σθῶσιν ἀλλήλαις, καὶ ἀπὸ τούτων αἱ ὁμοίως ἀλλήλαις προςεθεῖται ἀποφατικαὶ ἀφαιρεθῶσιν, ἀμφοτέρων τῶν κλασμάτων α'. εἰς τὸν αὐτὸν παρονομ. ἀχθέντων, προκύψει $1\frac{415}{1024}$. Ἐν δὲ δεκαδικοῖς 1,405, ὅπερ οὐ πολὺ τῆς $\sqrt{2}$ ἀφίςαται.

§. 292. Καὶ τὰ μὲν μέχρι τοῦδε ῥηθέντα περὶ τῆς ἀνὰ χεῖρας διδασκαλίας, διεξοδικωτάτης οὔσης, ἱςορικήν τινα μόνον γνῶσιν παρέχοντα, ἀρκεῖ. Τοῦτο γὰρ τὸ εἶδος τῶν ὑπολογισμῶν δυσχερὲς πάνυ τοῖς, δι' οὓς ταῦτα γέγραπται. Ἔνθεντοι καὶ ὅπως διὰ τοῦ Διωνύμιου ἔτι μείζους ἐξάγονται ῥίζαι, ὅπως τε ἀποφατικαὶ δυνάμεις διὰ τούτου ἐξαίρονται, ὡς $(\alpha+\beta)^{-2}=\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}$. ἢ καὶ ὅπως ἡ τούτων ῥίζα ἐξάγεται, οἷον $(\alpha+\beta)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(\alpha+\beta)^3}}$, κτ. ἐπίτηδες παρελείφθη. Ὁ δὲ πλείω περὶ τουτου ζητῶν μετελθέτω τὰ τῶν Νεωτέρων περὶ τούτου Μαθηματικὰ συγγράμματα. Ὁ γὰρ τὰ ῥηθέντα κατέχων μετ' ὠφελείας χρήσεται τοῖς τούτων συγγράμμασι.

Πλατυτέρα Θεωρία τῶν Ῥιζικῶν, Ἀλόγωντε καὶ Ἀδυνάτων Ποσοτήτων.

§. 293. Εἰ καὶ ἐν μοῖς φθάσασι τῶν Ῥιζικῶν, καὶ ἀλόγων ποσοτήτων μνείαν ἐποιησάμεθα, ἐφ' ᾧ μέντοι τὰ ῥηθέντα σαφέςερον ἐκθεῖναι, καὶ πλατύτερον, ἰδὶ περὶ τούτων πραγματεύσασθαι δεῖν ἔγνωμεν. Πρὶν ἢ δὲ τῆς τούτων ἅψασθαι θεωρίας, τοὺς ἀναγνώσας εἰς τὴν ἀνάγνωσιν τῶν ἐν §. §. §. 186. 200. 204, κτ. διαληφθέντων παραπέμπομεν.

§. 294

§. 294. Ἐὰν τὸ ῥιζικὸν σημεῖον (§. 186.) ποσοτήτων συμπεπλεγμένων (§. 44.) προτιθῆται, τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου τῆς προκειμένης ποσότητος σημαίνει. ὡς $^3\sqrt{(\alpha^2 - 3\alpha\chi + \beta)}$ Ὅπερ τὴν $^3\sqrt{}$ ἀπὸ τῶν τριῶν ὅρων τῆς ποσότητος ἐξακτέαν δηλοῖ. Τὸ δὲ σχῆμα εἴη ἂν καὶ $= (\alpha^2 - 3\alpha\chi + \beta)^{\frac{1}{3}}$. (§. 200.) Προκειμένης δὲ ποσότητος, τῷ πολλαπλασιασμῷ παραχθείσης, καὶ ἐκ παραγόντων ἀναφῦσαν ἐχούσης νοηθῆναι, ἧς τὸ $\sqrt{}$ προτέθειται, ἁρμόζει ὡσαύτως τὸ $\sqrt{}$ πᾶσι τοῖς ἁπλοῖς παράγουσι. π. χ. $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\beta}$. Καὶ $\sqrt{48} = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{4}\,.\,\sqrt{3}$. Εὐχερῶς δὲ τὸ λεγόμενον κατανοήσομεν, τῆς ἐξάρσεως τῶν ποσοτήτων εἰς δυνάμεις μνησθέντες. Ἦν γὰρ $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2$, ὡς τὸ $(\alpha\beta)^2$ διὰ τοῦ $\alpha\beta\,.\,\alpha\beta$ παραχθέν. Ὡσαύτως καὶ $(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\beta}$. Ἄρα $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\beta}$. Οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

