§. 317. Πειρασώμεθα ἤδη τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 9 μέχρις ἑπτὰ δεκαδικῶν ζητῆσαι. Διὸ καὶ τοῖς δεδομένοις ἀριθμοῖς τῆς Γεωμετρικῆς, καὶ Ἀριθμητικῆς Προόδου 7 μηδενικὰ προσαφθήτω, ὡς 7 μέντοι δεκαδικὰ κλάσματα, ἅτινα ὡς μηδενικὰ οὐδὲν σημαίνει, καὶ τοὺς ἀριθμοὺς ἥκιςα μεταβάλλει. Οἱ δύω δοθέντες ἀριθμοὶ τῆς Γεωμετρικῆς προόδου, ὧν μεταξὺ 9 ἐμπίπτει, 1 καὶ 10 εἰσίν. Ὅθεν συνάγομεν 1, 0000000 : χ = χ : 10, 0000000. Ὥςε $χ^2$ = 10, 00000000000000. Καὶ χ = √ 10, 00000000000000. Ἡ δὲ = 3,1622777.. ἐν ἑπτὰ δεκαδικοῖς. Ὁ δὲ ὁ μέσος ἀνάλογος τυγχάνει. Ὁ δὲ τούτου λογάριθμος εὑρίσκεται οὕτως. Ἐπεὶ ὁ τῆς 1 λογάρ. = 0, ὁ δὲ τοῦ 10 ἢ 1, ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ συνάξομεν ὧδε — 0 — χ = χ — 1. Ἄρα 0 + 1 = 2 χ. ἢ 1 = 2χ. Ὥςε χ = $\frac{1}{2}$. Ταύτητοι τῇ 1 προσαφθήτω καὶ 7 μηδενικὰ, καὶ εἶτα διαιρεθήτω. Ἔνθεντοι $\frac{1,0000000}{2}$ = 0, 5000000. Εὕρηται τοίνυν ὁ μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς μεταξὺ 1 καὶ 10, καὶ ὁ τούτου λογάριθμος. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς ἐςιν ὁ 3, 1622777... ὁ δε τούτου λογάριθμος 0,5000000. Ἀλλ᾽ οὗτος οὐκ ἔςιν ὁ ζητούμενος 9 μετὰ τοῦ ἰδίου λογαρίθμου. Ζητείσθωσαν οὖν αὖθις οἱ μέσοι ἀνάλογοι γεωμετρικῶς τε καὶ ἀριθμητικῶς μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος, καὶ τοῦ 10. Ἀναγκαῖον μέντοι αὖθις τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν, καὶ 10 μεθ᾽ ἑπτὰ προσηρτημένων δεκαδικῶν μηδενικῶν δι᾽ ἀλλήλων πολλαπλασιάζειν, καὶ ἐκ τοῦ παραγομένου τὴν $\sqrt[2]{}$ ἐξάγειν, καὶ οὕτω προκύψει αὖθις ὁ μέσος γεωμετρικὸς μεταξὺ 3,1622777 καὶ 10. Εἶτα προςίθενται οἱ λογάριθμοι τῶν δύω ἀριθμῶν, καὶ τὸ τούτων κεφάλαιον διαιρεῖται διὰ 2, τὸ δὲ πηλίκον ἔςαι ὁ λογάριθμος τοῦ καινοῦ μέσου γεωμετρικῶς ἀναλόγου. π. χ. 3, 1622777 . 10, 0000000 =

31, 6227770000000. ἡ δὲ ῥίζα τούτου μέχρις 7 δεκαδικῶν = 5,6234132. Ὁ τούτου λογάρ. ὁ λογάρ. ἐςὶ τοῦ προτέρου ἀριθμοῦ, προςεθεὶς τῷ τοῦ 10 λογαρίθμῳ, τοῦ κεφαλαίου διὰ 2 διαιρεθέντος, ἤτοι

$$\frac{0,50000000 + 1}{2} = \frac{1,50000000}{2} =$$

0, 7500000. Οὗτος δ' αὖθις οὐχ ὁ 9, καὶ ὁ τούτου λογάρ. Ὥςε πάλιν ζήτησον τὸν μέσον ἀνάλογον μεταξὺ 10, καὶ 5, 6234132, καὶ τὸν τούτου λογάριθμον, καὶ οὕτω χωρῶν εἰς ζήτησιν τοῦ μέσου ἀναλόγου μεταξὺ δύω ἀριθμῶν, καὶ τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ, εἰς τὸν ζητούμενον τελευταῖον καταντήσεις, ὅς, ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ἐξαχθείσης τῆς ῥίζης, μεθ' ἑαυτὸν ἔχει μόνον τοσαῦτα μηδενικά. Ἐν τῷ ἐχομένῳ Πίνακι δείκνυται οὕτως ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ 9 σὺν τῷ ἰδίῳ λογαρίθμῳ, ἔνθα ὁ μέσος ἀριθμὸς ἑκάςου ὀρθογωνίου, ὁ προκύπτων μέσος ἀνάλογος τυγχάνει, τὰ δὲ γράμματα ἐμφαίνει, μεταξὺ τίνων ζητεῖται, καὶ ὅπως μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος μέσου, καὶ τοῦ ἑτέρου, τοῦ διδομένου, αὖθις ὁ καινὸς ζητεῖται. Ἐν τῇ β'. ςήλῃ παράκεινται οἱ λογάριθμοι τῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν.

