac{\pi^2 - 2\pi + 1 - \pi + 1}{2}$:

Εἰ δὲ καὶ τὸ $\pi - 1$ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀνάξομεν παρονομαςὴν, εἴη ἂν $=$
$$\frac{2\pi - 2 + \pi^2 - 2\pi + 1 - \pi + 1}{2},$$
καὶ τῇ προσθέσει $= \frac{\pi^2 - 3\pi + 2\pi + 2 - 2}{2}$ $= \frac{\pi^2 - \pi}{2}$. Ἀλλὰ $\frac{\pi^2 - \pi}{2} = \frac{\pi(\pi - 1)}{2}$.
Τοῦτο ἄρα ἔςαι ὁ γενικὸς τύπος Συζυγιῶν ἀνὰ δύω.

Παράδ. Ποσάκις δυνάμεθα ἐννέα τινὰ σὺν δύω μετ' ἀλλήλων συζεῦξαι; Ἐνταῦθα $\pi = 9$. ἄρα $\frac{9(9 - 1)}{2}$. ἢ $\frac{9 \cdot 8}{2}$: κις $= 36$. Τοσαῦται δυάδες ἐμπεριέχονται τοῖς ἐννέα· Ἐκ τούτου, καὶ ὅπως ἐν τοῖς δημοσίοις Λάχεσι τὰς ἀνὰ δύω συζυγίας τῶν ἀριθμῶν (Amben) ζητεῖν χρὴ, μανθάνομεν. Εἰ π. χ. 12 οἱ ἀριθμοὶ, πόσαι Amben τούτοις ἐνυπάρχουσι; $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. Ἐν δὲ 90 ἀριθμοῖς ἔνεισιν $\frac{90 \cdot 89}{2}$ Amben $= 4005$. Τῶν δὲ 90 ἐξάγονται μόνον 5 ἀριθμοί· τούτοις ἄρα $\frac{5 \cdot 4}{2}$ $= 10$ Amben. Ὥςε τὸ πιθανὸν τοῦ μίαν Ambe ἐξαχθήσεσθαι ἐςὶ 10, τοῦ δὲ μὴ ἐξαχθήσεσθαι 3995 τουτ: ὁ λόγος τοῦ πιθανοῦ πρὸς τὸ ἀπίθανον ἐςὶν ὡς 10 : 3995. ἢ 1 : 399,5.

§. 338.

§. 338. Ἐὰν δὲ τὰ δοθέντα ἀνὰ τρία συνάψαι βουλώμεθα, τῆς τούτων θέσεως, καὶ τάξεως παραμελοῦντες, καὶ π ἡ τῶν δοθέντων ἡ πληθύς, ἔςαι ὁ τούτων γενικὸς τύπος $\frac{\pi \, . \, \pi - 1 \, . \, \pi - 2}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}$.

Εἰ δ' ἀνὰ τέσσαρα, ὁ $\frac{\pi \, . \, \pi - 1 \, . \, \pi - 2 \, . \, \pi - 3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4}$.

