ἀριθμητοῦ μείζονος ὄντος τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐνθέντοι καὶ ῥᾴδιον ἔσαι λογαρίθμους εὑρεῖν ὁλοσχερῶν, οἷς καὶ κλάσματα πρόσκεινται· ὅτι ῥᾳδίως εἰς νόθα μεταφέρονται κλάσματα.

Π. χ. $\lambda.\ 3\frac{5}{8} = \lambda.\ \frac{29}{8} = \lambda.\ 29 - \lambda.\ 8$. Ἀλλὰ

$$\lambda.\ 29 = 1{,}4623980$$
$$\text{ἀφαιρ. } \lambda.\ 8 = 0{,}9030900$$
$$\text{ἄρα } \lambda.\ \tfrac{29}{8} = \lambda.\ 3\tfrac{5}{8} = 0{,}5593080$$

Ζητηθέντος οὖν τούτου ἐν τοῖς πίναξι τρόπῳ τῷ ῥηθέντι, εὑρήσομεν τούτῳ παρακείμενον τὸν ἀριθμὸν, 3, 625, ὅπερ ἔσαι καὶ $\frac{29}{8}$, ἢ $3\frac{5}{8}$, εἰς δεκαδικὸν μεταποιηθὲν κλάσμα. Ἐὰν δέ τινι ἀριθμῷ καὶ δεκαδικὰ προσκέωνται κλάσματα, μεταβάλλεται πᾶσα ἡ ποσότης εἰς νόθον κλάσμα, ὅπερ γίνεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μετὰ δυνάμεων τοῦ 10, παρονομαστὴν λαμβάνον τοιοῦτον, οἷα ἡ, δι' ἧς ἐπολλαπλασιάσθη, τοῦ 10 δύναμις. Τὰ λοιπὰ δὲ γίνεται τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ τῆς διαιρέτεως παραδείγματος, οὗ ὁ λογάρ. ζητεῖται. Καὶ οὗτος ἔσαι ὡσαύτως καταφατικός. Ἐνταῦθα λόγος ἐςὶν ἔτι περὶ ποσοτήτων, ὧν οἱ ἀριθμοὶ τοῖς πίναξιν ἔνεισι. π. χ. $\lambda.\ 2{,}545 = \lambda.\ 2\frac{545}{1000} = \lambda.\ \frac{2545}{1000} = \lambda.\ 2545 - \lambda.\ 1000$.

$$\lambda.\ 2545 = 3{,}4056878$$
$$\lambda.\ 1000 = 3{,}0000000 \quad \text{ἀφαιρ.}$$
$$0{,}4056878 = \lambda.\ \tfrac{2545}{1000}$$

$= \lambda.\ 2{,}545$, ᾧ ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 2, 545 ἀντισοιχεῖ.

§. 323. Μετὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς εὑρέσεως τῶν λογαρίθμων ἑκάσου εἴδους κλασμάτων, ῥᾴδιον ἔσαι

μετὰ

μετὰ κλασμάτων, ἢ μετὰ κλασμάτων, καὶ ὁλοσχερῶν, καὶ ὅλως, ἅπαν εἶδος ὑπολογισμῶν λογαριθμικῶς ὑπολογίζεσθαι· ὡς πολλαπλασιάζειν, διαιρεῖν, εἰς δυνάμεις ἐξαίρειν, ῥίζας ἐξάγειν, κτ.

Παραδείγμ. $\frac{3}{4} \cdot 8$ εἴη ἂν λ. $\frac{3}{4}$ + λ. 8.

$$\begin{array}{rl} \lambda.\ \frac{3}{4} & = -\ 0{,}1249388 \quad (\S.\ 321.) \\ \lambda.\ 8 & = +\ 0{,}9030900 \\ \hline & = +\ 0{,}7781512 = \lambda.\ \frac{3}{4} \cdot 8. \end{array}$$

ᾯ τινι λογαρίθμῳ ὁ ἀριθμὸς 6 προσήκει. καὶ $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.

Ὡσαύτως $(\frac{3}{4})^2 = 2.\ \lambda.\ \frac{3}{4} = -\ 0{,}1249388$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline -\ 0{,}2498776 \end{array}$$

Ὃς (λογ.) ἀντιστοιχεῖ σχεδὸν τῷ ἀριθμῷ $\frac{1}{1{,}778}$ καὶ $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ σχεδὸν $= \frac{1}{1{,}778}$, ἢ $\frac{1000}{1778}$. Ὅτι $\frac{9}{16}$, καὶ $\frac{1000}{1778}$ παρέχουσι σχεδὸν τὰ αὐτὰ πηλίκα, ἀμφοῖν εἰς δεκαδικὰ γεγονότων κλάσματα, ἤτοι 0, 5625. Εἰ δὲ τὴν $\sqrt{\frac{3}{4}}$ λογαριθμικῶς ζητεῖν δέοι, εἴη ἂν λ. $\frac{3}{4} : 2 = -\ \frac{0,\ 1249388}{2} = -$ 0, 0624694, ᾧ τινι ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{1{,}155}$ ὅτι ἔγγιστα προσήκει· Τὸ τοίνυν $\frac{1}{1{,}155}$ ἢ $\sqrt{\frac{3}{4}}$ τυγχάνει. Ἔστι γὰρ $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}7320\ ..}{2} = 0{,}8660\ ..$

Ὡσαύτως καὶ $\frac{1}{1{,}155} = \frac{1000}{1155} = 0{,}8640\ ..$ ὅπερ κατά τι ἔλαττον τοῦ 0, 8660, ὡς τοῦ λογαρίθμου ἀκριβῶς τοῖς πίναξι μὴ ἐμπεριεχομένου. περὶ οὗ κατωτέρω.