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
α	1,0000000	0,00000000
γ	3,1622777	0,50000000
β	10,0000000	1,00000000
β	10,0000000	1,00000000
δ	5,6234132	0,75000000
γ	3,1622777	0,50000000

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
β	10,0000000	1,00000000
ε	7,4989421	0,875000000
δ	5,6234132	0,75000000
β	10,0000000	1,00000000
ζ	8,6596432	0,93750000
ε	7,4989421	0,875000000
β	10,0000000	1,00000000
η	9,3057204	0,96875000
ζ	8,6596432	0,93750000
η	9,3057204	0,96875000
ϑ	8,9768713	0,95312500
ζ	8,6596432	0,93750000
η	9,3057204	0,96875000
ι	9,1398170	0,96093750
ϑ	8,9768713	0,95312500
ι	9,1398170	0,96093750
κ	9,0579777	0,95703125
ϑ	8,9768713	0,95312500
κ	9,0579777	0,95703125
λ	9,0173333	0,95507812
ϑ	8,9768713	0,95312500
λ	9,0173333	0,95507812
μ	8,9970796	0,95410156
ϑ	8,9768713	0,95312500
λ	9,0173333	0,95507812
ν	9,0072008	0,95458984
μ	8,9970796	0,95410156

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογάριθμοι
ν	9,0072008	0,95458984
ο	9,0021388	0,95434570
μ	8,9970796	0,95410156
ο	9,0021388	0,95434570
π	8,9996088	0,95422363
μ	8,9970796	0,95410156
ο	9,0021388	0,95434570
ϙ	9,0008737	0,95428467
π	8,9996088	0,95422362
ϙ	9,0008737	0,95428467
ρ	9,0002412	0,95425415
π	8,9996088	0,95422363
ρ	9,0002412	0,95425415
σ	8,9999250	0,95421889
π	8,9996088	0·95422363
ρ	9,0002412	0,95425415
τ	9,0000831	0,95424652
σ	8,9999250	0,95423889
τ	9,0000831	0,95424652
υ	9,0000041	0,95424271
σ	8,9999250	0,95423889
υ	9,0000041	0,95424271
χ	8,9999650	0,95424080
σ	8,9999250	,95423889
υ	9,0000041	0,95424271
ψ	8,9999845	0,95424217
χ	8,9999650	0,95424080

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι ἀριθμοί.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
υ	9,0000041	0,95424271
ω	8,9999943	0,95424223
ψ	8,9999845	0,95424217
υ	9,0000041	0,95424271
a	8,9999992	0,95424247
ω	8,9999943	0,95424223
υ	9,000 041	0,95424271
b	9,0000016	0,95424259
a	9,9999992	0,95424247
b	9,0000016	0,95424259
c	9,0000004	0,95424253
a	8,9999992	0,95424247
c	9,0000004	0,95424253
d	8,9999998	0,95424250
a	8,9999992	0,94424247
c	9,0000004	0,95424253
e	9,0000000	0,95424251
d	8,9999998	0,95424250

Ἔνθα ὁ τελευταῖος μέσος ἀνάλογος, ὁ παρὰ τῷ e κείμενος, οὕτως ἐγγὺς τοῦ 9, ὥςε τὸ διάπτωμα μηδὲ δεκαμιλλιοςημορίῳ ἐξισοῦσθαι. Ὥςε δυνάμεθα τοῦτον ἀντὶ τοῦ 9 λαβεῖν. Ὁ δὲ τούτου λογάριθμος, ὁ παρ᾽ αὐτῷ ἀριθμός. 0,95424251. Προὐχώρησαν δὲ οἱ Λογάριθμοι μέχρι τῶν 8 δεκαδικῶν, ἐπειδὴ τελευταῖον οἱ λογάριθμοι ἐν τοῖς πρώτοις ἑπτὰ δεκαδικοῖς ἴσοι ἀλλήλοις γίνεσθαι ἄρχονται.

Οὕτως ἐργώδει τῷ τρόπῳ ὑπελογίσθησαν οἱ λογάριθμοι πλειόνων ἀριθμῶν, ἀλλ᾽ οὐ πάντων. Ἀναγκαῖον

ναγκαῖον γὰρ ἦν μόνον τοὺς λογαρίθμους τῶν ὁλοσχερῶν εὑρεῖν, τῶν εἰς παράγοντας κατατμηθῆναι μὴ δυναμένων, καὶ διὰ τοῦτο Πρώτων Ἀριθμῶν καλουμένων. (§. 105.) π. χ. 2, 5, 7, 11, 13, 17, 19, κτ. Καὶ τούτων γὰρ μέγα τὸ πλῆθος μέχρι τῶν 10000 ἀριθμοῦσιν. Οἱ δὲ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν λογάρ. διαφόροις ἂν εὑρεθεῖεν τοῖς τρόποις, τουτ. διὰ Προσθέσεως, Ἀφαιρ. καὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν εὑρεθέντων λογαρίθμων. Ἐπειδὴ γὰρ Δυνάμεις πολλαπλασιάζειν ἐςὶ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προςιθέναι, δοθέντων τῶν λογαρ. διαφόρων πρώτων ἀριθμῶν, ὁ εἰδέναι βουλόμενος, τίς τῶν λογαρίθμων τῷ ἐκ τούτων προσήκει παραγομένῳ, προςιθέτω μόνον τοὺς λογαρίθμους. ὅτι ἐν τούτῳ τῷ λογαριθμικῷ Συςήματι ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ δυνάμεις εἰσὶ τοῦ 10. π. χ. 3 . 5 = 15. Προςεθέντος τοῦ λογαρ. τοῦ 5 τῷ τοῦ 3 λογαρ. προκύψει ὁ τοῦ 15 λογάριθμος. Κατὰ τοὺς ἐκδεδομένους Πίνακας

