$$
\begin{array}{lllll}
\text{Καὶ} & 1 + \sqrt{2} & & & \\
 & 1 + \sqrt{2} & & & \\
\hline
 & & +1\sqrt{2} + 2 & & \\
 & 1 + 1\sqrt{2} & & & \\
\hline
 & 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}. & & &
\end{array}
$$

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Ῥιζικῶν Ποσοτήτων.

§. 303. Ἀρξώμεθα ὡσαύτως ἀπὸ τῶν εὐχερεστάτων. Ἔστωσαν ὁ Διαιρετέος, καὶ ὁ Διαιρέτης τῶν μονομερῶν, ἢ ἁπλῶν ποσοτήτων, καὶ ἤτοι ὁ Διαιρέτης, ἢ ὁ Διαιρετέος Ἄλογος, ὁ δ' ἕτερος Λογικὸς, ἢ ἄμφω Ἄλογοι.

Ἐὰν ὁ Διαιρετέος Ἄλογος ᾖ, ὡς $\sqrt{\frac{21}{7}}$, ἀναγκαῖον ἄμφω τὰς ποσότητας ὑπὸ τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν θεῖναι σημεῖον, ὅπερ κατὰ τὸ (§. 295.) ῥαδίως ἐκπερανθήσεται, καὶ τηνικαῦτα εὐχερῶς τὴν διαίρεσιν τελέσομεν, τῶν ποσοτήτων εἰς παράγοντας ἀνατεμνομένων, εἰ ἄλλως αὗται διαιρέσιμοι, ἢ καὶ ἐνεργείᾳ ταύτας διαιρεῖν, καὶ μὴ μόνον τοῖς σημείοις δεικνύναι βουλόμενοι, ἐν ᾧ καὶ τὰ περὶ τοῦ +, καὶ — καλῶς ἐν νῷ καθέξομεν. π. χ. $\sqrt{\frac{21}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 7}}{\sqrt{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$. Καὶ $\frac{\sqrt[3]{24}}{6} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{\sqrt[3]{4.6}}{\sqrt[3]{6.6.6}} = \sqrt[3]{\frac{4}{6.6}} = \sqrt[3]{\frac{4}{36}} = \sqrt[3]{\frac{4}{4 \cdot 9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Ἐὰν

Ἐὰν δ' ὁ Διαιρέτης ἄλογος τυγχάνῃ, γίνεται τὰ αὐτά. Οἷον $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}}$· ἢ καὶ $= 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Καὶ $-\frac{4}{2\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{2^2 \cdot 8}} = -\sqrt{\frac{16}{32}} = -\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{2 \cdot 16}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Αὖθις $\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2 \cdot 6}} = \sqrt{\frac{9}{24}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 8}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Τοῦ Διαιρέτου, καὶ Διαιρετέου, ἀμφοῖν ἀλόγων ὄντων, αἱ ῥίζαι, ἤτοι τοὺς αὐτοὺς, ἢ οὐχὶ, ἐκθέτας ἔχουσι. Κἀκείνως μὲν, τῇ τῶν ποσοτήτων διατομῇ εἰς τοὺς αὐτῶν παράγοντας, εἰσόμεθα, πότερον ἡ ποσότης διαιρέσιμος, ἢ μή. Ὅτε καὶ τὸν Διαιρέτην, ἢ Διαιρετέον, ἤπερ ἂν τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀπαιτοίη, τῆς αὐτοῦ ἀλογίας ἔχοιμεν ἂν ἀπαλλάξασθαι. (§. 297.) Οὕτω δὲ, μεταβληθήσονται οὕτως, ὥστε ἀμφοῖν τοὺς αὐτοὺς ἐνυπάρχειν Ἐκθέτας, καὶ εἶτα, ὡς ἐν τοῖς προηγηθεῖσι δέδεικται, αὐτοὺς διαιρήσομεν. Ἔστω διαιρετέον $\sqrt{6}$ διὰ $\sqrt{8}$, ἤτοι $\sqrt{\frac{6}{8}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Αὖθις $\sqrt{\frac{(\gamma^4 \delta^2)}{\gamma^2 \delta}} = \sqrt{\frac{(\gamma^2 \gamma^2 \delta \delta)}{\gamma^2 \delta}} = \sqrt{\frac{(\gamma^2 \delta)}{1}} = \sqrt{(\gamma^2 \delta)} = \gamma \sqrt{\delta}$, ὃ τὸ πηλίκον τυγχάνει.