§. 324. Κἀπὶ τῶν Ἀναλογιῶν τοὺς λογαρίθμους

μους ἐν χρήσει παραλαμβάνεσθαι, καὶ πάνυ συνεχῶς, πᾶς τις συνορᾷ. Ὁ οὖν πολλαπλασιάζειν, καὶ διαιρεῖν διὰ λογαρίθμων εἰδὼς, οὐδεμίαν ἕξει ἐν τούτῳ δυσχέρειαν, μεμνημένος, ὅτι ἐπὶ τῶν λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς πρόσθεσιν, καὶ ἡ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν μεταβάλλεται, καὶ τῶν κανόνων, τῶν περὶ τῶν ἀντιθέτων ποσοτήτων. π. χ. 100 λίτρας ὠνήσατότις τὸ, ὅ, τι ἄντις καθ' ὑπόθεσιν εἴποι, 76 δραχμῶν. πόσου ὠνήσεται 7350 λίτρας; Ὑπολογισθήτω λογαριθμικῶς, καίτοι τοῦτο εὐχερέστερον ἂν ἐπιλυθείη τῷ συνήθει τρόπῳ. ἤτοι $100 : 7350 = 76 : \chi$. Καὶ ἐπειδὴ $\chi = \frac{7350 \cdot 76}{100}$, ἔσαι λογαριθμικῶς, λ. 7350 + λ. 76 — λ. 100.

	λ. 7350	=	3,8662873	
	λ. 76	=	1,8808136	
προσεθ.			5,7471009	
	λ. 100	=	2,0000000	ἀφαιρ.
			3,7471009	

Ὅς ἐν πίναξι τῷ 5586 προσεπανήκει. Τοσούτων ἄρα δραχμῶν ὠνηθήσονται 7350 λίτραι.

Ἕτερον παράδ. Ἔςωσαν δύω κύβοι, ὁ μὲν σιδηροῦς, ὁ δὲ μολιβδοῦς, ὧν τὰ βάρη λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὅν 176 : 256. Τεθήτω καὶ ἑτέρα τις σιδηρᾶ σφαῖρα, 1 λίτραν ἕλκουσα. Ζητεῖται, πόση ἔσαι ἡ ὁλκὴ σφαίρας μολιβδίνης, τὸν αὐτὸν ἔχουσα ὄγκον, καὶ σχῆμα; Φημὶ δή.

$$176 : 256 = 1 \text{ λίτρα} : \chi \text{ λίτ.}$$

καὶ $\chi = \frac{256.1}{176}$. λογαριθμ. λ. 256 — λ. 176.

$$\begin{array}{rcl} \lambda.\ 256 & = & 2,4082400 \\ \lambda.\ 176 & = & 2,2455127 \\ \hline & & 0,1627273 \end{array} \text{ ἀφαιρεθ.}$$

Οὗτος ὁ λογάριθμος ἐν τοῖς μείζοσιν ἀριθμοῖς ζητηθεὶς τῶν πινάκων, τῶν προσηκόντων τῷ χαρακτηριςικῷ καλῶς παρατηρηθέντων, δώσει ἀριθμὸν μεταξὺ 1,454 καὶ 1,455 ἐμπίπτοντα. Τὸ διάπτωμα τοίνυν, διὰ τὸ τὸν ἀριθμὸν ἀκριβῶς τοῖς πίναξι μὴ ἐνυπάρχειν, ἔλαττον, ἢ $\frac{1}{1000}$ λίτρας, ὅ περίπου τὸ ή. ἐςὶ μέρος τῆς δραχμῆς. Καὶ οὐ πόῤῥω τοίνυν τοῦ ἀληθοῦς ὑποθεῖναι δυνάμεθα τὴν μολιβδίνην σφαῖραν ἕλκειν 1,454 λίτρας, ἢ $1 + \frac{454}{1000}$ λίτ. Ἐκ τούτου δῆλος ὁ τρόπος, καθ' ὅν, τριῶν δοθέντων οἱωνοῦν ἀριθμῶν τῆς Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας, ὁ δ'. ἀεὶ λογαριθμικῶς ἐξευρίσκεται, διὰ τὸ ἕκαςον τῶν ὅρων εἰς τέταρτον γίνεσθαι. (§. 239.)

§. 325. Ἀλλ' εἴποι ἄν τις, ὁποῖοι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀποφατικῶν ποσοτήτων, π. χ. ὁ λ. — 8. ὁ λ. — 1000. ἤ ὁ λ. — 2. κτ; οὐδένα τούτων ὑπάρχειν ἀπαντῶμεν, ἢ τούτων τοὺς λογαρίθμους ἀδυνάτους εἶναι ποσότητας. Οἱ μὲν γὰρ θετικοὶ τοῖς θετικοῖς ἁρμόζουσιν ἀριθμοῖς, τοῖς μείζοσι τῆς 1. Οἱ δ' ἀποφατικοὶ τοῖς κλάσμασι, τοῖς ἐλάττοσι τῆς 1 (§. 321.) μείζοσι μέντοι τοῦ 0. Ἡ δ' ἀποφατικὴ ποσότης οὐδέτερον τούτων. Οἱ δὲ λογάριθμοι ἤτοι καταφατικοί, ἢ ἀποφατικοί. Ἄρα τούτων οὐδεὶς ὑπάρχει λογάριθμος

§. 326. Καὶ μέχρι τοῦδε μὲν μετὰ λογαρίθμων ἐλογισάμεθα, οὓς καὶ ἐν τοῖς ἐλάττοσι πίναξι τοῖς ἐν χρήσει οὖσιν, εὑρίσκομεν. Ὥρα δὲ καὶ τὰ ἑξῆς ἐπιλῦσαι τῶν Προβλημάτων.