Οὓς (τύπους) ἀποδεῖξαι οὐκ ἔχομεν, ὡς τῆς διδασκαλίας περὶ τῶν Ἐσχηματισμένων ἀριθμῶν προαπαιτουμένης, περὶ ἧς κατωτέρω ῥηθήσεται ὀλίγ' ἄττα. Τῷ δὲ βουλομένῳ παντάπασι καθόλου τύπου πρὸ ὀφθαλμῶν ἔχειν, ἐὰν ἐκ π δοθέντων πραγμάτων ρ συζυγίας ποιῆσαι δέῃ, ἔςαι ὁ τύπος τούτου. $\frac{\pi \, . \, \pi - 1 \, . \, \pi - 2 \, . \, . \, . \, . \, (\pi - \rho + 1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, . \, . \, \rho}$ ὅ ἐςιν, οἱ τοῦ ἀριθμητοῦ παράγοντες γίνονται τοσοῦτοι, ὅσαι συζυγίαι δίδονται, οἱ δὲ τοῦ παρονομαςοῦ ἀπὸ 1 αὖθις τοσοῦτοι, ὅσαι αἱ συζυγίαι. Παραδείγματα, Πόσας τριάδας περιέχουσιν 20 ἀριθμοὶ, τουτ. 20 ἀριθμοὶ ἀνὰ τρεῖς εἰλημμένοι; Τὰ π δοθέντα εἰσὶν 20, ἢ $\pi = 20$. Πρόκεινται δὲ εἰς ρ συζυγίας γενέσθαι, ἐνταῦθα εἰς τριάδας, ἢ ἀνὰ τρεῖς ληφθῆναι. Ὥςε $\rho = 3$. Ἄρξαι οὖν ἐν τῷ ἀριθμητῇ ἀπὸ τοῦ 20, πολλαπλασιάζων τοῦτον ἐπὶ τὸν ἐγγὺς ὑποδεέςερον ἀριθμὸν, καὶ οὕτω χωρῶν, μέχρις ἂν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $(\pi - \rho + 1)$ γένοιο $= 20 - 3 + 1 = 20 - 2 = 18$. Ὅ ἐςι κατὰ τὸν τύπον $\frac{20 \, . \, 19 \, . \, 18}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} = \frac{20 \, . \, 19 \, . \, 18}{6} = 1140$.

Πόσας δὲ τετράδας; $= \frac{\pi \, . \, \pi - 1 \, . \, \pi - 2 \, . \, \pi - 3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4}$

$= \frac{20 \, . \, 19 \, . \, 18 \, . \, 17}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} = 4845$.

§. 339.

§. 339. Ἐὰν δὲ Συνδυασμοὶ, Συντριασσεύσεις, κτ. ζητῶνται, ἐν οἷς καὶ τῆς τάξεως, ἢ θέσεως, ἣν τὰ δοθέντα πρὸς ἄλληλα ἔχει, οὐκ ὀλιγωροῦμεν, καὶ ἕκασον τῶν δεδομένων δὶς, τρὶς, κτ. ἑαυτῷ συναφθῆναι δέῃ, ὁ τούτων νόμος ἕτερος ἔσαι τοῦ προτέρου. Οἷον, εἰ πρόκειται α καὶ β πρὸς δύω συνάψαι, (οὕτω μέντοι, ὥσε καὶ εἰς τὴν τούτων ἀφορᾷν τάξιν, ὅπερ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω Συνδυασμῶν οὐκ ἐγίνετο) καὶ ἕκασον τούτων καὶ μεθ' ἑαυτοῦ, προκύψουσι Συζυγίαι οὐ πλείους τῶν τεσσάρων. ἤτοι αβ, βα, αα, ββ. Τριῶν δὲ παρόντων, τοῦ α, β, γ, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀνὰ δύω συζευγνυμένων, ἔσονται ἐννέα αἱ Συζυγίαι. αβ, αγ, βγ, βα, γα, γβ, αα, ββ, γγ. Τῶν οὖν δύω 4 αἱ Συζυγίαι, ὅς (4) ὁ τετράγωνος τοῦ 2 τυγχάνει. Τῶν δὲ τριῶν, ἀνὰ δύω λαμβανομένων, 9 = τῷ τετρ. τοῦ 3. Τῶν δὲ τεσσάρων, αὖθις πρὸς δύω, 16 = τῷ τετρ. τοῦ 4. Ὥσε καὶ ἐν γένει, π πράγματα, οὕτω συναπτόμενα, παρέχουσι π^2 Συζυγίας.