§. 295. Πᾶσα ποσότης ὑφ' ὁποιονοῦν ῥιζικὸν σημεῖον ὑπαχθήσεται, τῆς κατὰ ταύτην δυνάμεως σωζομένης, ἐὰν εἰς δυνάμεις τηλικαύτας ἐξαρθῇ, ἡλίκος ὁ ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ, ὑφ' ὃ ταύτην ὑπάγειν ἐπιταττόμεθα. Οἷον, εἰ δέοι $\alpha^2\beta$ ὑπὸ τὸ $^3\sqrt{}$ ὑπαχθῆναι, εἴη ἂν $^3\sqrt{\alpha^{2.3}\beta^3} = {}^3\sqrt{\alpha^6\beta^3}$. Ἔνθα τὸ $\alpha^2\beta$ εἰς τὴν γ'. ἐξῆρται δύναμιν. Ὥςε ἀνάγκη πᾶσα τὴν τούτου $^3\sqrt{} = \alpha^2\beta$ εἶναι. Ἡ $^3\sqrt{\alpha^6\beta^3} = \alpha^{\frac{6}{3}}\beta^{\frac{3}{3}} = \alpha^2\beta$. Ἡ ἄρα ποσότης οὐδεμίαν ὑπέςη τροπήν. Διὰ ταύτης τῆς μεθόδου ὁ ὑπολογισμὸς οὐκ ὀλιγάκις ἐξευμαρίζεται. Προτεθείσθω ἔτι καὶ ἕτερ' ἄττα τοιαῦτα παραδ: ἵνα διὰ τούτων ἅμα δειχθῇ, ὅτε τὸ $\sqrt{}$ τῇ ποσότητι παράκειται, ὅπως πᾶσα ἡ ποσότης ὑπὸ τοῦτο ὑπάγεται. Ὡς $\beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha\beta^2}$. ὅπου τὸ β εἰς δύναμιν ἐξῆρται, ὥςε, ἐὰν ἡ ῥίζα, ἥτις τῷ α προσήκει, καὶ ἀπὸ τούτου (του β) ἐξαχθῇ, αὖθις β γενέσθαι. Ἔςι γὰρ $\sqrt{\alpha\beta^2} = \alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{2}{2}}$
$= \beta\sqrt{\alpha}$.

$\beta\sqrt{\alpha}$. Τὸν αὐτὸν δὲ προβήσῃ τρόπον καὶ ἐν ἀριθμοῖς, εἰς παράγοντας διατμηθεῖσι, καὶ τούτους μεταβαλεῖς, τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦτο ἀπαιτοῦντος, καὶ τῶν παραγόντων ἐπιτρεπόντων. π. χ. Εἰ πρόκειται 12 ὑπὸ τὸ $\sqrt[3]{}$ ὑπαγαγεῖν, διαφόροις τρόποις ἂν γένοιτο. Εἴη γὰρ ἂν $= \sqrt[3]{12^3} = \sqrt[3]{1728}$. ἢ ἐπεὶ $12 = 2 . 6 = \sqrt[3]{2^3 . 6^3} = \sqrt[3]{8 . 216} = \sqrt[3]{8} . \sqrt[3]{216}$, καὶ οὕτω πολλαχῶς.

§ 206. Ἀλλὰ καὶ ἀνάπαλιν, ποσότητας ὑπὸ τὰ ῥιζικὰ κειμένας πολλάκις ἤτοι διόλου, ἢ γοῦν ἐν μέρει τούτων ἂν ἀπαλλαξαίμεθα. Ἐὰν μὲν ὦσι δυνάμεις, τὸν αὐτὸν Ἐκθέτην ἔχουσαι, ὃν καὶ τὸ $\sqrt{}$, ἢ ἐὰν τὰς ῥίζας ἐξάγειν οἷόν τε ᾖ, ποιοῦμεν τοῦτο, γράφοντες μόνον τὰς ῥίζας. ὡς $\sqrt[5]{\alpha^5} = \alpha^{\frac{5}{5}} = \alpha$. Καὶ $\sqrt[3]{\alpha^3\beta^3} = \alpha\beta$. Καὶ $\sqrt[3]{64} = 4$, κτ. Ἐὰν δὲ ποσότητες, ἐκ παραγόντων συγκείμεναι, τυγχάνωσιν, ἐγχωρεῖ ἐνίοτε τὸ ἕνα, ἢ καίτινας τῶν παραγόντων ἀπὸ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου ἀπαλλάττεσθαι, εἴπερ ἀμέλει ἡ τούτου. ἢ τούτων ῥίζα δυνατὴ ἐξαχθῆναι. Τηνικαῦτα οὖν τοῦτο ποιῶν τίθει πρὸ τῶν ἄλλων τὸ $\sqrt{}$. τὴν δ' ἐξαχθεῖσαν ῥίζαν πρὸ τοῦ $\sqrt{}$. Εἰ δ' ἀριθμοὶ πρόκεινται, ἀνατεμὼν αὐτοὺς εἰς παράγοντας τὰ αὐτὰ τέλει. Ταῦτα δὲ τῇ περὶ Ἐξάρσεως, καὶ Διαιρέσεως τῶν Δυνάμεων διδασκαλίᾳ ἐρείδεται. Οἷον $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha^{\frac{2}{2}}\beta^{\frac{1}{2}} = \alpha\sqrt{\beta}$. Ἡ $\sqrt[3]{\alpha^6\beta^3\gamma^4} = \alpha^{\frac{6}{3}}\beta^{\frac{3}{3}}\gamma^{\frac{4}{3}} = \alpha^2\beta\sqrt[3]{\gamma^4}$. Ἡ $\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{8 . 7} = \sqrt[3]{8} . \sqrt[3]{7} = 8^{\frac{1}{3}} . 7^{\frac{1}{3}} = 2 . 7^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{7}$. Τοῦτο δὲ μάλιστα ἐν χρήσει ἐπὶ τῶν Ἀλόγων ἀριθμῶν. Ἐπὶ γὰρ τῶν ἄλλων οὐκ ἀναγκαῖον, ὡς ἐκ τούτων τῆς ῥίζης ἐνεργείᾳ ἐξαγομένης. π. χ. $\sqrt{45}$. ἡ τούτου ῥίζα τῷ ὄντι ἄλογος. Ἀλλὰ $45 = 9 . 5$. Ὥστε $\sqrt{45} = \sqrt{9 . 5} = 9^{\frac{1}{2}} . 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} . \sqrt{5} = 3 . \sqrt{5}$. Καὶ