1) Δο-

1) *Δοθέντος ἀριθμοῦ τινος, ζητηθήτω ὁ τούτου λογάριθμος, ὁ τοῖς πίναξι μὴ ἐνυπάρχων.*

2) *Δοθέντος λογαρίθμου τινὸς, ζητηθήτω ὁ τούτου ἀριθμὸς, ὁ τοῖς πίναξι μὴ ἐνυπάρχων·*

Τουτ: ἐὰν ποσότητες προκέωνται μείζους τῶν ἐν τοῖς πίναξιν, ὧν οἱ λογάριθμοι εὑρετέοι, ἢ λογάριθμοι, ὧν τὸ χαρακτηριστικὸν μεῖζον τοῦ ἐν τοῖς πίναξι, καὶ ὧν οἱ ἀριθμοὶ τοῖς τῶν ἐν τοῖς πίναξι λογαρίθμων ἀριθμοῖς οὐ πάντῃ συνᾴδουσιν, ἢ ἐὰν ἄμφω μὴ παρῇ.

§. 327. Εἰς ἐπίλυσιν τοῦ α'. Προβλήμ. προσεκτέον τοῖς ἑξῆς. Ἐρεύνησον πανταχόθεν, εἰ ὁ ἀριθμὸς εἰς παράγοντας ἔχει ἀναλύεσθαι, τοῖς πίναξιν ἐνυπάρχοντας. Εἰ οὖν τοῦτο, προσθεὶς τοὺς λογαρίθμους (τῶν παραγ.) ἕξεις τὸν ζητούμενον λογάριθμον. (§. 317.) Καὶ τοῦτο ἡ μέθοδος ἡ εὐχερεστάτη, ἀρίστη, καὶ ἀσφαλεστάτη τυγχάνει.

Παράδ. Ζήτησον τὸν λογάριθμον τοῦ 183220, τοῦ ἐν τοῖς πίναξι μὴ εὑρισκομένου, ἔχοντος μέντοι διαφόρως εἰς παράγοντας κατατέμνεσθαι· π. χ. εἰς 10 . 2 . 9161. ἢ εἰς 20 . 9161.

Ὥστε λ. 20 = 1,3010300

λ. 9161 = 3,9619429

ἄρα λ.20 + λ.9161 = λ.183220 = 5,2629729

Ἕτερον. ὁ λ. τοῦ 1492992 = λ. 36 + λ. 128 + λ. 324, ἅτε τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τούτους τοὺς παράγοντας ἀναλυομένου. ἢ 1492992 = 36 . 128 . 324. Ἔνθεν τοι

λ. 36 = 1,5563025
λ. 128 = 2,1072100
λ. 324 = 2,5105450

ἄρα λ. 14 2992 = 6,1740575, κτ.

Ἐὰν δ᾽ ὁ ἀριθμὸς εἰς παράγοντας οὐκ ἂν διατέμνοιτο, τοὺς λογαρίθμους διὰ τῶν διαφορῶν ἀνακαλύψομεν. Ἐπὶ γὰρ τῶν μειζόνων ἀριθμῶν αἱ διαφορὰι δύο ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν κατ᾽ αὐτοὺς λογαρίθμων σχεδὸν αἱ αὐταὶ, μικρόν τι ἀλλήλων διαφέρουσαι.

π. χ. ὁ λογ. τοῦ 9991 = 3,9996090
ὁ λογ. τοῦ 9990 = 3,9995655

ἡ τούτων λογαριθ. διαφορὰ = 435

Αὖθις λ. 9992 = 3,9996524
λ. 9990 = 3,9995655

ἡ τούτων λογαριθμ. διαφορὰ = 869

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ 9990, καὶ 9991 = 1, καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ 9990, καὶ 9992 = 2. Ὡσαύτως ἡ λογαριθμικὴ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ 9990, καὶ 9992, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, δύο ἀριθμῶν, δυάδι διαφερόντων, σχεδὸν ἔτι ἅπαξ τηλικαύτη, ἡλίκη ἡ λογαρ. διαφ. δύο ἀρ. μονάδι διαφερόντων. Καὶ γὰρ 435 . 2 σχεδὸν = 869. Καὶ οἱ λογάριθμοι ἐλαττοῦνται μόνον ἑνὶ δεκαμιλλιοςημορίῳ. Καὶ τοῦτο κομιδῇ ἀκριβὲς ἐν ἑπτὰ δεκαδικοῖς, εἰς ὅσα οἱ λογάριθμοι τῶν ἐλασσόνων ὑπελογίσθησαν πινάκων. ἀλλ᾽ οὔτε πλείω τῶν 7 δεκαδικὰ τῶν λογαρίθμων ἐπὶ τῶν πλειόνων ἀπαιτοῦνται ὑπολογισμῶν. Δυνατὸν τοίνυν τὰς διαφορὰς τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων ἐν μείζοσιν ἀριθμοῖς παραβάλλειν, ἄνευ ἐπισήμου

σήμου τοῦ παραπτώματος. Τούτοις ἐρείδεται καὶ τὰ ἑξῆς

1) Δοθέντων ἀριθμῶν μειζόνων, οὓς οἱ πίνακες οὐκ ἐμπεριλαμβάνουσι, διαςέλλομεν τοσούτους τῶν ἀριθμῶν ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ, ὥςε τοσούτους μόνον ὑπολείπεσθαι ἐν τοῖς ἀριςεροῖς, ὅσοι τοῖς πίναξιν ἔνεισι, τῶν λοιπῶν ἐν τοσούτῳ, ὡς δεκαδικῶν θεωρουμένων. π. χ. δοθέντος τοῦ ἀριθμοῦ 8946352, διάςειλον μέχρι τῶν 6 (ὅτι μέχρι τοῦδε ὁ ἀριθμὸς ἐνυπάρχει τοῖς πίναξι) οὕτως αὐτὸν θεωρῶν 8946, 352.

2) Ζήτησον ἤδη τοὺς λογαρίθμους τοῦ διαςαλέντος, καὶ τοῦ μονάδι τοῦτον ὑπερέχοντος, καὶ ἄφελε τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος. π. χ.

$$\begin{array}{l} \lambda.\ 8947 = 3{,}9516774 \\ \lambda.\ 8946 = 3{,}9516289 \\ \hline \end{array}$$

ἡ διαφορὰ τῶν β΄. ἀρ. = 1 καὶ ἡ λογ. διαφ. = 485, ἢ ἄμεινον 0, 0000485.