Παράδ. Ποσάκις οἱ ἐννέα χαρακτῆρες οἱ ἀριθμητικοὶ, πρὸς δύω ἀλλήλοις συνάπτονται. καὶ τῆς τούτων τάξεως ἀμέλει θεωρουμένης, καὶ ἑκάσου τούτων καὶ ἑαυτῷ συναπτομένου; $9 \cdot 9.$ ἢ $9^2 =$ 81: κις. Εἰ δὲ τούτοις καὶ οἱ 9 ἁπλοῖ χαρακτῆρες προσαριθμηθῶσι, καὶ χωρὶς τούτων, καὶ ἕκασος χαρακτὴρ ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 9 τῷ 0 συναφθῇ. ὡς 10, 20, κτ. τουτ: καὶ 18 ἔτι ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῷ 81 προσεθῶσιν, ἕξομεν 99, τουτ. πάντας τοὺς μεταξὺ 1 καὶ 100 ἀριθμούς. Τῶν δὲ δοθέντων πρὸς τρία συναπτομένων, ἡ τῶν Συζυγιῶν πληθὺς ἀεὶ ὁ κύβος αὐτῶν ἔσαι. Ἢ ἐὰν τὰ δοθέντα π ᾖ, αἱ τούτων πρὸς τρία συζυγίαι ἔσονται π^3, κτ.

Παράδ. Ποσάκις τοὺς 9 χαρακτῆρας πρὸς τρεῖς συνάψαι δυνάμεθα; $9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 =$ 729:

729 : κις. Ἐπεὶ δ' οἱ 9 χαρακτῆρες ἀνὰ δύω 81 : κις ἀλλήλοις ἔχουσι συναφθῆναι, ἐὰν ἑκάςῃ τούτων συζυγίᾳ καὶ τὸ 0 (τὸ μηδ:) προςεθῇ, δι' οὗ ἑκάςη τρεῖς περιέξει χαρακτῆρας, προκύψουσιν ἔτι 81 ἀνὰ τρεῖς (χαρακτ. ἔχουσαι) συζυγίαι. Εἰ δὲ θῶμεν καὶ ἕκαςον ἁπλοῦν χαρακτῆρα δυσὶ μηδενικοῖς συνάπτεσθαι, (δι' οὗ αὖθις ἕκαςος ἁπλοῦς ἐκ τριῶν συγκείσεται) γενήσονται 9 ἔτι συζυγίαι, ἀνὰ τρεῖς. Πρὸς τούτοις τὸ 0 καὶ εἰς τὸ μέσον τῶν 81 συζυγιῶν (τῶν ἀνὰ δύω) τεθῆναι δυνατόν. Ἐκ τούτου αὖθις ἔσονται 81 συζυγίαι, τρεῖς ἑκάςη χαρακτῆρας περιλαμβάνουσαι. Ὥςε προσθετέον 729 + 81 + 81 + 9, ἵνα προέλθωσι πάντες οἱ ἀριθμοὶ, οἱ μεταξὺ 100 καὶ 999. (ἀμφοῖν τοῦ 100 καὶ 999 τούτοις συμπεριλαμβανομένων) Συζυγίαι δ' εἰσὶν 900 ἀνὰ τρεῖς. Καὶ τοσοῦτοι οἱ ἀριθμοὶ ἀκριβῶς μεταξὺ 100 καὶ 999. Ὧ δὲ τοὺς δυνατοὺς τρόπους τῶν Συλλογισμῶν ὑπολογιςεῦσαι βουλητὸν, τῶν διὰ τοῦ Α Ε Ι Ο ἐκδηλουμένων, τέσσαρα εἶναι ταῦτα εἰδὼς, πρὸς τρία, ἢ ἀνωτ. δέδεικται, συνάψας 4^3 συζυγίας προκύψειν, ἤτοι 64 : κις ἀνὰ τρία συζευχθήσεσθαι, οὐδόλως ἐνδοιάσειε.

§. 340. Οἱ δ' Ἐσχηματισμένοι ἀριθμοὶ (ὥςε καὶ τούτους μὴ παραδραμεῖν) οὕτω κέκληνται διὰ τὴν, ἣν λαμβάνουσι, θέσιν, σχήματα παριςῶντες Γεωμετρικά.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1,	κτ.