$\sqrt{27}$

$\sqrt{27} = \sqrt{9 . 3} = \sqrt{9} . \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Καὶ $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64 . 3} = \sqrt[3]{64} . \sqrt[3]{3} = 4 . \sqrt[3]{3}$. Καὶ $\sqrt[4]{486} = \sqrt[4]{81 . 6} = \sqrt[4]{81} . \sqrt[4]{6} = 3\sqrt[4]{6}$. Καὶ $2\sqrt{32} + 4\sqrt{288} - \sqrt[3]{64} = 2\sqrt{16 . 2} + 4\sqrt{36 . 8} - 4 = 2 . 4\sqrt{2} + 4 . 6\sqrt{2 . 4} - 4 = 8\sqrt{2} + 48\sqrt{2} - 4 = 56\sqrt{2} - 4$. Καὶ $\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{128} = 4 - \sqrt[3]{8 . 16} = 4 - \sqrt[3]{8 . 8 . 2} = 4 - 4\sqrt[3]{2}$. Καὶ $\sqrt{48} + \sqrt{512} = \sqrt{3 . 16} + \sqrt{4 . 128} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{4 . 32} = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{. 4 . 8} = 4\sqrt{3} + 8\sqrt{8} = (\sqrt{3} + 2\sqrt{8})4$. Καὶ $\sqrt[3]{1728} + 3\sqrt[4]{81} - 2\sqrt{64} = \sqrt[3]{8 . 216} + 3 . 3 - 2 . 8 = 2\sqrt[3]{8 . 27} + 3 . 3 - 2 . 8 = 2 . 2 . 3 + 3 . 3 - 2 . 8 = 12 + 9 - 16 = 21 - 16 = + 5$.

Ἐπὶ πάντων τῶν τοιούτων παραδειγμ. πᾶσα ἡ σπουδὴ ςρέφεται εἰς τὸ παράγοντά τινα ἐκκαλύψαι, (εἰς οὓς ἡ ποσότης διατέμνεται) ὅς Τετράγωνος, ἢ Κύβος, ἢ Διτετράγ. κτ. τυγχάνει, ἐξ ὧν ἡ ῥίζα ἐξάγεται. Ἀναγκαῖον δ' ἐνίοτε τὸ τὴν ποσότητα δι' ἑτέρων τροπῶν εἰς τοῦτο προπαρασκευάζειν, ὅ τῇ συχνῇ μελέτῃ, καὶ ἀναγνώσει τῶν ἐνταῦθα τεινόντων συγγραμμάτων ἐκμανθάνομεν. Ὥςε δὲ καὶ τούτου ἰδέαν τινὰ παρασχεῖν, προκείσθω τὸ ἑξῆς παράδειγμα. $\sqrt{(\alpha^2 \psi + 2\alpha\psi\omega + \omega^2 \psi.)}$. Ἐπειδὴ οὖν ἐνταῦθα ψ ὁ κοινὸς τῶν τριῶν τυγχάνει ὅρων, τραπείη ἂν τὸ παράδ. εἰς τὸ $\sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\omega + \omega^2)}\psi$. Ἀλλ' ἀπὸ τοῦ α'. τὴν ῥίζαν ἐξάγειν ἔχομεν. Ἔςι γὰρ $\alpha + \omega$. Ἄρα ἡ ὁλικὴ ποσότης $= (\alpha + \omega)\sqrt{\psi}$.

§. 297. Καὶ κλάσματα δὲ, ὑπὸ τὸ $\sqrt{\ }$ κείμενα, Ἄλογα, τῆς ἀλογίας ἐν μέρει ἀπαλλάττειν δυνατὸν, ἄςε ὥςε τὸν τούτων ἀριθμ. ἢ παρον. Λογικὸν γίνεσθαι. Λόγος δὲ ὁ ἐν (§. 122. καν.) Τηνικαῦτα οὖν πολλαπλασιάζομεν ἄμφω τοὺς ὅρους τοῦ κλάσμ. ἤτοι τῷ ἀριθμ. ἢ παρονομαςῇ (ἤπερ ἂν τὸν ἀριθμ. ἢ παρον. λογικὸν ἔχειν βουλόμεθα) τοσάκις, μέχρις οὗ ὁ ὅρος τοῦ κλάσμ. ὁ λογικὸς γενησόμενος, διὰ τούτου εἰς δύναμιν ἐξαρθῇ, ἡλίκος ὁ ἐκθέτης τοῦ $\sqrt{}$, ἢ ὁσάκις ὁ Ἐκθέτης τοῦ $\sqrt{}$ τὴν μονάδα περιέχει. π. χ. ἐν τῷ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, γενέσθω ὁ ἀριθμ. λογικός. Ὥςε πολλαπλασιασθήτωσαν ἄμφω οἱ ὅροι μετὰ τοῦ $\sqrt{\alpha}$. (§. αὐτ.) $= \sqrt{\frac{\alpha\cdot\sqrt{\alpha}}{\beta\cdot\sqrt{\alpha}}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}}$. ἢ καὶ $= \alpha\cdot\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{\alpha\beta}}$, ὃς ἔσχατος τρόπος συςατὸς, ὅτι τῆς 1 ἡ $\sqrt{} = 1$. Ἔνθεν τοι $\sqrt{\frac{1}{\alpha\,\beta}}$ καὶ $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$ ἴσα. Ἤδη δὲ καὶ ὁ παρονομαςής. Πολλαπλασίασον οὖν ἄμφω τοὺς ὅρους τῷ $\sqrt{\beta}$. ἤτοι $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\beta\cdot\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\beta\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} = \frac{1}{\beta}\sqrt{\alpha\beta}$.