Ἀνέκυψεν οὖν ἡ λογαριθμικὴ διαφορὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ μονάδι μείζονος, ἢ ὁ 8946.

3) Ἐπειδὴ οἱ γ΄. τελευταῖοι χαρακτῆρες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ὡς δεκαδικὰ τεθεώρηνται, οὐκ ἔτι εἰσὶν = 1 Ὥςε διὰ τὰ ἀνωτ. ἐν ἀρχῇ τοῦ §. ἔχομεν ἂν τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν, καὶ τῶν λογαρίθμων διὰ Γεωμετρικῆς παραβάλλειν ἀναλογίας εἰς εὕρεσιν δ΄. ἀριθμοῦ.

4) Συνάγω τοίνυν. ὃν λόγον ἔχει ἡ Διαφορὰ 1 πρὸς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, τὸ τῷ ἀριθμῷ προσκείμενον, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ἡ εὑρεθεῖσα λογαριθμικὴ διαφορὰ

φορὰ πρὸς τὴν εὑρετέαν, τὴν ἔτι τῷ δεκαδικῷ προσεπανήκουσαν κλάσματι. Ὥςε $1 : 0,352 = 0,0000485 : \chi$. καὶ $\chi = \frac{0,352 \cdot 0,0000485}{1} = 0,0000170720$.

5) Τοῦτο προσθέντες τῷ λογαρίθμῳ τοῦ διαςαλέντος ἀριθμοῦ, τουτ: μόνον τοὺς α'. ἀριθμοὺς τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς, δηλονότι τὰ ἴσα δεκαδικὰ τοῖς ἴσοις, ἐνταῦθα 170, ἕξομεν τὸν λογάρ. τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ μετὰ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος.

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Ὡς} & \lambda.\ 8946 & = & 3,9516289 \\
 & \text{πρόσθες τούτῳ} & & 170 \\
\hline
\text{δίδωσι τὸν} & \lambda.\ 8946,352 & = & 3,9516459
\end{array}
$$

6) Ἐπεὶ δὲ οὐ τὸν λογάρ. τούτου τοῦ ἀριθμοῦ μετὰ δεκαδικοῦ, ἀλλ' ὁλικὸν τὸν ἀριθμὸν ἄνευ δεκαδικοῦ ἔχειν βουλόμεθα, προςίθεμεν τῷ χαρακτηριςικῷ τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου τοσαύτας ἔτι μονάδας, ἢ 1, ὅσα ἦν τὰ δεκαδικὰ τοῦ ἀριθμοῦ κλάσματα, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ λογάρ. τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τοῦ ὁλοσχεροῦς. Ἐνταῦθα τοίνυν τῷ εὑρεθέντι λογαρίθμῳ προσθετέον ἔτι 3. Ὅτι 3 ἦν τὰ δεκαδικὰ γεγονότα. Καὶ ἔςαι λ. $8946352 = 6,9516459$. Τοῦτο δὲ τὸ β'. ῥαδίως κατανοῆσαι δυνάμεθα. Καὶ γὰρ $8946,352 \cdot 1000 = 8946352$. Ἔνθεντοι καὶ λογ. $8946,352 +$ λ. $1000 =$ λ. 8946352. Ἀλλὰ λογ. $1000 = 3,0000000$. Ἄρα ἀνάγκη ἦν τοῦτον τῷ τοῦ προτέρου χαρακτηριςικῷ προςεθῆναι, δι' οὗ πρόεισιν ὁ λογάριθμος ἐν τοῖς πρώτοις 7 δεκαδικοῖς τόποις ἀκριβής.

§. 328. Ὑποκείσθω καὶ ἕτερον παράδειγμα. Ζήτησον τὸν λογάρ. τοῦ 196668.

Ἔνθεντοι κατὰ τὸν α'. κανόνα 1966,68.

κατὰ τὸν β'.	λ. 1967	=	3,2938044
	λ. 1966	=	3,2935835
	ἡ λογαρ. διαφ.	=	2209
	ἢ μᾶλλον	=	0,0002209

κατὰ τὸν δ'. καν. 1 : 0, 68 = 0,0002209 : χ.
Καὶ χ = 0, 68 . 0,0 02209 = 0,000150212.

κατὰ τὸν ε'. καν.	λ. 1966	=	3,2935835
	προσεθ.		1502
ἄρα λογάρ.	1966,68	=	3,2937337
κατὰ τὸν ς'. καν.	λ. 196668	=	5,2937337.

Σημείωσαι, ὅτι ὁ προκείμενος ἀριθμὸς καὶ εἰς παράγοντας ἂν ἀναλυθείη. Τούτου δὲ γεγονότος, καὶ τῶν λογαρίθμων προσεθέντων, προκύψει ὁ αὐτὸς οὗτος λογάριθμος.

§. 329. Αὐτόματον ἐκ ταύτης ἕπεται τῆς μεθόδου, ὅτι καὶ τοὺς λογαρίθμους μειζόνων, καὶ ἐλασσόνων ἀριθμῶν, οἷς πλεῖστα δεκαδικὰ προσήρτηνται, μέχρι τῶν 7 δεκαδικῶν ἂν εὕροιμεν τόπων, εἰ μόνον ἀείποτε ἐν ἀρχῇ θεωροῖντο, ὡς τέσσαρας ἀριθμοὺς ἔχοντες ὁλοσχερεῖς, καὶ κατὰ τοῦτο ὁ ὑπολογισμὸς κατασκευάζοιτο. Τοῦ δὲ ὑπολογισμοῦ εἰς πέρας ἀχθέντος, ἔτι ἅπαξ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ θεωρηθέντος, δῆλον ἔςαι, πότερον προσθετέαι μονάδες τῷ χαρακτηριςικῷ, ἢ τούτου ἀφαιρετέαι. π. χ. λ. 473,8425. πρῶτον θεωρηθήτω, ὡς 4738,425.