	λογ. 5	=	0,6989700
	λογ. 3	=	0,4771212
Ὥςε	λογ. 15	=	1,1760912

Καὶ ἐὰν τούτῳ ἔτι καὶ τὸν λογ. ἑτέρου ἀριθμοῦ προσθῶμεν, ἕξομεν τὸν λογάρ. τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν οὗτος (ὁ ἕτ. ἀρ.) τῷ 15 πολλαπλασιασθεὶς παράξει. π. χ. 9 . 15 = 135.

Ὥςε τῷ λογ. τοῦ	15	=	1,1760912
προςεθεὶς ὁ λογ. τοῦ	9	=	0,9542425
δίδωσι τὸν λογ. τοῦ	135	=	2,1303337

Ἀλλὰ καὶ δι' Ἀφαιρέσεως εὑρεῖν αὐτοὺς ἔχομεν, δεδομένων τινῶν. Ὁμοειδεῖς γὰρ Δυνάμεις διαιρεῖν ἐςὶ τοὺς αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖν ἐκθέτας. (§. 194.) π. χ.

π. χ. λ. 10 = 1,0000000. Δοθέντος οὖν καὶ τοῦ λογ. 5 = ,6989700, εἴη ἂν ὁ λογ. $\frac{10}{5}$, ἢ λογ. 2 = τῷ λ. 10 — λ. 5. ἤτοι

$$\begin{array}{lll} \lambda.\ 10 & = & 1,0000000 \\ \lambda.\ 5 & = & 0,6989700 \quad \text{ἀφαιρ.} \\ \hline \lambda.\ 2 & = & 0,3010300 \end{array}$$

Ὡσαύτως καὶ διὰ Πολλαπλασιασμοῦ. Δυνάμεις γὰρ εἰς καινὰς αἴρειν δυνάμεις ἐστι πολλαπλασιάζειν αὐτὰς τῷ ἀριθμῷ τῷ ἐμφαίνοντι, εἰς ἡλίκην δύναμιν αὐτὰς ἐξαρθῆναι δέοι. Τούτου δὲ γεγονότος μόνον διὰ τῶν λογαρίθμων, ἕξομεν τὸν λογάριθμον τῆς Δυνάμεως. π. χ.

$$9 \cdot 9 = 9^2 = 81. \quad \text{Ἔστι δὲ}$$

$$\begin{array}{rl} \text{ὁ } \lambda.\ 9 = & 0,9542425 \\ \text{πολλαπλ. μετὰ} & 2 \\ \hline \text{δίδωσι } \lambda.\ 81 = & 1,9084850. \end{array}$$

Οὕτω καὶ ὁ λογάρ. τοῦ 9 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν 3, δώσει τὸν λογάρ. τοῦ 9^3 = 729. Ὅς ἐσται

$$\begin{array}{rl} \lambda.\ 9 = & 0,9542425 \\ & 3 \\ \hline = & 2,8627275 = \lambda.\ 729. \end{array}$$

§. 318. Οἱ λογάριθμοι τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ μετὰ τοῦ 10, ἢ μετὰ δυνάμεων τοῦ 10 πολλαπλασιασθέντος, μένουσιν οἱ αὐτοὶ τοῖς, οἳ τῷ ἀριθμῷ ἐνυπῆρχον, εἰ μὴ ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν μεταβάλλεται, καὶ μονάδι, ἢ τοσαύταις μονάσι προσαύξει, ὅσας ὁ ἐκθέτης τῶν τοῦ 10 δυνάμεων, μεθ' ὧν ἐπολλαπλασιάσθη, μονάδας περιέχει. ὅπερ οὐ δυσκατανόητον

τον τῷ διανοουμένῳ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν εἰς πρόσθεσιν μεταβάλλεσθαι, καὶ τὰς τοῦ 10 δυνάμεις μόνον 1, 2, 3, 4, 5, κτ. ἤτοι μόνον ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν ἄνευ παρηρτημένου κλάσματος λογάριθμον, ἔχειν. Οὕτω π. χ. λ. 20 = λ. 2 + λ. 10 = 0,3010300 + 1 = 1,3010300. Ὅτι 20 = 2 . 10. Καὶ λ. 200 = λ. 2 + 100 = 0,3010300 + 2 = 2,30103000. Ὅτι 200 = 2 . 100, κτ. Παραπλησίως λ. 810 = λ. 81 + λ. 10 = 1,9084850 + 1 = 2,9084850. Ὅτι 810 = 81 . 10, κτ.