Παράδειγμα ἐν ἀριθμοῖς. $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{3.3.3}{5.3.3}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{45}} = \frac{3}{\sqrt[3]{45}}$. ἢ $3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{45}}$. Καὶ $\sqrt[4]{\frac{2}{3}} = \sqrt[4]{\frac{2.3.3.3}{3.3.3.3}} = \frac{\sqrt[4]{2.3.3.3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{54}}{3} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{54}$.

Μεταβάλλονται δ' ἐνίοτε καὶ κατάτινα τρόπον ἀσυνήθη. Ὡς $\frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{64}}{\sqrt{2}} =$

$\sqrt{2}\cdot$

$\sqrt{2 \cdot 64} = \sqrt{128} = \sqrt{4 \cdot 32} = 2\sqrt{32} = 2\sqrt{16 \cdot 2} = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$

Καὶ $\frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 128}} = \frac{1}{\sqrt{128}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 32}} = \frac{1}{2\sqrt{32}} = \frac{1}{2\sqrt{16 \cdot 2}} = \frac{1}{2 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 64}} = \frac{1}{\sqrt{128}}.$

Αἱ τοιαῦται τῶν τροπῶν, καὶ μεταβολῶν λίαν εἰσὶν ἀξιοσημείωτοι. Ἐπὶ του α'. τῶν δύω ἤδη προτεθέντων παραδ. ἐγένετο ὁ ἀριθμ. ἐπὶ δὲ τοῦ β'. ὁ παρον. λογικός. Δίδονται δὲ καὶ κλάσματα, ἐξ ὧν τὴν ζητουμένην ῥίζαν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ὅρου ἐξάγειν, καὶ τοῦ $\sqrt{}$ ἀπαλλάττειν δυνάμεθα, π. χ. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ὁ γὰρ $2 = \sqrt[3]{8}$.

Καὶ $\sqrt[4]{\frac{81}{144}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{144}} = \frac{3}{\sqrt[4]{144}}$. Ἐν τούτῳ τῷ ὑποδείγματι ἀπὸ μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ ἐξάγεται ἡ $\sqrt[4]{}$. Ὁ δὲ παρονομ. ἔχοι ἂν καὶ αὐτὸς ἐν μέρει τῆς ἀλογίας ἀπαλλαχθῆναι, τῇ εἰς παράγοντας αὐτοῦ (§. ἀνωτ.) κατατομῇ $= \frac{3}{\sqrt[4]{16 \cdot 9}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{9}}$.

§. 298. Ἐὰν αἱ τοιαῦται ἄλογοι ποσότητες ἐφεξῆς εἰς λόγον τεθῶσιν, (§ 212.) ὁ λόγος κληθήσεται Ἄλογος, ὡς μὴ ἐντελῶς ἔχων διορισθῆναι.

Δυνα-

Δυνατὸν μὲν οἱ καὶ ἀλόγους ποσότητας Λόγον ἔχειν λογικὸν πρὸς ἀλλήλας, ἢ Λόγον ἀκριβῶς ἀποδοθῆναι δυνάμενον. Τοῦτο δ' ἔςαι, εἰ, ὡς εἴρηται, ἐν μέρει των ῥιζικῶν σημείων ταύτας ἀπαλλάξαι πειρώμεθα, ὅτε, καὶ εἰ ὁ λόγος λογικὸς γένηται, οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ ἐπιτίθενται τῷ $\sqrt{}$, οἱ δὲ πρὸ αὐτοῦ, (ἤτοι τοῦ $\sqrt{}$) οἱ ἀριθμοί, ἢ οἱ ὅροι τοῦ Λόγου τυγχάνουσιν. Ὡς $\sqrt{27}$ καὶ $\sqrt{12}$. Ἄμφω ἄλογοι. Ἀλλὰ $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$. Καὶ $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$. Ἔχουσιν οὖν λόγον πρὸς ἀλλήλους $\sqrt{27} : \sqrt{12} = 3\sqrt{3} : 2\sqrt{3}$. Καὶ διαιρεθέντων τῶν ἐσχάτων ὅρων ἀμφοῖν διὰ τοῦ $\sqrt{3}$, ἔςαι $= 3 : 2$. Ὥςε $\sqrt{27} : \sqrt{12} = 3 : 2$. Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{80}$ καὶ $\sqrt{245}$ ἄμφω ἄλογοι. Ἀλλὰ $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$. καὶ $\sqrt{245} = \sqrt{49 \cdot 5} = 7\sqrt{5}$. Ἄρα $\sqrt{80} : \sqrt{245} = 4\sqrt{5} : 7\sqrt{5} = 4 : 7$.

§. 299. Ποσότητες ῥιζικαί, εἴτε λογικαί, εἴτε ἄλογοι, δύνανται ἀλλήλαις προςίθεσθαι, ἀφαιρεῖσθαι, πολλαπλασιάζεσθαι, καὶ διαιρεῖσθαι, μόνον εἰ, τῆς χρείας ἀπαιτούσης, μεταβάλλονται.

