θ'. δύν. $\alpha^9 + 9\alpha^8\beta + 36\alpha^7\beta^2 + 84\alpha^6\beta^3$
$+ 126\alpha^5\beta^4 + 126\alpha^4\beta^5 + 84\alpha^3\beta^6$
$+ 36\alpha^2\beta^7 + 9\alpha\beta^8 + \beta^9$.

ι'. δύν. $\alpha^{10} + 10\alpha^9\beta + 45\alpha^8\beta^2 + 120\alpha^7\beta^3$
$+ 210\alpha^6\beta^4 + 252\alpha^5\beta^5 + 210\alpha^4\beta^6$
$+ 120\alpha^3\beta^7 + 45\alpha^2\beta^8 + 10\alpha\beta^9$
$+ \beta^{10}$.

Ἐὰν ληφθῇ διώνυμον, οὗ ὁ ἕτερος τῶν ὅρων ἀποφατικὸς, ὡς α — β, αἵτε δυνάμεις, καὶ οἱ τούτων συνεργοὶ χωρήσουσιν ὡσαύτως, εἰ μὴ ὅτι οἱ ἄρτιοι ὅροι, οἷον ὁ β'. δ'. ϛ'. η', κτ. γίνονται ἀποφατικοὶ, ἔνθα δηλονότι αἱ περιτταὶ δυνάμεις τοῦ β πάρεισι.

§. 286. Ὡς ἐκ τοῦ πίνακος προφανὲς, τῷ α καὶ β ἐν τῇ α'. δυνάμει οὐδεὶς ἐνυπάρχει ἐκθέτης, ὡς καὶ ἡ τοῦ πράγματος φύσις τοῦτο ἀπαιτεῖ, ἢ ἀκριβέστερον φάναι, τοῦ α, καὶ β ὁ ἐκθέτης = 1 ἐν τῇ α'. δυνάμει. Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν δυνάμεων, ἐν μὲν τῷ α'. ὅρῳ τὸ α μόνον κεῖται ἐν τῇ ὑπερτάτῃ δυνάμει, ἐν δὲ τῷ β'. καὶ τοῖς λοιποῖς μετὰ τοῦ β πεπολλαπλασιασμένον ὁρᾶται, μιᾷ δυνάμει τοῦ πρὸ αὐτοῦ α ἐλαττούμενον, μέχρις οὗ παντάπασιν ὁ τῆς αὐτοῦ δυνάμεως ἐκθέτης ἐκλίπῃ. Τὸ δὲ β ἄρχεται ἐν τῷ β'. ὅρῳ ἐκθέτου ἀμοιροῦν, ἀείτε χωρεῖ δυνάμει μιᾷ αὐξανόμενον, μέχρις ἂν τῆς ὑπερτάτης ἐφίκηται δυνάμεως, ἔνθα ἡ σειρὰ πέρας λαμβάνει. τουτέστιν, οἱ μὲν τοῦ β ἐκθέται διηνεκῶς αὔξουσιν, οἱ δὲ τοῦ α μειοῦνται.

§. 287. Ῥᾴδιον οὖν ἔσται τοὺς ὅρους οἱασοῦν δυνάμεως εὑρεῖν, ἡλικηοῦν ἂν εἴη, τὰ ἐν τῷ ἀνωτ. §. παρατηροῦντας. Οὕτως ἂν οἱ ὅροι, τοῦ

α + β

$\alpha + \beta$ εἰς τὴν ιβ'. ἀρθέντος δύναμιν εἶεν, α^{12}, $\alpha^{11}\beta$, $\alpha^{10}\beta^2$, $\alpha^9\beta^3$, $\alpha^8\beta^4$, $\alpha^7\beta^5$, $\alpha^6\beta^6$, $\alpha^5\beta^7$, $\alpha^4\beta^8$, $\alpha^3\beta^9$, $\alpha^2\beta^{10}$, $\alpha\beta^{11}$, β^{12}. Ἐκ τούτου δὲ, ὡς καὶ ἐκ τῶν προτέρων, δῆλον τὴν σειρὰν ἑνὶ ὅρῳ πλεονεκτεῖν τοῦ ἀριθμοῦ τῆς ζητουμένης δυνάμεως. Ἐπὶ γὰρ τῆς δ'. δυνάμεως ε'. οἱ ὅροι. ἐπὶ τῆς ς'. ἑπτά. ἐπὶ τῆς ιβ'. δεκατρεῖς. Καὶ ἐν γένει, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῆς δυνάμεως $= \mu$ τεθῇ, οἱ ὅροι αὐτῆς ἔσονται ἀναγκαίως $\mu + 1$. Ἀναγκαῖον δὲ καὶ τὸ τοὺς συνεργοὺς εὑρεῖν. Ὡς ἐν τῷ πίνακι ἐφ' ἁπασῶν π ρεστι καθορᾶν τῶν δυνάμεων, ἀείποτε ὁ β'. ὅρος τῆς σειρᾶς συνεργὸν κέκτηται τὸν ἀριθμὸν, ὅς ὁ ἐκθέτης τῆς προηγηθείσης ὑπερτάτης δυνάμεως τοῦ α ἦν, ἤτοι τοῦ α'. τῆς σειρᾶς ὅρου. Οὕτως ἐπὶ τῆς γ'. δυνάμεως ὁ συνεργὸς τοῦ β'. ὅρου $= 3$. ἐπὶ τῆς ε'. $= 5$. ὁ αὐτὸς δ' ἀριθμὸς ἦν καὶ τῷ α'. ὅρῳ ὁ ἐκθέτης τῆς αὐτοῦ δυνάμεως. Τῶν δ' ἑπομένων ὅρων οἱ συνεργοὶ τόνδε τὸν τρόπον ἀναφύονται. Πολλαπλασίασον ἕκαστον ὅρον, ἀπὸ τοῦ γ'. ἀρχόμενος, μετὰ πάντων τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων τῶν προηγηθέντων ὅρων, τῶν τοῦ α φημὶ, ἐξαιρουμένων τῶν δυνάμεων τοῦ α ἐκείνου τοῦ ὅρου, οὗ ὁ συνεργὸς ζητεῖται, καὶ δίελε τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον διὰ τοῦ παραγομένου πάντων τῶν τοῦ β. ἐκθετῶν τῶν προηγησαμένων ὅρων, καὶ αὐτοῦ τούτου τοῦ ὅρου, οὗ ὁ συνεργὸς εἰς ζήτησιν πρόκειται. Ἢ καὶ τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τοῦ β'. γινομένης ὅρου, ὁ κανὼν κρατεῖ ὡσαύτως, καὶ οὕτως εὑρήσεις τοὺς συνεργοὺς ἁπάντων τῶν ὅρων. Ληφθήτω εἰς παράδειγμα ἡ ς'. δύναμις, ἧς οἱ ὅροι (§. 285.) α^6, $\alpha^5\beta$, $\alpha^4\beta^2$, $\alpha^3\beta^3$, $\alpha^2\beta^4$, $\alpha\beta^5$, β^6. καὶ ζητηθήτωσαν τούτων οἱ συνεργοί. α'. τοῦ β'. ὅρου, ἢ τοῦ $\alpha^5\beta$. Κατὰ τὸν κανόνα λαβὼν τὸ παραγόμ. τῶν ἐκθετῶν τῶν προηγηθεισῶν δυνάμεων τοῦ α, (τῆς δυνάμεως τοῦ α τούτου τοῦ ὅρου, ἤτοι τοῦ β'. ἐξαιρουμένης) δίελε αὐτὸ