Ἐςι δὲ λ. 4739 = 3,6756867
λ. 4738 = 3,6755951

λογαρ. διαφ. = 916

Ὥςε 1 : 0,425 = 0,0000916 : χ. καὶ χ = 0,0000916 . 0,425 = 0,0000389300.

ἄρα λ. 4738 = 3,6755951
πρόσθες 389

3,6756340 = τῷ λ. τοῦ 4738,425. Ἐπεὶ μέντοι ὁ λογ. τοῦ 473,8425 ζητεῖται, ἀφαιρετέα ἡ 1 ἀπὸ τοῦ χαρακτηρισικοῦ. Ὅθεν λ. 473,8425 = 2,6756340.

§. 330. Τὸ β'. Πρόβλημα. (§. 326.) Αὐτίκα δῆλον ἐνταῦθα, ὅτι, τοῦ προβλήματος ἐπιλυθέντος, εὑρεθήσονται οἱ ἀριθμοὶ, εἴτε τοῦ λογαρίθμου οὕτως ἔχοντος, ὥςε μείζονος μὲν χαρακτηρισικοῦ εἶναι, ἢ τὸ ἐν τοῖς ἐν χρήσει πίναξι, τὰ αὐτὰ δὲ δεκαδικὰ προσκείμενα ἔχειν, εἴτε ἅμα μείζονος χαρακτηρισικοῦ, καὶ διαφόρων δεκαδικῶν τούτῳ προσόντων. Εἰ οὖν τὸ α'. ἀναγκαῖον μόνον τὸν τούτων ἐν τοῖς πίναξιν εὑρεθέντα ἀριθμὸν μετὰ δυνάμεως τοῦ 10 πολλαπλασιάζειν, ἢ διαιρεῖν, ἡλίκον τὸ χαρακτηρισικὸν τοῦ λογαρίθμου, τουτ: ἤπερ πλείους, ἢ ἐλάσσους μονάδας ἔχει τοῦ ἐν τοῖς πίναξιν εὑρεθέντος μετὰ τῶν αὐτῶν δεκαδικῶν. π. χ. Ἔςω δεδομένος ὁ λογάρ. 5,7550359. Τὰ δεκαδικὰ τούτου (τοῦ λογ.) ἔνεισιν ἀκριβῶς καὶ τῷ λογ. τοῦ ἀριθμοῦ 5689. Ἀλλὰ τούτου τὸ χαρακτ. = 3. ἐνταῦθα δὲ = 5. τουτ: δύω μονάσι μεῖζον. Πολλαπλασιάζομεν οὖν μόνον 5689 ἐπὶ 10^2, ἢ 100, καὶ 568900 ἔςαι ὁ ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος λογαρίθμου. Ὡσαύτως καὶ ὁ λογάρ. 1,5933968. οὗ τὰ δεκαδικὰ ἴσα τοῖς τοῦ

3821. Ἐπεὶ δὲ τούτου τὸ χαρακτ. 3, ἐνταῦθα δὲ 1, διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς (διὰ τὸ τὴν διαφορὰν τῶν δύω χαρακτ. = 2 εἶναι) διὰ 10^2. Ἔςιν οὖν $\frac{3921}{100}$ = 39,21. Εἰ δὲ τὸ τὸ β'. τὸν ἑξῆς χωρήσεις τρόπον.

1) Ζήτησον ὑπὸ τὸ χαρακτηριςικὸν 3 δυάδα λογαρίθμων, ὧν μεταξὺ τὰ δεκαδικὰ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἐμπίπτουσιν, ὅπερ οὐ χαλεπῶς εὑρήσεις, διὰ τὸ τινὰς τῶν τούτου πρώτων ἀριθμῶν ἀείποτε τούτοις συνᾴδειν.

2) Ζήτησον ἤδη μεταξὺ τοῦ ἐγγὺς μείζονος, καὶ ἐγγὺς ἐλάσσονος λογαρίθμου τὴν λογαριθμικὴν διαφοράν. ἥδε διαφορὰ τῶν τούτοις (τοῖς λογ.) ἀντιςοιχούντων ἀριθμῶν = 1, μηδόλως τῷ χαρακτηριςικῷ προσέχοντι.

3) Ἄφελε ἀπὸ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα, καὶ ἕξεις αὖθις τὴν διαφοράν, ἀμφοῖν τοῦ χαρακτηριςικοῦ παρεωραμένου,

4) Ἐπιφέρων οὕτως. ὡς ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων, οἷς ὁ δοθεὶς παρεμπίπτει, πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ δοθέντος, καὶ τοῦ ἐγγὺς καταδεεςέρου, οὕτως ἡ 1 πρὸς τὸν εὑρετέον ἀριθμόν.

5) Τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν πρόσθες, ὡς δεκαδικὸν κλάσμα, τῷ ἀριθμῷ, ᾧτινι λογάριθμος ἴδιος ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων λογάριθμος προσῆν.