Εἰ πρόκειται διαιρεθῆναι $\sqrt[6]{24}$ διὰ τοῦ $\sqrt{6}$ ἤτο ἤτοι $\frac{{}^6\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$, ἔσται $= \frac{24^{\frac{1}{6}}}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{24^{\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{2}}}{6^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}} =$

$\frac{24^{\frac{2}{6}}}{6^{\frac{3}{6}}} = {}^6\sqrt{\frac{24^2}{6^3}} = {}^6\sqrt{\frac{24.24}{6.6.6}} = {}^6\sqrt{\frac{4.4}{6}}$

$= {}^6\sqrt{\frac{2.2.4}{2.3}} = {}^6\sqrt{\frac{2.4}{3}} = {}^6\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Αὖθις $\frac{\sqrt{48}}{{}^4\sqrt{12}} = \frac{48^{\frac{1}{2}}}{12^{\frac{1}{4}}} = \frac{48^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4}}}{12^{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}}} = \frac{48^{\frac{4}{8}}}{12^{\frac{2}{8}}}$ ἢ

ἄμεινον $= \frac{48^{\frac{2}{4}}}{12^{\frac{1}{4}}} = {}^4\sqrt{\frac{48^2}{12}} = {}^4\sqrt{\frac{48.48}{12}} =$

${}^4\sqrt{192} = {}^4\sqrt{16.3.4} = 2\,{}^4\sqrt{12}$. Καὶ τοῦτό ἐστι τὸ πηλίκον τὸ ζητούμενον τοῦ $\frac{\sqrt{48}}{{}^4\sqrt{12}}$. Ὡσαύτως

$$\frac{{}^3\sqrt{\gamma\delta}}{{}^2\sqrt{\gamma\delta}} = \frac{(\gamma\delta)^{\frac{1}{3}}}{(\gamma\delta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\gamma\delta)^{\frac{2}{6}}}{(\gamma\delta)^{\frac{3}{6}}} =$$

$${}^6\sqrt{\frac{(\gamma\delta)^2}{(\gamma\delta)^3}} = {}^6\sqrt{\frac{\gamma^2\delta^2}{\gamma^3\delta^3}}.\ \text{ἢ} = {}^6\sqrt{\frac{\gamma\gamma\delta\delta}{\gamma\gamma\gamma\delta\delta\delta}}$$

$$= {}^6\sqrt{\frac{1}{\gamma\delta}} = \frac{1}{{}^6\sqrt{\gamma\delta}}.$$

Ἡ *βάσανος* τῆς Διαιρέσεως τῶν ἀλόγων ποσοτήτων γίνεται, ἐὰν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον ἐπὶ τὸν Διαιρέτην πολλαπλασιασθῇ, δι' οὗ ὁ Διαιρετέος προκύπτει, ἔνθα καὶ ταῖς ῥηθείσαις μεταβολαῖς ἐνίοτε χρηστέον.

§. 304. Τὴν τῶν μονομερῶν ἀλόγων ποσοτήτων διαίρεσιν καταμαθόντας, καὶ εἰς τὰς πολυμερεῖς χωρητέον. Καὶ α΄. παραληφθήτω ὁ Διαιρετέος, ὡς ποσότης πολυμερής, τοῦ Διαιρέτου μονομεροῦς μένοντος. Ἡ δ' ἀρχὴ ἐνταῦθα γινέσθω ἐκ τοῦ εἰς τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν ὑπάγειν σημεῖον ἁπάσας τοῦ Διαιρετέου τὰς ποσότητας,

τας, καὶ αὐτὸν τὸν Διαιρέτην, εἰ τοῦτο οὐ τυγχάνουσιν. (Εἰ καὶ ἐνίοτε τρόποι ἂν ἀπαντῷεν, ἔνθα τοῦτο οὐκ ἀναγκαῖον, καὶ ἔνθα οἱ ἀριθμοὶ, οἱ πρὸ τοῦ $\surd$ τυχὸν κείμενοι, ὡς ἔχουσιν, ἂν μένοιεν. Ἀλλ' ἡμῖν ἐνταῦθα λόγος περὶ τῶν εὐχερεστάτων, καὶ μᾶλλον ἐν χρήσει) Καὶ εἶτα διαιρεθήτω ἑκάστη ποσότης ἐν μέρει διὰ τοῦ διαιρέτου, τῷ συνήθει τοῦ διαιρεῖν τρόπῳ. π. χ.

$\surd 24 + \surd 48 - \surd 72$ διαιρεθ. διὰ τοῦ $\surd 6$.

$$
\begin{array}{l|l}
\surd 6)\ \surd 24 + \surd 48 - \surd 72 & \surd 4 + \surd 8 \\
\quad\ \ \surd 24 \quad : \quad : \quad\ \ : & \quad - \surd 12 \\
\hline
\quad\ \ 0 \quad \surd 48 \quad\ : & \\
\qquad\quad\ \surd 48 \quad\ : & \\
\hline
\qquad\qquad\ 0 - \surd 72 & \\
\qquad\qquad\quad - \surd 72 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Ἔστιν ἄρα τὸ πηλίκον $\surd 4 + \surd 8 - \surd 12$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ῥίζα ἔχει ἐν μέρει ἐξαχθῆναι, τραπείη ἂν εἰς τόδε. $2 + \surd 4 . 2 - \surd 4 . 3 = 2 + 2 \surd 2 - 2 \surd 3 = (1 + \surd 2 - \surd 3) . 2$.