Περὶ τῆς τούτων Προσθέσεως, καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 300. Ἐπειδὴ μόνα τὰ ὁμοειδῆ προςιθέναι ἀλλήλοις, καὶ ἀφαιρεῖν ἔξεςιν, ἀναγκαῖον καὶ τὰς ῥιζικὰς ποσότητας ὁμοειδεῖς εἶναι, ὅ ἐςιν, οὐ μόνον τὰ $\sqrt{}$ τοὺς αὐτοὺς ἔχειν ἐκθέτας, ἀλλὰ καὶ τὰς μετ' αὐτὰ ($\sqrt{}$) ποσότητας ἴσας εἶναι χρή. π. χ. $\sqrt{3}$. καὶ ἔτι $\sqrt{3}$ καὶ προςεθεῖεν ἄν, καὶ ἀφαιρεθεῖεν. Καὶ προςεθεῖσαι μὲν $= 2\sqrt{3}$ (ὅτι $\sqrt{3}$, καὶ $\sqrt{3} = 1\sqrt{3}$, καὶ $1\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.) ἀφαιρεθεῖσαι δὲ $= 0$. Ἀθροίζονται γὰρ συνάμα, ἢ ἀφαιροῦνται· Ὡσαύτως καὶ $5\sqrt[3]{8}$ καὶ $2\sqrt[3]{8}$, καὶ

καὶ $\sqrt[3]{\ }\ 8$. ἃς προσθέντες ἕξομεν κεφάλαιον $8\sqrt[3]{8}$. Ἐπειδὴ γὰρ μετὰ τὸ $\sqrt{\ }$, ἡ αὐτὴ κεῖται ποσότης, ἤτοι 8, ἀναγκαῖον μόνον τοὺς πρὸ τοῦ $\sqrt{\ }$ ἀριθμοὺς προσαθροῖσαι. Ἔνθα δὲ πρὸ τοῦ $\sqrt{\ }$ οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὑπονοεῖται ἡ μονάς. Ὅθεν $5 + 2 + 1 = 8$. Ἀλλὰ $\sqrt{8}$ καὶ $\sqrt[3]{8}$ οὔτε προστεθῆναι, οὔτ' ἀφαιρεθῆναι ἀπ' ἀλλήλων δύνανται, ὡς μὴ ὁμοειδεῖς. Τὸ γὰρ $\sqrt{\ }$ διάφορον τοῦ $\sqrt[3]{\ }$. καίτοι τῶν μετὰ τὰ $\sqrt{\ }$ ἀριθμῶν τῶν αὐτῶν ὄντων. Πᾶσαι οὖν αἱ τοιαῦται ποσότητες, ἐπὶ μὲν τῆς προσθέσεως διὰ τοῦ (+), ἐπὶ δὲ τῆς ἀφαιρέσεως διὰ τοῦ (—) δείκνυνται. ὡς $\sqrt{8} + \sqrt[3]{8}$. ἢ $\sqrt{8} - \sqrt[3]{8}$. Παραπλησίως καὶ $\sqrt{4}$ καὶ $\sqrt{5} = \sqrt{4} + \sqrt{5}$. ἢ $\sqrt{4} - \sqrt{5}$. Καὶ $\sqrt[3]{6}$ καὶ $\sqrt[4]{5}$ ἤτοι $= \sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{5}$, ἢ $\sqrt[3]{6} - \sqrt[4]{5}$. Καὶ ἐν γένει. Ἐὰν ν καὶ μ ἀριθμοὺς πρὸ τῶν $\sqrt{\ }$ σημαίνωσιν, α τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς μετὰ τὰ $\sqrt{\ }$, καὶ ζ τὸν ἐκθέτην τῆς ῥίζης, π δὲ τὸν τῆς δυνάμεως, μόνον τὰς τοιαύτας τῶν ποσοτήτων τῶν ῥιζικῶν προσθεῖναι, ἢ ἀφελεῖν ἔχομεν. Ὡς $\nu\sqrt[\zeta]{\alpha^{\pi}}$ καὶ $\mu\sqrt[\zeta]{\alpha^{\pi}}$. Ἔνθα μ καὶ ν προσαθροίζονται, ἢ ἀφαιροῦνται. Ἐπὶ τῆς προσθέσεως, καὶ ἀφαιρέσεως ἐναντίας ἐχουσῶν ποσοτήτων, οὐκ ἐπιλησέον τῶν §. §. 46. 49.

Παραδείγμ. ἐν γράμμασι, καὶ ἀριθμοῖς, ἐν οἷς τὰ ὁμοειδῆ ὑπὸ τὰ ὁμοειδῆ τακτέον.

Πρόσθες $2\alpha\sqrt{\beta\gamma}-5\beta\sqrt{\delta\zeta}+\sqrt{\zeta}+\varsigma$ τῷ $-\alpha\sqrt{\beta\gamma}-\beta\sqrt{\delta\zeta}+2\sqrt{\zeta}+\varrho$.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Ἀποδίδ. δὲ} & 2\alpha\sqrt{\beta\gamma}-\varsigma\beta\sqrt{\delta\zeta}+\sqrt{\zeta}+\varsigma \\
 & -\alpha\sqrt{\beta\gamma}-\beta\sqrt{\delta\zeta}+2\sqrt{\zeta}+\varrho \\
\hline
\text{Τὸ κεφάλ.} & =\alpha\sqrt{\beta\gamma}-6\beta\sqrt{\delta\zeta}+3\sqrt{\zeta}+\varsigma+\varrho
\end{array}
$$

Ἐν ἀριθμοῖς.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Πρόσθες} & 5\sqrt{6}-3\sqrt[4]{5^2}+\sqrt{7}-8 \\
\text{τῷ} & -4\sqrt{6}+2\sqrt[4]{5^2}+3\sqrt{7}+2 \\
\hline
\text{Τὸ κεφάλ.} & =\sqrt{6}-\sqrt[4]{5^2}+4\sqrt{7}-6.
\end{array}
$$