Ὡσαύτως καὶ ἑκάστη ποσότης, ἡ διὰ τῶν δυνάμεων τοῦ 10 διαιρουμένη, τὸν αὐτὸν τηρεῖ λογάριθμον, πλὴν ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτῆς τοσαύταις μονάσι μειοῦται, ὅσαις ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ 10 μεμείωται. ὡς λ. 2700 = 3,4313638. Ὥστε λ. 270 = λ. 2700 — λ. 10 = 3,4313638 — 1 = 2,4313638. καὶ λ. 27 = λ. 2700 — λ. 100 = 3,4313638 — 2 = 1,4313638. καὶ λ. 2,7. = λ. 27 — λ. 10 = 1,4313638 — 1 = 0,4313638, κτ.

§. 319. Ἐκ τούτων οὖν πᾶς τις ἐπιγνοίη. ὅτι ἐπὶ λογαριθμικῶν ὑπολογισμῶν πᾶς Πολλαπλασιασμὸς μεταβάλλεται εἰς Πρόσθεσιν, ἡ Διαίρεσις εἰς Ἀφαίρεσιν, ἡ εἰς Δυνάμεις ἔξαρσις εἰς Πολλαπλασιασμόν. (§. 317.) παραπλησίως καὶ ἡ τῶν Ῥιζῶν ἐξαγωγὴ εἰς Διαίρεσιν τῶν Λογαρίθμων. ἤπου γὰρ οἴδαμεν, Δυνάμεις διὰ Ῥιζικῶν διαιρεῖν Ἐκθετῶν τὴν ῥίζαν ἐστὶν ἐξάγειν. π. χ. ὁ τοῦ 49 λογ. = 1,690 961. Ἄρα ὁ λογ. $\sqrt[2]{49}$ = λ. $49^{\frac{1}{2}}$ = λ. $\frac{49}{2}$. ἢ

1,690.

$\frac{1,6901961}{2} = 0,8450980$. Καὶ οὗτός ἐστιν ὁ λογ. $\sqrt{49}$. Οὗ ἐν τοῖς Πίναξι ζητηθέντος, περὶ ὧν μετὰ ταῦτα ἔσται λόγος, εὑρήσομεν τὸν τούτῳ προσήκοντα ἀριθμὸν εἶναι τὸν $7 = \sqrt{49}$. Ὡσαύτως

$$\lambda.\ \sqrt[4]{256} = \lambda.\ \frac{256}{4} = \frac{2,4082400}{4} =$$

$$0,6020600 = \lambda.\ 4.\ \text{ὅς}\ (4) = \sqrt[4]{256}.$$

§. 320. Πρὶν ἢ περὶ τῶν διαφόρων ὑπολογισμῶν διὰ τῶν λογαρίθμων εἰπεῖν τὰ κατὰ σκοπὸν τῆσδε τῆς βίβλου, δεικτέα πρῶτον ἡ τάξις, καὶ χρῆσις τῶν ἐν χρήσει λογαριθμικῶν Πινάκων. Ἐνρῖκος Βρίγγιος ὑπελογίστευσε τῷ εἰρημένῳ τρόπῳ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 20000 καὶ ἀπὸ 90000 μέχρι τῶν 100000. Ὀλλανδός δέτις, Ἀδριανὸς Φλάκκος μετὰ τοῦτον, ἐξηριθμήσατο τοὺς τῶν ἀριθμῶν λογαρίθμους ἀπὸ τῶν 20000, μέχρι τῶν 90000, ἐκδοὺς αὐτούς, ἐν 1628, ὥστε προκύψαι τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 100000. Μετὰ ταῦτα καὶ ἑτέρα τις ἐφάνη Ἔκδοσις, περιέχουσα καὶ τοὺς Βριγγιανούς, καὶ Φλακκιανοὺς λογαρίθμους ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 101000, ἐν 1742. Εἰσὶ μέντοι καὶ ἕτεραι ἐκδόσεις, ὧν αἱ μᾶλλον εὐπόριστοι αἱ ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 10000 χωροῦσαι, οὕτω τάξεως ἔχουσαι. Ἐν ἀρχῇ πρόκεινται οἱ πίνακες τῶν Ἡμιτόνων, Ἀπτομένων, καὶ Τεμνουσῶν μετὰ τῶν οἰκείων Λογαρίθμων, περὶ ὧν ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ. Τούτοις δ' ἕπονται οἱ τῶν λογαρίθμων πίνακες ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 10000, ὧν ἐπὶ μὲν τῆς ἑτέρας στήλης οἱ χαρακτῆρες, ἐπὶ δὲ τῆς ἀντιστοιχούσης οἱ τούτων λογάριθμοι μετὰ τοῦ οἰκείου παράκειται Χαρακτηριστικοῦ, (§. 315.) εἰς ἑπτὰ δεκαδικὰ προαγόμενοι κλάσματα. Τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν ἀπὸ μὲν 1 μέχρι