Δίελε $\gamma\surd\gamma\delta - \zeta\surd\gamma\zeta - \gamma\surd\delta\zeta$ διὰ τοῦ $-\surd\gamma$. Ἃ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τεθέντα σημεῖον ἔσται

$$= \surd\gamma^2\gamma\delta - \surd\zeta^2\gamma\zeta - \surd\gamma^2\delta\zeta : -\gamma$$

$$= \frac{\surd\ \gamma^3\delta - \surd\zeta^3\gamma - \surd\gamma^2\delta\zeta}{-\surd\gamma}$$

Δίελε οὖν ἤδη ἐνεργείᾳ.

$-\surd\gamma$

$$-\sqrt{\gamma}\,)\ \sqrt{\gamma^3\delta}-\sqrt{\zeta^3\gamma}-\sqrt{\gamma^2\delta\zeta}\ \Big|\ -\sqrt{\gamma^2\delta}+\zeta^3+\sqrt{\gamma\delta\zeta}$$

$$\underline{\sqrt{\gamma^3\delta}}$$

$$o-\sqrt{\zeta^3\gamma}$$

$$\underline{-\sqrt{\zeta^3\gamma}}$$

$$o-\sqrt{\gamma^2\delta\zeta}$$

$$\underline{-\sqrt{\gamma^2\delta\zeta}}$$

$$o$$

Ὥςε τὸ πηλίκον $=-\sqrt{\gamma^2\delta}+\sqrt{\zeta^3}+\sqrt{\gamma\delta\zeta}=-\gamma\sqrt{\delta}+\zeta\sqrt{\zeta}+\sqrt{\gamma\delta\zeta}$.

Β'. δ' ἔςωσαν καὶ ὁ Διαιρετέος, καὶ ὁ Διαιρέτης ποσότητες πολυμερεῖς. Ἔνθα αὖθις, εἰ ἀναγκαῖον, ἁπάσαις χρηςέον ταῖς προπαρασκευαῖς, τουτ: ἁπάσας τὰς ποσότ. ὑπὸ τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν ὑπακτέον, καὶ ταύτας προσηκόντως κατὰ τὰς αὐτῶν δυνάμεις τακτέον, ὥσπερ τοῦτο ἡ μετὰ γραμμάτων συνήθης ἐδίδαξε διαίρεσις, καὶ εἶτα, ἡ σύνηθες, διαιρετέον, ἔνθα καὶ οἱ περὶ τοῦ $+$ καὶ $-$ κανόνες οὐ παροπτέοι.

Δίελε $6\sqrt{6}+2\sqrt{15}-3\sqrt{10}-5$ διὰ $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$. θέμενος α'. πάντας τοὺς ὅρους ὑπὸ τὸ ῥιζικόν.

$=\sqrt{36}$.

$$= \sqrt{36\cdot 6} + \sqrt{4\cdot 15} - \sqrt{9\cdot 10} - \sqrt{25} \;\Big|\; \sqrt{2\cdot 6} - \sqrt{5}$$

$$\sqrt{9\cdot 2\cdot 2\cdot 6} \quad \sqrt{2\cdot 6\cdot 5}$$

$$\sqrt{9\cdot 2} + \sqrt{5} \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$0 \qquad 0 - \sqrt{9\cdot 10} - \sqrt{25}$$

$$- \sqrt{9\cdot 2\cdot 5} - \sqrt{25}$$

$$\overline{\qquad 0 \qquad\qquad 0 \qquad}$$

Διέλε $\gamma\sqrt{\beta\gamma} - \gamma\sqrt{\beta\delta} + \delta\sqrt{\gamma\mu} - \delta\sqrt{\delta\mu}$ διὰ τοῦ $\sqrt{\gamma} - \sqrt{\delta}$. Ὑπὸ τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν τεθέντες οἱ ὅροι τοῦ Διαιρετέου $= \sqrt{\gamma^2\beta\gamma} - \sqrt{\gamma^2\beta\delta} + \sqrt{\delta^2\gamma\mu} - \sqrt{\delta^2\delta\mu}$.

ἢ $= \sqrt{\gamma^3\beta} - \sqrt{\gamma^2\beta\delta} + \sqrt{\delta^2\gamma\mu} - \sqrt{\delta^3\mu} \;\Big|\; \sqrt{\gamma^2\beta}$

διὰ τοῦ $\sqrt{\gamma} - \sqrt{\delta}$) $\sqrt{\gamma^3\beta} - \sqrt{\gamma^2\beta\delta} \qquad + \sqrt{\delta^2\mu}$.

$$0 \qquad 0 + \sqrt{\delta^2\gamma\mu} - \sqrt{\delta^3\mu}$$

$$+ \sqrt{\delta^2\gamma\mu} - \sqrt{\delta^3\mu}$$

$$\overline{\qquad 0 \qquad\qquad 0 \qquad}$$

Ὥςε τὸ πηλίκον $= \sqrt{\gamma^2\beta} + \sqrt{\delta^2\mu} = \gamma\sqrt{\beta} + \delta\sqrt{\mu}$.