Ἐν τῇ α΄. κατὰ κάθετον σειρᾷ μονάδες ἔνεισι μόναι, ἐφ' ὅσον ἂν βούλῃ, προαγόμεναι. ἐπὶ δὲ τῆς β΄. τὰ κεφάλαιά εἰσι τῶν ἁπλῶν ὅρων, ὡς ἀεὶ τοὺς προηγηθέντας ὅρους τῆς προτέρας σειρᾶς ἕνα ὅρον τῆς β΄. ἢ τῆς ἀμέσως ἐχομένης συμπληροῦν. π. χ. τῆς β΄. κατὰ κάθετον σειρᾶς ἀρκτικὸν ἐςὶ τὸ 0. Οὐδεὶς γὰρ ὅρος τῆς πρώτης σειρᾶς προηγήσατο, ὅς εἰς κεφάλαιον ἂν γένοιτο. Ὁ β΄. ὅρος τῆς β΄. σ. = 1, ὡς τοῦ προηγησαμένου ὅρου τῆς α΄. = 1 ὄντος. Ὁ γ΄. τῆς β΄. = 2. τὸ γὰρ κεφάλαιον τῶν δύω προηγηθέντων ὅρων τῆς α΄. = 1 + 1 = 2. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ δ΄. τῆς β΄. = 3 = τῷ κεφαλαίῳ τῶν τριῶν προηγουμένων τῆς α΄. = 1 + 1 + 1 = 3. Καὶ τοῦτον τὸν τρόπον παράγονται ἐπὶ τῆς β΄. σειρᾶς οἱ Φυσικοὶ χαρακτῆρες. Αὖθις ἐν τῇ γ΄. σειρᾷ εὑρίσκομεν τὰ κεφάλαια τῶν τῆς β΄. Φυσικῶν χαρακτήρων, ὡς ἀεὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν προηγουμένων ὅρων τῆς προηγηθείσης σειρᾶς καινὸν ὅρον ἀποτελεῖν. Οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν σειρῶν. Ἔνθεντοι καὶ ἀνάγκη πᾶσας τὰς σειρὰς ἀπὸ τοῦ 0 ἄρχεσθαι, καὶ, ὅσῳ περαιτέρω χωροῦσι, τοσούτῳ πλείω 0 τοῖς πρώτοις ὅροις (πρὸς τὰ κάτω) ἐνυπάρχειν. Ὅτι προηγούμενοι ὅ-

ροι

ροι τῶν προηγουμένων σειρῶν εἰς συγκεφαλαίωσιν οἱ πρόκεινται. π. χ. ὁ δ'. ἀριθμὸς τῆς γ'. σειρᾶς = 10. τὸ γὰρ κεφάλαιον τῶν προηγηθέντων ὅρων τῆς β'. = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Ὁ δ'. ἀριθμὸς τῆς ε'. = 35 = τῷ κεφ. τῶν προηγ ὅρων τῆς δ'. = 0 + 0 + 0 + 1 + 4 + 10 + 20 = 35, κτ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ τιμὴ καὶ δύναμις ἁπάντων τῶν ὅρω οὕτω κατὰ νόμους διορίζεται, πᾶς τις ἂν συνίδοι, ὅτ καὶ γενικοὺς τύπους ἀνακαλύψαι δυνάμεθα εἰς εὕρεσιν ἑκάστου ὅρου οἱασοῦν σειρᾶς. Καὶ αἱ μὲν ὁρι ζόντιαι Σειραὶ τῶν προτεθεισῶν σειρῶν τοὺς συνεργοὺ τοῦ Διωνύμου περιέχουσι. (§. 285.) π. χ. τῇ δ' ὁριζοντείῳ σειρᾷ ἐνυπάρχουσιν 1, 3, 3, 1. Οὗτο δὲ καὶ οἱ συνεργοὶ τοῦ $(\alpha + \beta)^3$. τῇ δὲ ς'. 1 5, 10, 10, 5, 1 = τοῖς συνεργοῖς τοῦ $(\alpha + \beta)^5$ καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐκ δὲ τῆς θεωρίας τῶν κατὰ κά θετον σειρῶν οἱ νόμοι τῶν Συνδυασμῶν, Συντρια σεύσεων, καὶ τῶν κατὰ τὸ δοκοῦν Συζυγιῶν (§. 338. ἀποδείκνυνται. περὶ ὧν εἰπεῖν ἄλλης ἂν εἴη Πραγμα τείας, ἡμῶν ἐν παρόδῳ μόνον τούτων ἐν τῇ παρούσ ἁπτομένων.