τῶν

τῶν 9 = 0. ἀπὸ δὲ τοῦ 10 μέχρι τοῦ 99 = 1. ἀπὸ δὲ τοῦ 100 μέχρι τοῦ 999 = 2, καὶ οὕτως ἑφεξῆς. Ἐν γένει γὰρ, τῆς τοῦ 10 δυνάμεως 1 αὐξομένης, μονάδι κἀκεῖνο (τὸ χαρ.) προσαύξεται. Δῆλον δ' ἐκ τούτου, ὅτι τὸν ἀριθμὸν εἰδότες, (ᾧ τὸ χαρ: προσήκει) ἅμα καὶ ὅσαι μονάδες τῷ τούτου χαρακτηριστικῷ ἔνεισι γινώσκομεν. Γνωστὸν γὰρ, μεταξὺ τίνων ὁλοσχερῶν δυνάμεων τοῦ 10 ὁ ἀριθμὸς ἐμπίπτει. καὶ ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν παντὸς ἀριθμοῦ μονάδι ἐλαττοῦται τῆς πληθύος τῶν χαρακτήρων, οὓς ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου περιείληφε. π. χ. ἅπαντες οἱ μεταξὺ 100 καὶ 1000 ἀριθμοὶ ἐκ τριῶν σύγκεινται χαρακτήρων, ὧν τὸ χαρακτηριστικὸν μονάδι ἔλαττον, τουτ: = 2. Τὸ δὲ τῶν μεταξὺ 1000 καὶ 10000 ἀριθμῶν, τῶν ἐκ δ'. χαρακτήρων συγκροτουμένων = 3, κτ. Δυνατὸν οὖν τὸ χαρακτηριστικὸν παραλείπειν, ὡς ἐν τοῖς μείζοσιν ἐγένετο πίναξι. Τὸν λογάριθμον τοίνυν ἀριθμοῦ τινος βουλόμενος εὑρεῖν, ζήτησον ἐν τοῖς πίναξι τὸν ἀριθμὸν, καὶ ὄψει καὶ τὸν ἴδιον λογάριθμον αὐτῷ ἀντιστοιχοῦντα. Τοῦ λογαρίθμου δὲ δοθέντος, ζήτησον αὐτὸν αὐτόθι, ὃν αὐτίκα εὑρήσεις, τὸ χαρακτηριστικὸν εἰδὼς, καὶ παρ' αὐτῷ ἐν τῇ ἐγγὺς στήλῃ κεῖται ὁ ἀριθμὸς, ὁ τούτῳ προσανήκων. Ἐὰν δὲ δοθῇ λογάριθμος ἐν τοῖς πίναξιν ἐπ' ἀκριβὲς μὴ περιεχόμενος, ἀλλὰ μόνον 4 τυχὸν, ἢ 5 τῶν πρώτων χαρακτήρων αὐτοῦ τῷ ἐν τοῖς πίναξι λογαρίθμῳ συνάδωσιν, ὁ ἀριθμὸς (ᾧ ὁ λογ. ἀνήκει) μείζων, ἢ ἐλάττων δεκαδικοῖς τισι κλάσμασι τυγχάνει τοῦ ἐν τῷ πίνακι ἀριθμοῦ. Ὅσῳ οὖν μᾶλλον οἱ ἀριθμοὶ τῶν λογαρίθμων ἀλλήλοις συνᾴδουσι, τοσούτῳ ἐλάττων ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν, οἷς ἐκεῖνοι (οἱ λογ.) ἀνήκουσιν, ἧς ἐν οὐκ ὀλίγοις ὑπολογισμοῖς παραμελεῖν εἰώθασι.

§. 321. Ἐπεὶ δὲ ἡμῖν ἐνταῦθα ὁ λόγος ἐξαιρέτως

ρέτως περὶ τῶν ἐλασσόνων λογαριθμικῶν πινάκων, τούτοις μάλιϛα καὶ χρησόμεθα, τούτοις ἁρμόζοντα παραδείγματα μεταχειριζόμενοι. (εἰ καὶ τὸ ἐνταῦθα λεγόμενον καὶ τοῖς μείζοσι προσανήκει) Καὶ ὅπως μὲν ὁ λογάριθμος τοῦ ὁλοσχεροῦς, ἀριθμοῦ, ὁ τοῖς πίναξιν ἐνυπάρχων εὑρίσκεται, εἴρηται ἤδη. (§. ἀνωτ.) Ὅτι δὲ καὶ δύω, ἢ πλειόνων ἀριθμῶν δι' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῆναι προκειμένων, διὰ τῆς προσθέσεως τῶν κατὰ τούτους λογαρίθμων, ὡς κεφάλαιον λογάριθμος προκύψει, τῷ παραγομένῳ ἐκ τούτων ἀντιϛοιχῶν, προηγουμένως δῆλον. Ἀλλὰ θεωρηθήτω ἀκριβέϛερον. π. χ. 136 . 24 . 2 λογαριθμικῶς = λ. 136 + λ. 24 + λ. 2.

Ἔνθεντα	λ.	136	=	2,1335389	
	λ.	24	=	1,3802112	
	λ.	2	=	0,3010300	προς.

ἄρα λ. 136 . 24 . 2 = 3,8147801

Ὃς τῷ ἀριθμῷ 6528 ἀντιϛοιχεῖ = 136. 24 . 2 ὄντι. Τὰ αὐτὰ τελεῖται καὶ ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως, παρ' ὅσον ἐν ταύτῃ οἱ λογάριθμοι ἀφαιροῦνται ἀπ' ἀλλήλων, τῆς τούτων διαφορᾶς ἐν τοῖς πίναξι τῷ πηλίκῳ ἀντιϛοιχούσης. Οἷον, 8815 διαιρεθεὶς διὰ 1763 ἔσται λογαριθμικῶς. λ. 8815 — λ. 1763.