Παράδειγμα Ἀφαιρέσεως.

$$
\begin{array}{ll}
\text{ἀπὸ τοῦ} & 3\beta\sqrt{\zeta\eta}-2\alpha\sqrt[4]{\zeta\mu}+4\sqrt[3]{\alpha\delta}-\delta \\
\text{ἄφελε} & +\beta\sqrt{\zeta\eta}+\alpha\sqrt[4]{\zeta\mu}-2\sqrt[3]{\alpha\delta}-\beta \\
 & -\qquad -\qquad\qquad +\qquad\quad + \\
\hline
\text{ἡ Διαφορὰ} & 2\beta\sqrt{\zeta\eta}-3\alpha\sqrt[4]{\zeta\mu}+6\sqrt[3]{\alpha\delta}-\delta+\beta
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Ἄφελε ἀπὸ τοῦ} & 5\sqrt[3]{\ }\ -\sqrt{48}-3\sqrt{8^2}-6\sqrt{2}-8 \\
\text{τὸ} & 2\sqrt[3]{6}-2\sqrt{48}+\sqrt{8^2}-6\sqrt{2}-5 \\
 & -\qquad +\qquad\quad -\qquad +\qquad + \\
\hline
\text{ἡ Διαφορὰ} & 3\sqrt[3]{6}+\sqrt{48}-4\sqrt{8^2}\qquad -3
\end{array}
$$

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Ῥιζικῶν Ποσοτήτων.

§. 301. Εἰ καὶ ἐνταῦθα κυρίως περὶ τῶν Ἀλόγων ποσοτήτων ὁ λόγος, ὡς τῶν Λογικῶν, π. χ.

$\sqrt{4}$,

$\sqrt{4}$, καὶ $\sqrt[3]{8}$, κτ. ἀκριβῶς ἐκφέρεσθαι δυναμένων, (ἔςι γὰρ $\sqrt{4} = 2$, καὶ $\sqrt[3]{8} = 2$, κτ.) ἀλλὰ τὸ λεγόμενον ἐν γένει καθ' ἑκατέρων ῥηθήσεται. Ἐνίοτε γὰρ οὐχ ὁλοσχερῶς τὰς Λογικὰς ἐκφέρειν βουλόμεθα. Καὶ ἵνα ἐκ τῶν ἐλασσόνων πρὸς τὰ μείζω χωρήσωμεν, πρὸ πάντων σημειωτέον πᾶσαν τετράγωνον ῥιζικὴν ποσότητα, εἴτ' ἐξ ἁπλῆς, εἴτε καὶ ἐκ συμπεπλεγμένης συνίςαται ποσότητος, μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθεῖσαν, αὐτὴν τὴν ποσότητα τοῦ ῥιζικου ἄνευ παράγειν σημείου. Ὡς $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} = \alpha$. Καὶ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 4$. Καὶ $\sqrt{12} \cdot \sqrt{12} = 12$, κτ. Αὖθις $\sqrt{(\alpha^2 + \beta - \chi)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \beta - \chi)} = (\alpha^2 + \beta - \chi)$. ἢ $\sqrt{(25 + 16 - 9)} \cdot \sqrt{(25 + 16 - 9)} = 25 + 16 - 9 = 32$.

Τοῦτο δὲ ῥαδίως κατανοήσομεν, εἰδότες, ὅτι πᾶσαν ποσότητα θεωρεῖν ἔχομεν, ὡς διὰ πολλαπλασιασμοῦ δύω ποσοτήτων ἀναφυεῖσαν. Αἱ δὲ τυγχάνουσιν αἱ $\sqrt{}$. Αὗται οὖν πολλαπλασιασθεῖσαι τὴν ποσότητα δήπου αὐτὴν παράξουσιν. Ὃ καὶ ταῖς Ἀλόγοις, καὶ Λογικαῖς ἁρμόζει. Καὶ ἡ ἄλογος γὰρ, ποσότης τῷ ὄντι τυγχάνει, εἰ καὶ οἱ ἡμέτεροι χαρακτῆρες αὐτὴν παραςῆσαι οὐ δύνανται.

Δύω ἴσαι Κυβικαὶ ῥίζαι, ἐπ' ἀλλήλας ἀχθεῖσαι, παρέχουσιν Ἐκθέτην τῆς Δυνάμεως $\frac{2}{3}$. π. χ. $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$. Τὸ γὰρ $\sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{3}}$. Ἄρα $\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}}$. Πολλαπλασιασθέντος δ' ἔτι ἅπαξ μετὰ τοῦ $\sqrt[3]{\alpha}$, προκύψει α. Ὅτι $\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1+1+1}{3}} = \alpha^{\frac{3}{3}} = \alpha$.