Τὸ μετὰ ἀλόγων διαιρεῖν ἀείποτε ἐργῶδες, μάλιςα ἐν παραδείγμασιν ἐκ πλειόνων συγκροτουμένοις ὅρων, ἔνθα πολλάκις οὐδ᾽ ἐκπερᾶναι τὴν διαίρεσιν ἔνι, ὡς ἤτοι τοῦ Διαιρέτου μὴ ἀκριβῶς τῷ Διαιρετέῳ ἐμπεριεχομένου, ἢ οὕτω τῶν ποσοτήτων ἐχουσῶν, ὥςε οὐκ ἐκ πρώτης ὄψεως συνιδεῖν πάρεςιν, ὅπως ἀλλήλας περιέχουσι. Τηνικαῦτα παραδέδονται διάφοροι τῶν Μεθόδων, ἐνίοτε χρήσιμοι οὖσαι. Ὧν μία καὶ τὸ τὰς ποσότητας εἰς κλάσμα ἀνάγειν, καὶ τὸν παρονομαςὴν λογικὸν ποιεῖν, ἥπερ (§. 297.) εἴρηται. Ἀλλὰ καὶ ταῦτο ἐπὶ τῶν λίαν συνθέτων δυσχερέςατον, καὶ λίαν ἐπίπονον. Προτεθείσθω καὶ τούτου παράδειγμα.

Δίελε $8 - 5\sqrt{2}$ διὰ $3 - 2\sqrt{2}$. Ἐὰν ἄμφω οἱ ὅροι πολλαπλασιασθῶσι διὰ τοῦ $3 + 2\sqrt{2}$, τὸ κλάσμα τροπὴν οὐχ ὑφίςαται

$$\begin{array}{lrl}
 & & 8 - 5\sqrt{2} \\
\text{πολλαπλ. διὰ} & & 3 + 2\sqrt{2} \\
\hline
 & & +16\sqrt{2} - 10.2 \\
 & +24 & -15\sqrt{2} \\
\hline
 & +24 & +\sqrt{2} - 20 \\
 & = 4 & +\sqrt{2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{Ὁ παρονομ.} & & 3 - 2\sqrt{2} \\
\text{πολλαπ. διὰ} & & 3 + 2\sqrt{2} \\
\hline
 & & +6\sqrt{2} - 4.2 \\
 & +9 & -6\sqrt{2} \\
\hline
 & 9 & -8 = +1
\end{array}$$

Ὥςε τὸ πηλίκον $= \frac{4 + \sqrt{2}}{1} = 4\sqrt{2}$,

Ἡ

Ἡ δὲ βάσανος γίνεται κατὰ τὰ ἐν (§. 98.)

§. 305. Καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ τοῖς Πρωτοπείροις. Περὶ δὲ τῶν Ἀδυνάτων Ποσοτήτων καὶ δὴ λέγωμεν. Οὕτω δὲ καλοῦνται ῥίζαι, αἱ ἄρτιον Ἐκθέτην ἔχουσαι, καὶ ἀποφατικῶν ποσοτήτων προκείμεναι. Ὡς $\sqrt{-4}$. ἢ $\sqrt{-8}$. ἢ καὶ $\sqrt[4]{-12}$. ἢ $\sqrt[4]{-16}$, κτ. τὴν προσηγορίαν λαχοῦσαι, ἐκ τοῦ μηδεμίαν δίδοσθαι ποσότητα, ἥτις ἀρτιάκις πολλαπλασιασθεῖσα δώσει ἀποφατικὸν Ἀριθμόν. Καταφατικῶς γὰρ τῆς ποσότητος ληφθείσης, πάντα τὰ ἐξ αὐτῆς παραγόμενα, μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθείσης, καταφατικά. Ἀποφατικῶς δὲ, πᾶν παραγόμενον ἐξ αὐτῆς (αὖθις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθείσης) τὸ ἀρτίαν δύναμιν λαμβάνον, καταφατικὸν, τὸ δὲ περιττὴν, ἀποφατικὸν ἔςαι. Ἐπεὶ τοίνυν ἑκάςη ῥίζα ἤτοι $+$, ἢ $-$, οὐδεμία ποσότης, ἢ ἀριθμὸς δίδοται, ὅς ἡ ῥίζα ἂν εἴη ἀδυνάτου ποσότητος. Ἔςω παράδειγμα $\sqrt{-16}$, ὅ ἀδύνατον ποσότητα ἐμφαίνει. Ἡ γὰρ τούτου ῥίζα ἤτοι $+4$, ἢ -4. Ἀλλὰ πολλαπλασίασον $+4$, ἢ -4 μεθ' ἑαυτοῦ, καὶ ἀεὶ προκύψει $+16$. Ὥςε οὐδένα ἀριθμὸν δυνατὸν ἀποδοῦναι, ὅς δι' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθεὶς -16 παραγόμενον παρέξει. Ἀποφατικαὶ μέντοι ποσότητες, ὧν τὸ $\sqrt{}$ σὺν περιττῷ Ἐκθέτῃ πρόκειται, οὐκ ἀδύνατοι τυγχάνουσι. πάντως γὰρ τῷ πολλαπλασιασμῷ ἀποφατικῆς ποσότητος μεθ' ἑαυτῆς ἀνέφυσαν. π. χ. $\sqrt[3]{-a^3}$ ἔςι δήπου ἐνεργείᾳ ποσότης. Ἔςι γὰρ $= -a$. Ὅτι ἐνεργείᾳ ἡ $-a$ πολλαπλασιασθεῖσα παράξει $-a^3$ :: ($-a \cdot -a = +a^2$ (§. 77. καν.). $-a = -a^3$. (§. αὐτ.)) Καὶ ἡ $\sqrt[3]{-8} = -2$. Ὅτι $-2 \cdot -2 \cdot -2 = -8$. Ὡσαύτως καὶ αἱ αἱ λοιπαὶ ἀποφατικαὶ ποσότ. ὧν οἱ ῥιζικοὶ Ἐκθέται περιττοί. Αἱ ἄρα ἀδύναται ποσότητες μήτε καταφατικαί, μήτε ἀποφατικαὶ οὖσαι, οὐδαμῶς μέντοι τῷ μηδενὶ ἐξισοῦνται. Εἰσὶ δὲ τοῦτ' αὐτὸ, ἤτοι Ἀδύναται. Ὧν ἡ ὕπαρξις πάντως ἐν τῇ φαντασίᾳ γοῦν χώραν ἔχειν δύναται. Φαντασθῆναι γὰρ π. χ. δυνατὸν, δίδοσθαι ποσότητα, ἥτις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθεῖσα τὸν ἀποφατικὸν παράγει ἀριθμὸν, καίτοι ἄγνωςον οὖσαν. Ἔνθεντοι ἀκούουσι καὶ **Φαντασιώδεις Ποσότητες**.