ἤτοι	λ.	8815	=	3,9452223	
	λ.	1763	=	3,2462523	ἀφαιρ.

ἄρα λ. 8815 — λ. 1763 = 0,6989700

Ὃν τῷ ἀριθμῷ 5 ἀντιϛοιχοῦντα εὑρήσομεν = $\frac{8815}{1763}$.

Εἰ

Εἰ δ' ἐναντίως ἐχούσας ποσότητας πολλαπλασιάσαι, ἢ διελεῖν δέοι, ὁπότερον τῶν σημείων (§. 77. καν.) τῷ παραγομένῳ, ἢ τῷ πηλίκῳ ἁρμόζει, ἐπιστάμενοι, ὑπολογιστόμεθα τοὺς λογαρίθμους, ὡσπερεὶ αἱ ποσότητες καταφατικαὶ εἶεν, καὶ τὸν ἀριθμὸν ζητήσαντες τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου τὸ προσῆκον σημεῖον τῷ εὑρεθέντι ἀριθμῷ ἀποδώσομεν.

Εἰς δυνάμεις δ' ἐξαίρονται λογαριθμικῶς αἱ ποσότητες, καὶ αἱ ῥίζαι λογαριθμικῶς ἐξάγονται, κατὰ τὰ ἐν §. §. 319. κτ. Ἀλλ' ἐπὶ τούτου σημειωτέον ἔτι τινά. Ἐὰν ἡ ῥίζα τῆς ποσότητος μὴ ὁλοσχερὴς ᾖ, οὐδὲ τῷ εὑρεθέντι λογαρίθμῳ ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς ἀντιστοιχήσει. Ληφθείς οὖν τις τῶν λογαρίθμων τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν, τῶν τῷ εὑρεθέντι ὡς ἔγγιστα γινομένων, εἴη ἂν οὗτος (ὁ ληφθεὶς λογ.) νῦν μὲν μεγίστῃ διαφορᾷ πάνυ βραχὺς, νῦν δὲ πάνυ μέγας. Ἄριστα τοίνυν ποιήσεις ζητῶν τινὰ τῶν λογαρίθμων τῶν μειζόνων ἀριθμῶν, τῶν ἐν τοῖς πίναξι, τὸν ἐκείνῳ ἴσον. (τῷ α'. εὑρεθέντι λογ.) Τούτου δὲ μὴ εὑρισκομένου, ἑτερόντινα τὸν ἐγγύτατον, μηδένα λόγον τοῦ χαρακτηριστικοῦ ποιούμενος. Καὶ τούτου κειμένου, διάστειλον τοῦ ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμοῦ (ὅς τῷ ἤδη εὑρεθέντι λογαρίθμῳ ἀνήκει) τοσούτους χαρακτῆρας δεξιόθεν ἀρχόμενος, εἰς δεκαδικὰ ποιῶν αὐτοὺς κλάσματα, ὅσαις μονάσι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ἐν ἀρχῇ λογαρίθμου ἐλαττοῦται, καὶ οὕτως ἔσται ἡ ῥίζα ἀκριβεστέρα. π. χ. $\sqrt[3]{1648}$ λογαριθμικῶς $= \lambda. \frac{1648}{3} = \frac{3,2169572}{3}$ $= 1,0723190$. Οὗτος ὁ λογάριθμος ζητηθεὶς οὐχ εὑρίσκεται ἀκριβῶς παρὰ τοῖς ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς, ὧν ἡ 1 τὸ χαρακτηριστικόν. Ὁ ἐγγύτατος εἴη ἂν ὁ τοῦ 12 λογάρ. ὅς 1,0791812 τυγχάνει. Ἀλλὰ 12 πάνυ μέγας. ὅτι ὁ γ. χαρακτὴρ τοῦ κατ' αὐτὸν λογαρίθμου μείζων, ἢ ὁ γ. τοῦ εὑρεθέντος. Ζητηθήτω

οὖν

οὖν ἐν τοῖς μείζοσιν ἀριθμοῖς, τοῦ χαρακτηριςικοῦ παπαραμελοῦσιν. ὁ τοῦ 1181 λογάρ. (πλὴν τοῦ χαρακτηριςικοῦ) = 0722499. ὁ δὲ τοῦ 1182 = 0726175. Ὁ β΄. τούτων (τῶν λογ.) ἐςὶ μείζων, (τοῦ εὑρεθέντος) ὁ δὲ α΄. ἐλάσσων. Ἀλλὰ ληφθήτω ὁ α΄. Τὸ χαρακτηριςικὸν τοῦ καταρχὰς λογ. ἦν ἡ 1, τὸ δὲ τοῦ ἤδη ληφθέντος 3. Ὥςε ἡ τούτων διαφορὰ 2. Ἀναγκαῖον ἄρα δύω χαρακτῆρας τοῦ ἀριθμοῦ διαςεῖλαι, τοῦ τῷ ληφθέντι λογαρίθμῳ ἀνήκοντος, δεκαδικὰ αὐτοὺς ποιοῦντας, καὶ ἀντὶ 1181 γράψαι 11,81. Εἰδ᾽ ὁ β΄. παρείληπτο λογάριθμος, ἐγράψαμεν ἂν 11,82. Τὸ τοίνυν διάπτωμα κεῖται μεταξὺ τῶν δύω ἀριθμῶν, οὐδὲ $\frac{1}{100}$ ἐξισούμενον. τουτ: ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 1648 ἐλάσσων τοῦ 11,82, καὶ μείζων τοῦ 11,81 τυγχάνει. Ὁ δὲ τοὺς μείζους τῶν πινάκων κεκτημένος εὑρήσει ταύτην ἔτι ἀκριβέςερον.