6) Τοῦ οὖν χαρακτηριςικοῦ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, ἴσου τῷ χαρακτηριςικῷ 3 ὄντος, ὑφ' ὃ οἱ τῆς παραθέσεως ἐζήτηνται λογάριθμοι, μένει τὸ κατὰ τὸν προηγηθέντα κανόνα προσηρτημένον δεκαδικὸν κλάσμα ἐν τῷ οἰκείῳ σχήματι. Μείζονος δὲ ὄντος (τοῦ χαρακτ.) ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται μετὰ δυνάμεως τοῦ 10, ἐκθέτην ἐχούσης ἀριθμόν, τοσαύτας

μονά-

μονάδας περιέχοντα, ὅσαις τὸ χαρακτηρ. τοῦ δοθέντος λογαρίθμου πλεονεκτεῖ. Ἐλάττονος δὲ, διαιρεῖται (ὁ ἀρ.) διὰ δυνάμεως τοῦ 10, ἧς ὁ ἐκθέτης τοσαύτας περιέχει μονάδας, ὅσαις (τὸ χαρακτ.) ἐλαττοῦται. Καὶ τούτῳ τῷ τρόπῳ προκύπτει ἀριθμὸς μέχρις 6, ἢ 7 χαρακτήρων ἀκριβὴς, ἀλλ' οὐ μέχρι πλειόνων ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων τῶν ἐλασσόνων πινάκων, ὃ κατάδηλον καὶ ἐκ τῶν προτέρων §. §. καὶ τῆς ὁλικῆς τούτων μεταχειρίσεως.

§. 331. Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου 5,4325798, ζήτησον τὸν ἀριθμὸν κατὰ τὸν α'. κανόνα, οὗ μεταξὺ τοῦ λογαρίθμου ὁ δοθεὶς ἐμπίπτει, τοῦ χαρακτ. παραμελῶν

λ. 2708 = 3,4326487
λ. 2707 = 3,4324882

διαφορὰ τῶν δύω ἀριθμῶν = 1. λογ. διαφορὰ = 1605

Κατὰ τὸν γ'. καν. ὁ δοθεὶς λογ. = 5,4325798
ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων = 3,4324882

λογαρ. διαφορὰ = 916

Κατὰ τὸν δ'. καν. 1605 : 916 = 1 : χ καὶ $\chi = \frac{916}{1605} = 0,5707$.

Κατὰ τὸν ε'. προσαρτηθὲν τῷ 2707 ὡς δεκαδικὸν δίδωσι 2707,5707.

Κατὰ τὸν ϛ'. καν. πολλαπλασιασθῆναι χρὴ τοῦτο ἐπὶ $10^2 = 100$, (διὰ τὸ ἐνταῦθα τὸ χαρακτ. 5 εἶναι, δυάδι τοῦ 3 ὑπερέχον, οὗ τὸν ἀριθμὸν ἤδη εὕρομεν) καὶ ἔςαι = 270757,07. ὅς ὁ ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος τυγχάνει λογαρίθμου.

Ἔσω

Ἔςω δεδομένος λογάρ. 1,3456789. οὗ τὰ δεκαδικὰ μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν τῶν ἑξῆς ἐμπίπτει λογαρίθμων

ὁ λογ. τοῦ	2217 =	3,3457657
ὁ λογ. τοῦ	2216 =	3,3455698
	διαφορὰ	1959
	ὁ δοθεὶς λογάρ.	1,3456789
ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων ἐν τοῖς πίναξι, τοῦ χαρακτηρ. παραμελουμένου.		3,3455698
	διαφορὰ	1091

Σύναξον οὖν. $1959 : 1091 = 1 : \chi$. καὶ $\chi = \frac{1091}{1959} = 0,556$.

Ὁ τοίνυν ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, τοῦ χαρακτηρ. $= 3$ ὄντος, εἴη ἂν 2216,556.

Ἐπεὶ δὲ τὸ χαρ. $= 1$. ἐςὶν ὁ ἀριθμὸς $= \frac{2216,556}{100} = 22,16556$. Εἰ δὲ τὸ χαρακτ. τοῦ δοθέντος λογαρ. $= 0$ ἐτύγχανεν, ἦν ἂν ὁ ἀριθμὸς 2,216556. Εἰ δὲ τὸ χαρακτ. $= -1$. ὁ ἀριθμὸς $= \frac{1}{22,16556}$ (§. 321.) Εἰ δὲ τὸ $\chi = +6$, ὁ ἀριθμὸς $= 2216556$.

§. 332. Ὅπως οὖν ἐπινενόηνται, παρίςανταί τε, καὶ ἐν χρήσει τυγχάνουσιν οἱ λογάριθμοι ἐν τοῖς δι᾽ ἀριθμῶν ὑπολογισμοῖς, ἅλις εἰπόντες, ἴδωμεν ἔτι καὶ τὸν τρόπον, τὸν ἐν τοῖς διὰ γραμμάτων ὑπολογισμοῖς, ἤτοι τὸν καθόλου. Ἐπὶ οὖν τούτων, ἡ λέξις, λογάριθμος, τῷ γράμματι λ ἐκδηλοῦται, προτιθεμένῳ τῆς ποσότητος. π. χ. ὁ λ. τοῦ $\alpha = \lambda\alpha$. ὁ λ. τοῦ $\chi = \lambda\chi$, κτ. Ἐπεὶ δ᾽ οἱ λογάριθμοι Ἐκθέται εἰσὶ