Ἐν γένει, ἑκάςη ῥιζικὴ ποσότης, εἰ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου

 ἀπαλ-

ἀπαλλαχθῆναι δέοι, τοσάκις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιαστέα, ἡλίκος ὁ ἐκθέτης τῆς ῥίζης. Τὸ δ' αὐτὸ τοῦτο χώραν ἔχει καὶ περὶ τῶν συμπεπλεγμένων ποσοτήτων. Ὡς $\sqrt[2]{(\alpha+\beta)}.\ \sqrt[3]{(\alpha+\beta)}.\ \sqrt[3]{(\alpha+\beta)} = (\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}}.\ (\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}}.\ (\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}} = (\alpha+\beta)^{\frac{3}{3}} = \alpha+\beta.$

§. 302. Ὅτε ῥιζικὰς ποσότητας μετ' ἄλλων ποσοτήτων πολλαπλασιάσαι πρόκειται, εἴτε ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ εἶεν, εἴτε καὶ κλασματώδεις, πολλαπλασιάζομεν τὸν πρὸ τοῦ $\sqrt{\ }$ κείμενον ἀριθμὸν, ἢ ποσότητα μετὰ τῶν ἄλλων ποσοτήτων. Ἐὰν δὲ οὐδεμία (ποσ.) πρὸ ἐκείνου (τοῦ $\sqrt{\ }$) κέοιτο, προτίθεται αὐτοῦ ὁ ἀριθμὸς, (ἢ ποσότης) ὁ δι' οὗ πολλαπλασιάζομεν. ἔνθα καὶ τῶν κανόνων, τῶν τοῖς $+$, καὶ $-$ σημείοις ἀνηκόντων, λόγον ποιητέον. Ἐὰν δὲ οὐδεμία ποσότης πρὸ ἀμφοῖν τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων ὑπάρχῃ, οὐδεμία καὶ πολλαπλασιαστέα, ἤπου καθ' ἑαυτὸ δῆλον, ὡς οὐδεμία παροῦσα. π. χ. $(4\sqrt{3}).6 = 4.6\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$. Καὶ $(-5\sqrt[3]{6}) - 4 = +20\sqrt[3]{6}$. Καὶ $(-6\sqrt{24}).+4 = -24\sqrt{24}$. Καὶ $\sqrt{18}.5$ (ἔνθα οὐδεὶς ἀριθμὸς πρὸ τοῦ $\sqrt{\ }$ κεῖται) $= 5\sqrt{18}$. Καὶ $\sqrt{3}.-4 = -4\sqrt{3}$ Καὶ $\sqrt{(\alpha\beta)}.\gamma = \gamma\sqrt{\alpha\beta}$. Καὶ $-\sqrt{(\delta\zeta)}.\beta = -\beta\sqrt{\delta\zeta}$, κτ. Τὰς τοιαύτας ποσότητας καὶ ἐν μέρει μετατρέπειν ἔνι. (§. 296.)

Δύω ῥιζικῶν ποσοτήτων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιαζομένων, αἱ ῥίζαι ἤτοι τοὺς αὐτοὺς, (ὡς $\sqrt[3]{8}$ καὶ $\sqrt[3]{5}$) ἢ οὐχὶ, (ὡς $\sqrt[3]{8}$ καὶ $\sqrt[2]{5}$) ἐκθέτας ἔχουσιν. Εἰ οὖν τὸ β'. οὕτως αὐτὰς μεταβλητέον, (§. 204.) ὥστε τοὺς αὐτοὺς λαβεῖν ἐκθέτας. Εἶτα πολ-

πολλαπλασιαστέον α΄. τὰς ποσότητας μετ᾽ ἀλλήλων, τὰς πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ κειμένας, μεθ᾽ ὃ καὶ τὰς μετὰ τὸ $\sqrt{}$, προτιθέντας τούτου (τοῦ β΄ παραγομένου) τὸ κοινὸν $\sqrt{}$ μετὰ τοῦ κοινοῦ ἐκθέτου, καὶ μὴ ἀμελοῦντας τῶν περὶ τοῦ $+$ καὶ $-$ κανόνων. Καὶ τελευταῖον, εἰ ἐγχωρεῖ, κατὰ τὸ (§. 296.) πάσας συνάγειν ὑπὸ τὸ ἁπλούστατον ἀκτέον σχῆμα, καὶ, εἰ ἀναγκαῖον, καὶ τοὺς πρὸ τοῦ $\sqrt{}$ κειμένους ἀριθμοὺς ὑπὸ τὸ ῥιζικόν. (§. 295.)

Παραδειγμ. $3\beta \sqrt{(\gamma\delta)} \cdot 4\alpha \sqrt{(\gamma\delta)} = 12\,\alpha\beta \sqrt{\gamma\delta} \cdot \sqrt{\gamma\delta} = 12\,\alpha\beta\gamma\delta$ (§. ἀνωτ.)

Ὡσαύτως $2\beta \sqrt{(\gamma\delta)} \cdot -3\gamma \sqrt{(\beta\gamma)} = -6\gamma\beta \sqrt{(\beta\gamma^2\delta)} = -6\gamma\beta\gamma \sqrt{(\beta\delta)} = -6\gamma^2\beta \sqrt{(\beta\delta)}$. Καὶ $-\sqrt[4]{\gamma^3} \cdot -\sqrt[4]{\gamma} = +\sqrt[4]{\gamma^4} = + = +\gamma^{\frac{4}{4}} = +\gamma$.

Ἐν ἀριθμοῖς. $5\sqrt{18} \cdot 4\sqrt{2} = 20\sqrt{36} = 20 \cdot 6 = 120$. Καὶ $-3\sqrt{12} \cdot 2\sqrt{2} = -6\sqrt{24} = -6\sqrt{4 \cdot 6} = -6 \cdot 2\sqrt{6} = -12\sqrt{6}$.