Ζητουμένων δὲ τῶν λογαρίθμων τῶν γνησίων κλασμάτων, λαβὼν τὸν λογάρ. τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ παρονομαςοῦ ἐκ τῶν πινάκων, (ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος μὴ μείζους ὦσι τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμῶν, περὶ οὗ κατωτέρω) ἄφελε τὸν τοῦ παρον. λογάρ. ἀπὸ τοῦ λογ. τοῦ ἀριθμητοῦ. Ἐπεὶ δὲ ὁ παρονομ. τοῦ γνησίου κλάσματος μείζων ἀεὶ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἐξ ἀνάγκης καὶ ἡ τῶν λογαρ. διαφορὰ ἔςαι ἀποφατική. Ἔνθεν τοι τὴν ἀφαίρεσιν ἀνάπαλιν ποιησάμενος, θὲς πρὸ τῆς διαφορᾶς, ὅς ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τυγχάνει, τὸ —. Ὥςε ἅπαντες οἱ τῶν γνησίων κλασμάτων λογάρ. εἴτε τῶν κοινῶν εἶεν τὰ κλάσματα, εἴτε τῶν δεκαδικῶν, ἀποφατικοὶ τυγχάνουσι. Τὰ αὐτὰ γίνεται καὶ ἐπὶ τῶν Δεκαδικῶν τουτ. ὑποτεθέντος τούτοις τοῦ προσήκοντος παρονομαςοῦ, οὗ ὁ λογάρ. (ὡς τῶν παρον. δυνάμεων τοῦ 10 ὄντων) ἀεὶ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, ἡ ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀφαίρεσις, ὡς ἤδη λέλεκται, τελείσθω. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὸ

χαρα-

χαρακτηρισικὸν τῶν κλασματικῶν λογαρίθμων, τῶν μεταξὺ 1 καὶ 0, 1 παρεμπιπτόντων = 0, τῶν δὲ μεταξὺ 0, 1 καὶ 0, 01 = — 1, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ἡ ἐχομένη πρόοδος ἐμφαίνει.

	0, 0001	0, 001	0, 01	0, 1	
Χαρακτηρισικὸν	— 4,	— 3,	— 2,	— 1,	
	1,	10,	100,	1000,	10000
Χαρακτηρισικὸν	0,	1,	2,	3,	4.

Παραδείγματα.

$$\lambda.\ \tfrac{3}{4} = \lambda.\ 3 - \lambda.\ 4$$

$$\lambda.\ 3 = 0,4771212$$

$$\lambda.\ 4 = 0,6020600$$

$$\text{ἄρα}\quad \lambda.\ \tfrac{3}{4} = -\ 0,1249388$$

Ὁ λ. 0,0532 =

$$\lambda.\ \tfrac{532}{10000} = \lambda.\ 532 - \lambda.\ 10000.$$

$$\text{Ὥστε}\quad \lambda.\ 532 = 2,7259116$$

$$\lambda.\ 10000 = 4,0000000$$

$$-\ 1,2740884\ .$$

Καὶ ζητηθέντων τῶνδε τῶν λογαρίθμων ἐν τοῖς τῶν μειζόνων ἀριθμῶν λογαρίθμοις, εὑρίσκεται ὁ τοῦ α΄. (λογ.) ἐγγύτατος ἀριθμὸς, ᾧ μάλισα ἐκεῖνος συνᾴδει, 1333, καὶ τοῦ σημείου — παροραθέντος, εἴη ἂν ὁ ἀριθμὸς (ὅτι ἐπὶ τοῦ προκειμένου λογαρ. τὸ χαρακτηρισικὸν = 0) = 1, 333. Ἐπεὶ δὲ τὸ ἀποφατικὸν πρόκειται σημεῖον, ἔσιν ὁ ἀριθμὸς = $\frac{1}{1,333}$. Ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου λογαρίθμου, ᾧ σχεδὸν ὁ ἀριθμὸς 1880 ἐν τοῖς μεγίσοις λογαρίθμοις ἀντιπαράκειται. Καὶ τοῦ μὲν χαρακτηρισικοῦ + 1 ὄντος, εἴη

εἴη ἂν ὁ ἀριθμὸς 18,8 . . Ἐπεὶ δὲ — 1, (τὸ χαρακτ:) ἐςὶν $\frac{1}{18,8}$. Εἰς δεκαδικὸν δὲ κλάσμα γεγονότων ἀμφοῖν τῶν κλασμάτων, αὐτίκα εὑρήσομεν, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ α΄. τὸ πηλίκον 0,75 = $\frac{3}{4}$, ἐπὶ δὲ τοῦ β΄. 0,0532 προκύψει. Καὶ γὰρ $\frac{1}{1,333} = \frac{1000}{1333}$ = 0,750 . . Καὶ $\frac{1}{18,8} = \frac{10}{188}$ = 0,05319 . . σχεδὸν = 0,0532. Ὁ δὲ λόγος, δι᾽ ὅν οὐκ ἀκριβῶς ἴσον, ὅτι οἱ λογάριθμοι οὐκ ἀκριβῶς ἥρμοζον, περὶ οὗ κατωτέρω.