§. 341. Ἀριθμητικῶν Προόδων προκειμένων ὧν ἡ τῶν ὅρων διαφορὰ ἢ 1, ἢ 2, ἢ 3, ἢ ὁσισοῦ ἀριθμὸς, διὰ τῆς Προσθέσεως τῶν προηγηθέντων ὅρω τοιαύτης σειρᾶς, ἀναφύεται ὅρος καινὸς, καὶ ἐκ τοῦ ἑ πομένου καὶ Σειρὰ καινὴ, οὓς Πολυγώνους ἀριθ μοὺς καλοῦσι, τοῖς Εσχηματισμένοις προσήκοντας ἀ ριθμοῖς. Ὁ δὲ λόγος τῆς τούτων προσηγορίας ὅτι ὁ β'. τούτων ὅρος δεικνύει, ὅσας γωνίας Σχήματι Γεω μετρικὸν περιλαμβάνει, καὶ ὅτι πλείους ἂν τούτων ἐ νεργείᾳ διὰ τοσούτων σημείων, ὅσαι τῷ δεδομένῳ τῆ σειρᾶς ὅρῳ αἱ μονάδες, τοιούτῳ σχήματι, ἐξ οὗ κα τῇ σειρᾷ τὸ ὄνομα, παρασαῖεν.

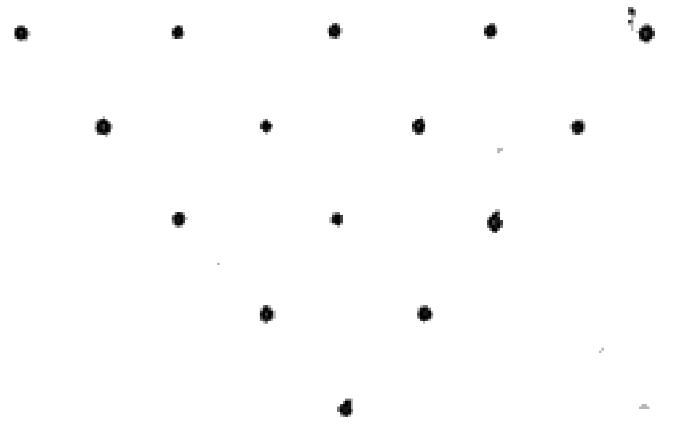
Παρ(άδ

Παράδ. Ἔστω ἡ διάφορα τῶν ὅρων τῆς α'. ἀριθμ. σειρᾶς ἡ 1.