Ἐὰν οἱ τῶν ῥιζῶν ἐκθέται ἄνισοι ὦσιν, εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀκτέοι, ὡς εἴρηται, ἐκθέτας. π. χ. $\sqrt[2]{(\gamma\delta)} \cdot \sqrt[3]{(\gamma^2\delta)} = (\gamma\delta)^{\frac{1}{2}} \cdot (\gamma^2\delta)^{\frac{1}{3}} = (\gamma\delta)^{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}} \cdot (\gamma^2\delta)^{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = (\gamma\delta)^{\frac{3}{6}} \cdot (\gamma^2\delta)^{\frac{2}{6}}$ $= \sqrt[6]{(\gamma\delta)^3} \cdot \sqrt[6]{(\gamma^2\delta)^2}$. Καὶ ἐὰν ἐνεργείᾳ αἱ ποσότητες εἰς τὰς δυνάμεις ἀρθῶσι τὰς δεικνυμένας, ἔσονται $= \sqrt[6]{(\gamma^3\delta^3)} \cdot \sqrt[6]{(\gamma^4\delta^2)} = \sqrt[6]{(\gamma^7\delta^5)}$. Αὖθις $3\sqrt[6]{\gamma} \cdot -2\sqrt[4]{\zeta} = -6\gamma^{\frac{1}{6}} \cdot \zeta^{\frac{1}{4}} = -6\gamma^{\frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4}} \cdot \zeta^{\frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6}} = -6\gamma^{\frac{4}{24}} \cdot \zeta^{\frac{6}{24}}$

$= -$

$= - 6\gamma^{\frac{2}{12}} \cdot \zeta^{\frac{3}{12}} = - 6 \sqrt[12]{\gamma^2 \zeta^3}$. Ἐν ἀριθμοῖς. $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}} \cdot 2^{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = 5^{\frac{3}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{125 \cdot 4} = \sqrt[6]{500}$. Καὶ $2 \sqrt[3]{5} \cdot - 3 \sqrt[4]{6} = -6 \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{4}} = -6 \cdot 5^{\frac{4}{12}} \cdot 6^{\frac{3}{12}} = -6 \sqrt[12]{5^4 \cdot 6^3} = -6 \sqrt[12]{625 \cdot 216} = \sqrt[12]{135000}$.

Οὕτω προπαρασκευασθεὶς πᾶς τις δυνήσεται πολλαπλασιάζειν μετ᾽ ἀλλήλων καὶ πολυμερεῖς Λογικὰς, καὶ Ἀλόγους ποσότητας. ὅτι καὶ αἱ πολυμερεῖς ἐκ μονομερῶν διὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ συγκροτοῦνται. Πρὸ μέντοι τοῦ ταύτων πολλαπλασιασμοῦ, πάσαις ταῖς ῥιζικαῖς ποσότησι τοὺς αὐτοὺς δοτέον ἐκθέτας.

Προκείσθω πολλαπλασιασθῆναι

$$\begin{array}{rl} & \alpha\beta\sqrt{\gamma} + \delta\sqrt{\zeta} \\ \text{μετὰ τοῦ} & 2\beta\sqrt{\gamma} + \delta\sqrt{\zeta} \\ \hline & + \alpha\beta\delta\sqrt{\zeta\gamma} + \delta^2\zeta \\ & + 4\beta^2\gamma + 2\beta\delta\sqrt{\zeta\gamma} \\ \hline & 4\beta^2\gamma + 4\beta\delta\sqrt{\zeta\gamma} + \delta^2\zeta. \end{array}$$

Καὶ

Καὶ

$$\begin{array}{l} 1 + \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \\ \hline \quad + 1\sqrt{2} + 2 \\ 1 + 1\sqrt{2} \\ \hline 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}. \end{array}$$

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Ῥιζικῶν Ποσοτήτων.

§. 303. Ἀρξώμεθα ὡσαύτως ἀπὸ τῶν εὐχερεςάτων. Ἔςωσαν ὁ Διαιρετέος, καὶ ὁ Διαιρέτης τῶν μονομερῶν, ἢ ἁπλῶν ποσοτήτων, καὶ ἤτοι ὁ Διαιρέτης, ἢ ὁ Διαιρετέος Ἄλογος, ὁ δ' ἕτερος Λογικὸς, ἢ ἄμφω Ἄλογοι.

Ἐὰν ὁ Διαιρετέος Ἄλογος ᾖ, ὡς $\sqrt{\frac{21}{7}}$, ἀναγκαῖον ἄμφω τὰς ποσότητας ὑπὸ τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν θεῖναι σημεῖον, ὅπερ κατὰ τὸ (§. 295.) ῥαδίως ἐκπερανθήσεται, καὶ τηνικαῦτα εὐχερῶς τὴν διαίρεσιν τελέσομεν, τῶν ποσοτήτων εἰς παράγοντας ἀνατεμνομένων, εἰ ἄλλως αὗται διαιρέσιμοι, ἢ καὶ ἐνεργείᾳ ταύτας διαιρεῖν, καὶ μὴ μόνον τοῖς σημείοις δεικνύναι βουλόμενοι, ἐν ᾧ καὶ τὰ περὶ τοῦ $+$, καὶ $-$ καλῶς ἐν νῷ καθέξομεν. π. χ. $\sqrt{\frac{21}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{3\cdot 7}}{\sqrt{7\cdot 7}}$ $= \sqrt{\frac{3}{7}}$. Καὶ $\sqrt[3]{\frac{24}{6}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{\sqrt[3]{4.6}}{\sqrt[3]{6.6.6}} =$ $\sqrt[3]{\frac{4}{6.6}} = \sqrt[3]{\frac{4}{36}} = \sqrt[3]{\frac{4}{4\cdot 9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ $= \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Ἐὰν