Τὸ δὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦ τοιούτου λογαρίθμου, οὗ τὸ — πρόκειται, κλάσμα εἶναι, οὗ ἀριθμητὴς ἡ 1, παρονομαςὴς δὲ ὁ τῷ λογαρίθμῳ ἐν τοῖς πίναξι προσήκων ἀριθμὸς, καὶ μάλα σαφῶς κατανοεῖται τῷ διανοουμένῳ τοὺς λογαρίθμους ἐκθέτας εἶναι τῶν δυνάμεων. καὶ ὅτι (§. 198.) $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$. καὶ $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$. ἢ $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$, ὅπερ τὸ ῥηθὲν διαλευκαίνει. Ἐὰν οὖν ζητῶνται οἱ λογάριθμοι τῶν κλασμάτων, τῶν τὴν 1 ἀριθμητὴν ἐχόντων, ληφθήτω μόνον ἐκ τῶν πινάκων ὁ τοῦ παρονομαςοῦ λογάριθμος, καὶ τούτου τὸ — προτεθήτω, καὶ οὗτος ἔςαι ὁ λογάρ. τοῦ τοιούτου κλάσματος. Ὡς λ. $\frac{1}{16}$ = — 1, 2041200. Ἔςι γὰρ = λ. 1 — 16. Ἀλλὰ λ. 1 = 0. Ἔςιν ἄρα = — λ. 16 = — 1, 2041200.

§. 322. Ὥςε δὲ καὶ τοὺς λογαρ. τῶν νόθων εὑρεῖν κλασμάτων, μεταχειριζόμεθα ταῦτα ὡς ἐνεργεία διαιρέσεως παραδείγματα, εἰ τούτων κατὰ τὰ (§. ἀνωτ.) ὁ λογάριθμος ζητεῖται. Οὗτος δ᾽ ἀείποτε καταφατικὸς, ὡς ἐπὶ τῶν τοιούτων κλ. τοῦ ἀριθ-

ἀριθμητοῦ μείζονος ὄντος τοῦ παρονομαςοῦ. Ἔνθέντοι καὶ ῥάδιον ἔςαι λογαρίθμους εὑρεῖν ὁλοσχερῶν, οἷς καὶ κλάσματα πρόσκεινται· ὅτι ῥαδίως εἰς νόθα μεταφέρονται κλάσματα.

Π. χ. λ. $3\frac{5}{8}$ = λ. $\frac{29}{8}$ = λ. 29 — λ. 8. Ἀλλὰ

λ. 29 = 1,4623980
ἀφαιρ. λ. 8 = 0,9030900

ἄρα λ. $\frac{29}{8}$ = λ. $3\frac{5}{8}$ = 0,5593080

Ζητηθέντος οὖν τούτου ἐν τοῖς πίναξι τρόπῳ τῷ ῥηθέντι, εὑρήσομεν τούτῳ παρακείμενον τὸν ἀριθμὸν, 3, 625, ὅπερ ἔςαι καὶ $\frac{29}{8}$, ἢ $3\frac{5}{8}$, εἰς δεκαδικὸν μεταποιηθὲν κλάσμα. Ἐὰν δέ τινι ἀριθμῷ καὶ δεκαδικὰ προσκέινται κλάσματα, μεταβάλλεται πᾶσα ἡ ποσότης εἰς νόθον κλάσμα, ὅπερ γίνεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μετὰ δυνάμεων τοῦ 10, παρονομαςὴν λαμβάνον τοιοῦτον, οἷα ἡ, δι᾽ ἧς ἐπολλαπλασιάσθη, τοῦ 10 δύναμις. Τὰ λοιπὰ δὲ γίνεται τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ τῆς διαιρέτεως παραδείγματος, οὗ ὁ λογάρ. ζητεῖται. Καὶ οὗτος ἔςαι ὡσαύτως καταφατικός. Ἐνταῦθα λόγος ἐςὶν ἔτι περὶ ποσοτήτων, ὧν οἱ ἀριθμοὶ τοῖς πίναξιν ἔνεισι. π. χ. λ. 2,545 = λ. 2, $\frac{545}{1000}$ = λ. $\frac{2545}{1000}$ = λ. 2545 — λ. 1000.

λ. 2545 = 3,4056878
λ. 1000 = 3,0000000 ἀφαιρ.

0,4056878 = λ. $\frac{2545}{1000}$ = λ. 2,545, ᾧ ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 2, 545 ἀντιςοιχεῖ.

§. 323. Μετὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς εὑρέσεως τῶν λογαρίθμων ἑκάςου εἴδους κλασμάτων, ῥάδιον ἔςαι

μετὰ