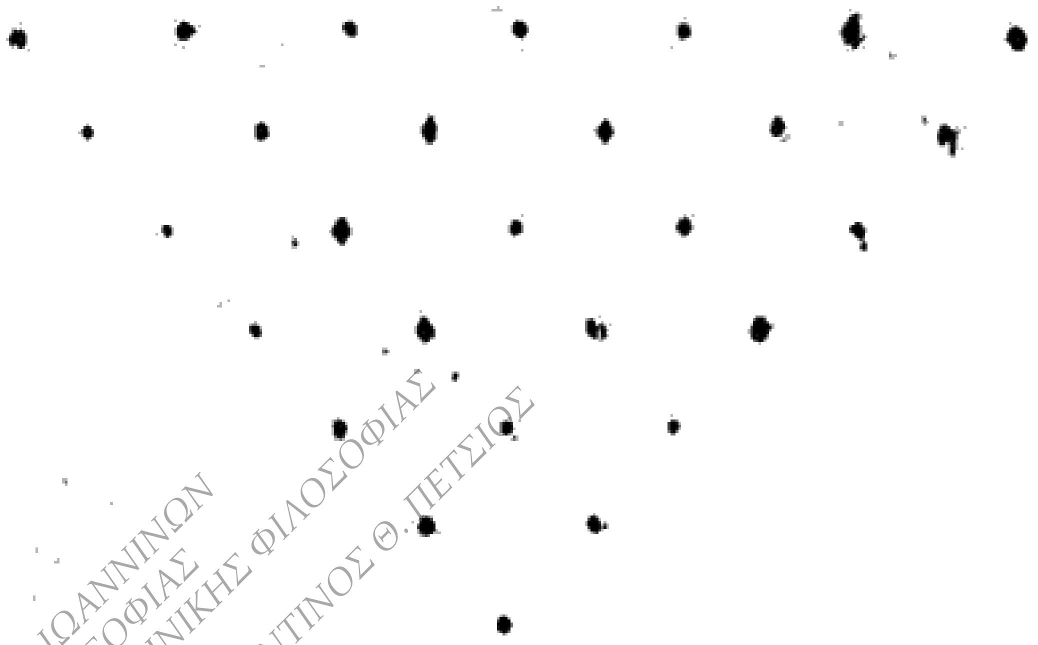
Ἀριθμ. Σειρά. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, κτ.

Πολύγωνοι ἀριθμοί. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28

Τουτ. ἀεὶ τῶν ὅρων τῆς προηγηθείσης σειρᾶς προστιθεμένων, ἀνακύπτουσιν ἐκ τούτων οἱ καινοί. Ἔστι γὰρ 1 = 1. 1 + 2 = 3. 1 + 2 + 3 = 6. 1 + 2 + 3 + 4 = 10, κτ. Καλοῦνται δὲ εἰδικῶς οὗτοι Τρίγωνοι ἀριθμοί. Ὁ β'. ὅρος δείκνυσι τὰς γωνίας τοῦ Τριγώνου τρεῖς εἶναι. Ἕκαστος οὖν ὅρος ταύτης τῆς σειρᾶς διὰ τῶν σημείων ὡς Τρίγωνον παραστήσεται. π. χ. ὁ ὅρος 15. Ἐν τούτῳ, ὡς κἀπὶ τῶν λοιπῶν ὅρων, ἡ πληθὺς τῶν ὅρων τῆς α'. σειρᾶς, δι' ὧν τοῦ κεφαλαίου ὁ παρὼν προέκυψε, τὰ μέρη τῆς πλευρᾶς τοῦ Τριγώνου, ἢ ἐνταῦθα τὰ σημεῖα παριστᾷ, ἐξ ὧν ἀναγκαίως ἑκάστη πλευρὰ συνίσταται. 15 ἀνέφυ τῷ κεφαλαίῳ τῶν 5 ὅρων τῆς προηγ. σειρᾶς. ἄρα ἡ τούτου πλευρὰ περιέξει δήπου 5 σημεῖα, οὕτως ἀποδιδόμενα.



28 δὲ τῷ κεφαλαίῳ τῶν 7 ὅρων. Ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ Τριγώνου ἐξ 7 σημείων, ὧδε παριστωμένων.