§. 306. **Καὶ τούτῳ τῷ τῶν ῥιζῶν γένει τὰ δ'. εἴδη** τῶν ὑπολογισμῶν ὑπολογιςεῦσαι δυνάμεθα. Καὶ γὰρ καὶ ἐπιτομώτερον ἐκφέρονται, προςίθενται, ἀφαιροῦνται, πολλαπλασιάζονται, καὶ διαιροῦνται, εἰ μόνον τὰ λοιπὰ τοιαῦται, ὥςε τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις ταύταις ἐφαρμόζεσθαι. Περὶ ὧν μικρόν τι ἐροῦμεν. Τὰ γὰρ περὶ τῶν ἀλόγων ῥηθέντα ποσοτήτων κἀνταῦθα τελεῖται. Βουλομένοις οὖν ταύτας ἐπιτετμημένως ἐκδηλοῦν ἀναγκαῖον εἰς παράγοντας αὐτὰς κατατέμνειν, ὧν ἀφ' ἑνὸς ἡ ῥίζα ἐξαχθῆναι δύναται. π. χ. $\sqrt{-18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-2} = 3\sqrt{-2}$. Καὶ $\sqrt{-8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-2} = 2\sqrt{-2}$. Διὰ τούτου ἡ ποσότης ἀπαλλάττεται ἐν μέρει καὶ τοῦ ἀδυνάτου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ 1 ἀείποτε ὡς εἷς παράγων οἱασοῦν ποσότητος νοεῖται, χρηςέον καὶ ταύτῃ, ἵν' ἁπάσας τὰς ἀδυνάτους ποσότ. ἐν μέρει τοῦ ἀδυνάτου ἀπαλλάττωμεν. Ὡς $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$. Καὶ $\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$. καὶ ἐπεὶ 12 ἔχει περαιτέρω ἀνατέμνεσθαι $= \sqrt{4 \cdot 3} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{-3}$. Καὶ $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{-1} = 2\sqrt[4]{-1}$, κτ. Ἡ **Πρόσθεσις, καὶ Ἀφαίρεσις** τῶν Ἀδυνάτων τὸν αὐτὸν ἐκπεραίνεται τρόπον, ὃν καὶ ἡ

τῶν

τῶν Ἀλόγων. (§. 300.) Ἀλλὰ κἀνταῦθα τὰ ὁμοειδῆ μόνα προσαθροίζεται, καὶ ἀφαιρεῖται·