τῶν

τῶν Δυνάμεων. οὕτω καὶ μεταχειριζόμεθα αὐτοὺς ἐν τοῖς, περὶ ὧν ὁ λόγος, ὑπολογισμοῖς. Ἔνθεντοι ὡσαύτως τὸν Πολλαπλασιασμὸν εἰς Πρόσθεσιν, τὴν Διαίρεσιν εἰς Ἀφαίρεσιν, τὴν Ἐξαγωγὴν τῶν Ῥιζῶν εἰς Διαίρεσιν, καὶ τὴν εἰς Δυνάμεις ἔξαρσιν εἰς Πολλαπλασιασμὸν τρέπομεν. Ἐὰν οὖν παραγομένου τι ἐκ διαφόρων ζητῆται ποσοτήτων, ἐκδηλωθείη ἂν διὰ τῆς τῶν λογαρίθμων προσθέσεως. Εἶτα δὲ, δι' ἀριθμῶν διορισθὲν, εὑρεθῆναι δύναται. Ὡς τὸ παραγόμ. αβγ λογαριθμικῶς παραςὰν εἴη λα + λβ + λγ. Παραπλησίως καὶ γδ λογαριθμικῶς = λ3 + λγ + λδ. Καὶ ἐν Συμπεπλεγμέναις Ποσότητι (νμ + α — χ) = λ (νμ + α — χ), ἀλλ' οὐχὶ = λν + λμ + λα — λχ. Τοῦτο γὰρ δηλώσει τῶνδε τῶν ποσοτήτων πολλαπλασιασμὸν μετ' ἀλλήλων. Τὸ δὲ σχῆμα νμ + α — χ σημαίνει, ἤπου δῆλον, τὸ ν ἐπὶ τὸ μ πολλαπλασιάσαι χρῆναι, καὶ τῷ ἐκ τούτων παραγομένῳ α προςεθῆναι, καὶ τοῦ Κεφαλαίου τὸ χ ἀφαιρεθῆναι· Οὗ γεγονότος, ὁ τούτου λογάριθμος ἀποδοθήσεται. Καὶ ἡ Διαίρεσις τῶν λογαρίθμων τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεται, ὃν καὶ ἐν ἀριθμοῖς, τουτ: δι' Ἀφαιρέσεως, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. ὁ Λ. τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ = λα — λβ. Καὶ τὸ σχῆμα $\frac{\alpha\mu}{\varrho}$ λογαριθμικῶς ἂν οὕτω παραςαίη. λα + λμ — λϱ. Τὸ δὲ $\frac{\gamma\delta}{\nu\varrho}$ ὧδε. (λγ + λδ) — (λν + λϱ) τουτ: οἱ δύω ἔσχατοι λογάριθμοι προςεθέντες ἀφαιροῦνται ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω πρώτων. Τὸ δὲ $\frac{\beta\zeta - \mu\varrho}{2\nu}$ τόνδε τὸν τρόπον. λ (βζ — μϱ) — (λ2 + λν).

§. 333. Ἐπειδὴ ἡ εἰς Δυνάμεις ἔξαρσις γίνεται διὰ

διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ Ἐκθέτου τῆς Ποσότητος, ἀναγκαῖον καὶ τοὺς λογαρίθμους οὕτω παρίςασθαι. Ἔνθεντοι $α^2$ λογαριθμικῶς εἴη 2λα. Ὅ ἐςι, τοῦ λογ. τοῦ α πολλαπλασ ἐπὶ 2, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦδε τοῦ λογαρίθμου ζητηθέντος, προκύψει $α^2$ ἀριθμὸς, τοῦ α πρότερον ὡς ἀριθμοῦ διορισθέντος. $χ^3$ λογαριθμικῶς = 3. λχ. Καὶ $χ^ν$ = ν. λχ. Κἀκ τούτων καὶ δυσχερέςερα τούτων ὑποδείγματα διορίζειν μανθάνομεν. π. χ. $α^{ν-2}$ λογαριθμικῶς ἐςι ν. λα — 2. λα. Ἡ γὰρ δύναμις τοῦτο ποιεῖν ἐπιτάττει, καὶ οἱ λογάριθμοι δυνάμεις δήπου τυγχάνουσι. Τὸ δὲ κἀκ τούτου δῆλον, ὅτι $α^{ν-2} = α^ν : α^2 = \frac{α^ν}{α^2}$. Ἄρα καὶ ν. λα — 2. λα. Ταῦτα οὖν μετ' ἐπιςάσεως θεωροῦντες πλείω τῶν σχημάτων εὐχερῶς κατανοήσαιμεν. Ὡς $α^{ν-μ} χ ω$ λογαριθμικῶς ἐςι ν. λα — μ. λα + λχ + λω. Καὶ $α^ν χ^{3-ν} μ$ ἐςι λογαρ. ν. λα + 3. λχ — ν. λχ + λμ. Καὶ τὸ ἑξῆς $α^ν μ^{-3}$ ἐςι ν. λα — 3. λμ. Ἔςι γὰρ $α^ν μ^{-3}$ $\frac{α^ν \, 1}{μ^3}$ (§. 198.) = $\frac{α^ν}{μ^3}$. Ἐὰν αἱ τῶν ποσοτήτων δυνάμεις κλάσματα ὦσι, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, καὶ ῥίζαι παριςῶνται, τελοῦνται αὖθις τὰ αὐτά. Τίθεται γὰρ ὁ κλασματικὸς Ἐκθέτης ὡσαύτως πρὸ τοῦ λ. ὅ τὸν λογάριθμον ἐμφαίνει· π. χ. $χ^{\frac{3}{4}}$ λογαριθμικῶς εἴη $\frac{3}{4}$. λχ. ἢ $\frac{3 λχ}{4}$, ὅ ἐςιν, ὁ λογάριθμος τοῦ χ πολλαπλασιασθῆναι μετὰ τοῦ 3 ὀφείλει, καὶ τὸ πα-

ραγόμ.

ραγόμ. διὰ 4 διαιρεθῆναι, καὶ τοῦ προκύπτοντος λογαρίθμου τὸν ἀριθμὸν ζητηθῆναι, διορισθέντος πρότερον ἀμέλει τοῦ χ. π. χ. Ἔςω $\chi = 36$. $\chi^{\frac{3}{4}} = 36^{\frac{3}{4}}$ $= \sqrt[4]{36^3}$, καὶ λογαριθμικῶς $= \frac{3}{4} \lambda . 36$.

$$\text{Ὥςε}\quad \frac{3\lambda . 36}{4} = \lambda . 36 = 1,5563025$$

πολλαπ. διὰ 3

$$= 4,6689075$$

διαιρ. διὰ $4 = 1,1672268$

Οὗτινος λογαρίθμου ἐκ τῶν πινάκων ἐξενεχθέντος, εὑρίσκομεν σχεδὸν τὸν ἀριθμὸν 14,7. Ὥςε $36^{\frac{3}{4}}$, ἢ $\sqrt[4]{36^3} = 14,7$. Κἀντεῦθεν προφανὴς ἡ μεγίςη ὄνησις τῶν λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν. Ὡσαύτως καὶ τὸ σχῆμα $\chi^{\frac{\nu}{\mu}} = \frac{\nu\lambda\chi}{\mu}$. ἢ $\frac{\nu}{\mu}\lambda\chi$. καὶ $(\nu\mu + \rho\chi)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\lambda(\nu\mu + \rho\chi)$, κτ. ὡς ἀνωτ.