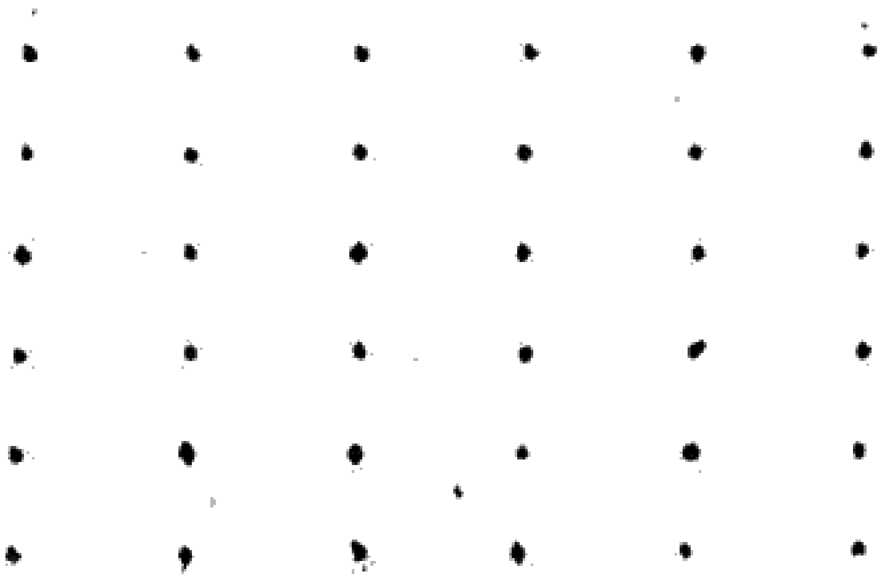


Ἐὰν οὕτω καὶ τοὺς ὅρους τῆς Ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, ὧν ἡ διαφορὰ = 2, συγκεφαλαιῶμεν, καινὴν σειρὰν ποιοῦντες, ἀνακύπτουσιν Ἀριθμοὶ Τετράγωνοι. Ὁ δὲ β΄. τούτων ὅρος αὖθις ἐμφαίνει τὰς γωνίας τοῦ Τετραγώνου, καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων, ὧν τῇ προσθέσει ἀεὶ καινὸς ὅρος τῆς τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν σειρᾶς προέρχεται, τὴν πλευρὰν, ἢ τὰ σημεῖα, τὰ ἑκάστῃ πλευρᾷ τοῦ Τετρ. ἀνήκοντα.

Π. χ. Ἀριθμ. Σειρά. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

Πολύγωνοι ἀριθμοί. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

Ληφθήτω π. χ. 36 διὰ τῆς προσθέσεως 6 ὅρων συναπαρτισθεὶς, ὃς Τετράγωνον δώσει, οὗ ἡ πλευρὰ = 6 σημείοις.



Ἐὰν

Ἐὰν τῆς Ἀριθμ. Σ. ἡ διαφορὰ = 3 τεθῇ, ἡ τῶν Πολυγώνων ἀριθμῶν σειρὰ Πενταγώνους ἀριθμοὺς παριςᾷ. π. χ.

Ἀριθμ. Σ.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	κτ.
Πολύγ. ἀρ.	1	5	12	22	35	51,		κτ.

Οὗτοι οὐχ οὕτω καλῶς διὰ σημείων παραςῆναι δυνήσονται, καίτοι τοῦ καιρίως μὴ ἐξαιρούμενοι. Τῆς δὲ κατὰ τὴν Ἀριθμ. Σ. διαφορᾶς = 4 ληφθείσης, οἱ Ἑξάγωνοι ἀναφανήσονται ἀριθμοί, κτ. Εἰ δὲ καὶ τοὺς Πολυγώνους οὕτως ἀλλήλοις προσθήσομεν, οἱ Πυραμιδοειδεῖς.

Π. χ. πολύγ. τρίγωνοι	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28
Πυραμιδοειδεῖς	1.	4	10	20	35	56	

Τῶν δὲ Πυραμιδοειδῶν αὖθις οὕτω προσαθροισθέντων, οἱ Πυραμιδοειδεῖς τῶν ὑπερτέρων τάξεων, κτ. οἷς οἱ ἀρχαιότεροι Ἀριθμητικοὶ ἐνησχολοῦντο. Προβλήματα κατὰ τούτους (τοὺς ἀρ.) προτείνοντες, ὧν ἡ ἐπίλυσις ῥαδία τῷ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀριθμῶν μετελθεῖν ἐθέλοντι.

ΠΕΡΙ