Πρόσθες $3\sqrt{-2} + \sqrt{-4} - 5\sqrt{-1}$

τῷ $2\sqrt{-2} - 2\sqrt{-4} - 2\sqrt{-1}$

τὸ κεφάλ. $= 5\sqrt{-2} - \sqrt{-4} - 7\sqrt{-1}$

Ἀπὸ τοῦ $3\sqrt{-2} + \sqrt{-4} - 5\sqrt{-1}$

ἄφελε τὸ $2\sqrt{-2} - 2\sqrt{-4} - 2\sqrt{-1}$

$\quad - \qquad + \qquad +$

ἡ Διαφορὰ $\sqrt{-2} + 3\sqrt{-4} - 3\sqrt{-1}$

§. 307. Ἐπὶ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ μετ' ἀδυνάτων ποσοτήτων σημειωτέα εἰσὶ τὰ ἑξῆς. Ἐὰν δύω ἴσαι ἀδύνατοι Ποσότ. ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθῶσιν, ἡ ἐκ τούτων προκύπτουσα Ἀποφατικὴ τυγχάνει. Οἷον $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = -3$. Τὸ γὰρ σημεῖον τὸ μετὰ τὴν ῥίζαν οὐ μεταβάλλει τὸ σημεῖον τῆς Ποσότητος. Ὅπερ ῥᾴδιον συνιδεῖν, ὡς τῆς ῥίζης τῆς Ποσότητος μόνον δεικνυμένης, οὐχὶ δὲ καὶ ἐκφερομένης, καὶ, κατὰ τὴν τῶν ῥιζῶν, ἣν ἐλάβομεν, ἔννοιαν, τῆς ποσότητος ἀναφυομένης τῷ πολλαπλασιασμῷ ἐκείνων (τῶν ῥιζῶν) μετ' ἀλλήλων. Αὖθις

$$\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-8} = -8. \text{ Καὶ } \sqrt[4]{-16} \cdot \sqrt[4]{-16} = -16^{\frac{2}{4}} = -16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}.$$

Ἐν γένει, τὸ σημεῖον — τῶν ἀδυνάτων ποσοτήτων, τὸ μετὰ τὴν ῥίζαν, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ οὐ μεταβάλλεται ἐπὶ τοῦ τοιούτου πολλαπλασιασμοῦ τῆς εἰς δυνάμεις ἐξάρσεως, καὶ ὁ κανὼν ὁ περὶ τῶν σημείων (§. 77.) ἁρμόζει μόνον τοῖς σημείοις, τοῖς πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ κειμένοις. Ἀλλ' ὅτε δύω διαφόρους

ἀδυνά-

ἀδυνάτους ποσότητας δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάζειν δέοι, συμβαίνει ἑτερόντι. ἔνθα χρήσιμον πάνυ τὸ ταύτας εἰς τοὺς αὐτῶν ἁπλοῦς παράγοντας διατέμνειν πρὸ τοῦ τούτων πολλαπλασιασμοῦ. π. χ. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-2} = -\sqrt{6}$. Ἔςι γὰρ $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$. καὶ $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}$. Ὥςε $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{6}\cdot -1 = -\sqrt{6}$. Ὅπου ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀδυνάτων ποσοτήτων δυνατόν τι προκύπτει. Αὐτὸ δὲ τοῦτο καὶ συνεργείᾳ τοῦ σημείου, τοῦ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ κειμένου, ἂν γένοιτο. π. χ. $(\sqrt{-8} + \sqrt{-2})\cdot(\sqrt{-8} - \sqrt{-2})$ δίδωσι δυνατὴν ποσότητα $= -6$. Ὃ δῆλον τῷ ἐνεργείᾳ πολλαπλασιασμῷ.

$$\begin{array}{l}
\quad \sqrt{-8} + \sqrt{-2} \\
\quad \sqrt{-8} - \sqrt{-2} \\
\hline
\quad -\sqrt{-16} - (-2), \text{ ἢ } +2 \\
-8 + \sqrt{-16} \\
\hline
-8 \qquad\qquad\qquad\qquad + 2 = -6.
\end{array}$$

Ἀδυνάτων δὲ ποσοτήτων μετὰ δυνατῶν πολλαπλασιαζομένων, τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον ἀεὶ ἀδύνατον. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{-2}$ δίδωσι $\sqrt{-10}$. Τὸ γὰρ $\sqrt{5}\cdot\sqrt{-2} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{10}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{-10}$ Εἰώθασι μέντοι συχνάκις μὴ ἐνεργείᾳ πολλαπλασιάζειν, ἀλλὰ μόνον τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀδυνάτων μετὰ τῶν δυνατῶν δεικνύναι, ἵν' εὐχερέςερον ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ὁ πολλαπλασιασμὸς γνωρίζηται. π. χ. $\sqrt{\alpha}$ πολλαπλ. μετὰ τοῦ $\sqrt{-\gamma}$, γράφεται μόνον $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{-\gamma}$. Εἰ καὶ ἀντὶ τούτου καὶ τὸ $\sqrt{-\alpha\gamma}$ ἂν τεθείη. Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{4}\cdot\sqrt{-3}$ μένει πολλάκις ἄτρεπτον.

Τελευταῖον συμβαίνει καὶ δυνατῶν μετ' ἀδυνάτων πολλαπλασιαζομένων, δυνατήν τινα προκύπτειν ποσότητα. Τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν ἀμφοῖν τοῖς παράγουσιν ἐνυπάρχωσιν ἀδύνατοι ποσότητες, ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ τὰ τῶν παραγόντων σημεῖα μὴ τὰ αὐτὰ ᾖ. Ἔνθεν τοι τὸ λεγόμενον οὐκ ἀντιφάσκει τοῖς προηγηθεῖσι. π. χ. $2\gamma\sqrt{-\delta} \,.\, -3\beta\sqrt{-\delta} = -6\beta\gamma\sqrt{-\delta} \,.\, \sqrt{-\delta} = -6\beta\gamma \,.\, -\delta = +6\beta\gamma\delta$. Καὶ $6\sqrt{-4} \,.\, -5\sqrt{-4} = -30 \,.\, \sqrt{-4} \,.\, \sqrt{-4} = -30 \,.\, -4 = +120$.