Ἐφ᾽ ᾧ τοῦτο διὰ παραδειγμ. διαλευκᾶναι, ἐκ τῶν Γεωμετρικῶν ληφθέντος Προόδων, κἀν τούτῳ τὴν τῶν λογαριθμικῶν σχημάτων δεῖξαι χρῆσιν, ἔςω ἐν Γεωμετρικῇ Προόδῳ δοθεὶς ὁ α΄. ὅρος, καὶ ὁ ἔσχατος, καὶ ὁ τῆς Προόδου ἐκθέτης. Ἐκ τούτων εὑρετέα ἡ πληθὺς τῶν ὅρων.

Ὁ α΄. ὅρος ἔςω $= \alpha$. ὁ ἔσχ. $= \beta$. ὁ τῆς Προόδου ἐκθέτης $= \mu$. καὶ ἡ τῶν ὅρων πληθὺς $= \chi$. ἥτις ζητεῖται. Ἀντὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου $= \beta$, ἀντικαταςῆσαι δυνάμεθα τὸ $\beta = \alpha\mu^{\chi - 1}$. (§. 257.)

ἤτοι

ἤτοι $\beta = \alpha\mu^{\chi - 1}$. λογαριθμικῶς

$$\lambda\beta = \lambda\alpha + \chi\lambda\mu - \lambda\mu$$
$$+\lambda\mu \qquad\qquad +\lambda\mu$$

$$\lambda\beta + \lambda\mu = \lambda\alpha + \chi\lambda\mu \quad (\S.\ 48.\ \alpha'.)$$
$$-\lambda\alpha \qquad\qquad -\lambda\alpha$$

$$\lambda\beta + \lambda\mu - \lambda\alpha = \chi\lambda\mu \quad (\S.\ 53.\ \alpha'.)$$
$$:\lambda\mu$$

$$\frac{\lambda\beta + \lambda\mu - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \frac{\chi\lambda\mu}{\lambda\mu} \quad (\S.\ 114.\ \alpha'.)$$ ἢ

$$\frac{\lambda\beta + \lambda\mu - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \chi.$$ Καὶ προσφυέστερον ἐκδηλωθέν.

$$\frac{(\lambda\beta - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu} = \chi.$$ καὶ ἔτι προσφυέστερον

$$\frac{(\lambda\beta - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + 1 = \chi.$$

Τοῦτο δ' ἐστι χ, ἢ ἡ τῶν ὅρων πληθὺς ἡ ζητουμένη, λογαριθμικῶς ἐξενεχθεῖσα. Θῶμεν οὖν τὴν σειρὰν οὕτως ἔχειν, ἤτοι τὸν α΄. ὅρον εἶναι 2, ἢ $\alpha = 2$. τὸν ἔσχατον 1458, ἢ $\beta = 1458$. τὸν ἐκθέτην $= 3$. ἢ $\mu = 3$. καὶ τὴν πληθὺν τῶν ὅρων, ἤτοι χ, ζητεῖσθαι. Ἔσται οὖν κατὰ τοῦτο τὸ σχῆμα $\chi = \frac{(\lambda\beta - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + 1$. ἤτοι $\chi = \frac{(\lambda .\ 1458 - \lambda 2)}{\lambda 3} + 1$.

Ἔστι

Ἐςι δὲ λ. 1458	=	3,1637575
ἀφαιρ. λ. 2.	=	0,3010300
		2,8627275

οὗτος διαιρ. διὰ τοῦ λ. 3. Ἀλλὰ λ. 3 = 0,4771212,

Ὥςε $\frac{2,8627275}{0,4771212} = \frac{28627275}{4771212}$ (ὅτι ἀμφοῖν ἴσα δεκαδικὰ ἔνεισι.) =

$$\begin{array}{l|l} 28627275 & \\ (4771212) & 6. \text{ Ὁ τὸ πηλίκον τυγχάνει. Τὸ δὲ λείψ. 5 ὑ-} \\ 28627272 & \end{array}$$

πολέλειπται, ὅτι οἱ λογάριθμοι σχεδὸν πάντες ἄλογοι ποσότητες εἰσί. Τούτῳ προσεθήτω ἔτι 1. Ὥςε 6 + 1 = χ = τῇ πληθύϊ τῶν ὅρων. Ὅθεν 7 οἱ ὅροι. Καὶ ἡ Σειρὰ ἔςαι

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458.

Περὶ Συνδυασμοῦ.

§. 334. Ἡ Μέθοδος, καθ' ἣν, ποσαχῶς ἡ τάξις δεδομένων πραγμάτων οἱωνοῦν, καὶ ὁποσωνοῦν, μετακινεῖται, καὶ μετατίθεται, ἀνὰ δύω, ἢ ἀνὰ τρία, ἢ ἀνὰ δ', κτ. λαμβανομένων. ἢ ἐν γένει, καθ' ἣν Συζυγίαι καὶ Μεταθέσεις τῶν δοθέντων καθ' οροθετηθέντας γίνονται νόμους, καὶ ποσάκις τοῦτο ἐν δοθείσῃ τινὶ πληθύϊ πραγμάτων τελέσαι δυνατὸν, εὑρεῖν δυνάμεθα, Συνδυασμοῦ Μέθοδος καλεῖται. Αὐτίκα οὖν δῆλον ταύτην διεξοδικωτάτην, καὶ ἐπὶ μυρίων εἶναι ἐν χρήσει, ὡς πᾶς τις συνομολογήσει, ἐνίων μόνον ἀψαμένοις.

§. 335.