§. 308. Ἡ Διαίρεσις τῶν ἀδυνάτων Ποσοτ. δι' ἀλλήλων τελεῖται κατὰ τοὺς αὐτοὺς νόμους, ὡς καὶ ὁ τούτων πολλαπλασιασμός. Χρήσιμον δ' ἐπὶ τῶν δυσχερεσέρων παραδ. καὶ τοῖς Πρωτοπείροις ῥᾷον εἰς κατάληψιν, τὸ ταύτας, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον, ἀναλύειν. π. χ. $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{4} \,.\, \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{4} = 2$. Ἀλλὰ $\frac{-\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{-\sqrt{4} \,.\, \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{4} = -2$. Καὶ $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{8} \,.\, \sqrt{-1}}{\sqrt{4} \,.\, \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$.

Ἔνθα καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως ἀδυνάτων δυναταὶ ἀνέφυσαν. Ἀλλ' ὡς τὰ πολλὰ δεικνύομεν μόνον τὴν διαίρεσιν, ταῖς ποσότησι τὸ τοῦ κλάσματος σχῆμα διδόντες, ἐὰν μὴ ῥαδίως διαιρῶνται. Ἄλλως γὰρ εἰς τὸ τὸ βραχύτατον αὐτὰς πειρατέον ἀνάγειν. ὡς $\surd - \alpha : \surd - \beta = \frac{\surd - \alpha}{\surd - \beta}$. Καὶ $\gamma\delta \surd - \gamma : - \delta \surd - \gamma = \frac{\gamma\delta \surd - \gamma}{- \delta \surd - \gamma}$ $= - 1\gamma = - \gamma$. Καὶ $8 \surd - 6 : - 4 \surd - 2 = \frac{8 \surd - 6}{- 4 \surd - 2} = - 2 \surd - 3$.

§. 309. Ἡ δ' ὄνησις, ἣν αἱ ἀδύνατοι ποσότητες τῇ Ἀριθμητικῇ παρέχονται, λίαν ἐπίσημος. πολλάκις γὰρ προτείνονται Προβλήματα, περὶ ὧν ἄδηλον, πότερον δυνατὰ, ἢ μή. Τοῦτο δ' ἐπὶ τὸ πέρας γενόμενοι τοῦ ὑπολογισμοῦ μαθησόμεθα. Ἐὰν γὰρ τηνικαῦτα ποσότητες προέλθωσιν ἀδύνατοι, τὸ Ζήτημα ἀδύνατον, ἢ ἀνεπίλυτον τυγχάνει. Τὰ δὲ τοιαῦτα μάλιςα ἐν ταῖς Ἐξισώσεσιν ἀπαντᾷ. Οἷον, εἰ ζητεῖται 10 εἰς δύω μέρη διαιρεθῆναι, ἃ ἐπ' ἄλληλα πολλαπλασιασθέντα δώσουσι 3 παραγόμενον. τοῦ Ζητήματος διαταχθέντος, (ὡς τοῦτο αἱ Ἐξισώσεις διδάξουσιν) οὕτω, (τῶν δύω μερῶν, ὡς ἀγνώςων, τοῦ μὲν χ, τοῦ δὲ υ ῥηθέντος)

$$\chi + \upsilon = 10 \qquad \chi\upsilon = 36$$
$$\chi = 10 - \upsilon \qquad \chi = \frac{36}{\upsilon}$$
$$10 - \upsilon = \frac{36}{\upsilon} \quad (\S. 48. \delta'.)$$
$$10\upsilon - \upsilon^2 = 36$$
$$\upsilon^2 - 10\upsilon = - 36$$
$$\upsilon^2 = 10\upsilon - 36$$
$$\upsilon = 5 \pm \surd\, 25 - 36$$
$$\upsilon = 5 + \surd - 11$$
$$\upsilon = 5 - \surd - 11$$

 Ἀνα-

'Αναφανήσονται ἐν τέλει οἱ παράγοντες $5 \sqrt{-11}$, καὶ $5 - \sqrt{-11}$, ἀδυνάτους δηλοῦντες ποσότητας. Ὥςε καὶ τὸ ζητούμενον οὐκ ἐπιλύσιμον. Καὶ δίδωσι μὲν ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν δύω ἀδυνάτων ποσοτήτων μετ' ἀλλήλων τῷ ὄντι 36, ἀλλὰ τοιαῦται ποσότητες κυρίως οὐ δίδονται.

Πολλαπλασιασθήτωσαν ἄμφω δι' ἀλλήλων.

$$
\begin{array}{l}
5 + \sqrt{-11} \\
5 - \sqrt{-11} \\
\hline
- 5\sqrt{-11} - (-11) \\
+ 25 + 5\sqrt{-11} \\
\hline
25 \;.\; 0 \qquad - (-11) = +11.
\end{array}
$$

Ὥςε $25 + 11 = 36$.

Σημειωτέον πρὸς τούτοις, ὅτι τὰς ἀδυνάτους ποσότητας ἐν ταῖς Δείξεσι φευκτέον, μάλιςα, ἔνθα ἡ Δεῖξις δι' ἐνεργείᾳ ποσοτήτων (καίτοι χαλεπῶς ἐνίοτε) ἔχει ἐπαχθῆναι. Δι' ἐκείνων γάρ, ὡς ἀδυνατων, οὐδὲν νοῆσαι δυνάμεθα, καὶ τῇ διανοίᾳ λαμπρότερον ἐπιλάμπει φῶς, τῶν συμπερασμάτων δυναταῖς ποσότησι συναγομένων.

§. 310. Ἐπιμνηςέον τελευταῖον καὶ εἴδους ῥιζῶν ἑτέρου, καὶ τούτων ἐνίοτε ἀπαντωσῶν. Προκεῖσθαι γὰρ συμβαίνει ἐκ ῥίζης καὶ ἑτέραν ἔτι ἐξάγειν, ὅπερ οὕτως ἐκφαίνεται. $\sqrt{\sqrt{5}}$ Ὅ ἐςιν, ἐξαχθήτω ἀπὸ τοῦ 5 ἡ $\sqrt{}$, καὶ ἐκ τῆς προκυψάσης ποσότητος αὖθις ἡ $\sqrt{}$. ἢ καὶ $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$. ἢ ἐν γένει $\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha}}$. Ἐὰν οὖν αἱ ποσότητες, ἐξ ὧν ἡ α'. ῥίζα, ἡ πλησίον τῆς ποσότητος κειμένη, ἐξακτέα, τοιαῦται ἴσαιν, ὥςε τὴν τούτων ῥίζαν ἀκριβῶς ἀποδίδοσθαι, μόνον ἓν ῥιζικὸν κυρίως πάρεσιν, ὡς τῆς ἑτέρας ῥίζης ἐξαχθῆναι δυναμένης. π. χ. $\sqrt{\sqrt{9}}$ εἴη ἂν (ὅτι τοῦ 9 ἡ ῥίζα ἀκριβῶς ἀποδίδοται) $= \sqrt{3}$. Καὶ $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$. Καὶ $\sqrt{\sqrt{\alpha^2}} = \sqrt{\alpha}$. Τῶν δὲ ποσοτήτων ἀλόγων οὐσῶν, οὐ δυσχερὲς ἀμφοῖν ἓν μόνον ῥιζικὸν προθεῖναι σημεῖον, εἰ τοῦτο ἀναγκαῖον. Ὡς γὰρ ἔφημεν, τὰς ῥίζας, ὡς δυνάμεις, κλασματικοὺς ἐκθέτας ἐχούσας, γράφειν ἔξεσι. καὶ, ὅτε τοὺς ἐκθέτας τῶν δυνάμεων διαιροῦμεν, τὰς τούτων ῥίζας διὰ τούτου ἐξάγομεν. (§. 200.) Ὥςε τούτῳ τῷ τρόπῳ καινὸν, καὶ ἓν μόνον ῥιζικὸν παρέσαι σημεῖον. π. χ. $\sqrt{\sqrt[3]{\gamma}} = \gamma^{\frac{1}{3}} : 2 = \gamma^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \gamma^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\gamma}$. Καὶ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}} = 8^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = 8^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{8}$. Καὶ $\sqrt{\sqrt[3]{8^2}} = 8^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 8^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$. Καὶ ἐν γένει. $\sqrt[\rho]{\sqrt[\sigma]{\alpha^{\nu}}} = \alpha^{\frac{\nu}{\sigma}\cdot\frac{1}{\rho}} = \alpha^{\frac{\nu}{\sigma\rho}} = \sqrt[\sigma\rho]{\alpha^{\nu}}$. Ἐὰν τεθῇ $\rho = 3$. $\sigma = 2$. $\nu = 4$. $\alpha = 12$. ἔσαι $\alpha^{\frac{\nu}{\sigma\rho}} = 12^{\frac{4}{6}} = 12^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{12^2} = \sqrt[3]{144}$.

Τὰ ἀναγκαιότατα περὶ τῶν ῥιζικῶν ὑπολογισμῶν εἰπεῖν πειρασάμενοι πλατύτερον τούτους ἐξεθέμεθα εἰς πλείω ἐνάργειαν. Ὥςε καὶ ἐλπὶς ἡμῖν πάρεσι τοὺς πρωτοπείρους, τοὺς μετὰ προσοχῆς τὰ ῥηθέντα ἀναλεξομένους, ῥαδίως προχωρήσειν εἰς τὰ τελειότερον περὶ τούτων πραγματευόμενα συγγράμματα.

Περὶ