διὰ

δια τοῦ παραγομένου τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων τῶν προηγησαμένων ὅρων τοῦ β, καὶ τῆς δυνάμεως τούτου τοῦ ὅρου συνάμα ληφθείσης. Πρὸ τοῦ β΄. ὅρου ἦν μόνον εἷς ὅρος α^6, ἐν ᾧ οὐδὲν β παρὸν ἐτύγχανεν. Ὥστε καὶ οὐδεμία τούτου δύναμις ἐν τῷ β΄. ὅρῳ· (ἢ μᾶλλον δύναμις αὐτοῦ (τοῦ β) ἐν τούτῳ τῷ ὅρῳ ἡ 1) Ἀλλὰ β, ἢ β^1 παραληπτέον εἰς παραγόμενον τοῦ διαιρέτου, ἢ ὡς διαιρέτην. Ὁ συνεργὸς ἄρα τοῦ β΄. ὅρου $= \frac{6}{1} = 6$. Τοῦ γ΄. ὅρου ὁ συνεργός. Αἱ δυνάμεις τῶν προηγησαμένων ὅρων τοῦ α ἦσαν 6 καὶ 5, μὴ παραλαμβανομένης τῆς δυνάμεως τοῦ α τοῦ ἀνὰ χεῖρας ὅρου. αἱ δὲ τῶν προηγηθέντων ὅρων τοῦ β μετὰ καὶ τῆς δυνάμεως τοῦ β τοῦδε τοῦ ὅρου = 1 καὶ 2. Ὁ συνεργὸς ἄρα τούτου τοῦ ὅρου $= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Ὡσαύτως καὶ τοῦ δ΄. ὅρου ὁ συνεργὸς $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$. Τοῦ ε΄. $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$. Τοῦ ς΄. $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$. Τοῦ ζ. $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1$. ἥτις οὐ προτίθεται τῆς ποσότητος, ὡς μὴ πολλαπλασιάζουσα. Εὕρηνται τοίνυν οἱ συνεργοὶ τοῦ $(\alpha + \beta)$. Ἡ δὲ σειρὰ εἴη ἂν $\alpha^6 + \frac{6}{1}\alpha^5\beta + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}\alpha^4\beta^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3\beta^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\alpha^2\beta^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\alpha\beta^5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\beta^6 = \alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6$. Ὅ τῷ ἐν τῷ πίνακι συνᾴδει, καὶ πᾶς τις διὰ πολλαπλασιασμοῦ εὑρεῖν ἔχει. Οὕτως ἂν εὑρεθεῖεν πάντες οἱ συνεργοὶ ἁπάντων τῶν κατὰ πάσας τὰς δοθείσας δυνάμεις ὅρων. Ἀλλ᾽ ἐν τούτοις μετὰ προσοχῆς παρατηρουμένοις ὁρῶμεν ἕκαστον ὅρον ἔντε τῷ ἀριθμητῇ, καὶ παρονομαστῇ

ἐξ

ξῶν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ὁ αὐτοῦ συνεργὸς συγκροτεῖται, μονάδι ἐλάσσονας χαρακτῆρας ἔχειν, ἢ ἡ τάξις τοῦ ζητουμένου ὅρου τυγχάνει. π. χ. ὁ δ'. ὅρος ἔχει μόνον τρεῖς χαρακτῆρας ἐν τῷ ἀριθμητῇ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθησομένους, καὶ τρεῖς ἐν τῷ παρονομ. ὡσαύτως μετ' ἀλ. πολλαπλ. Πρὸς τούτοις τοῦ μὲν ἀριθμητοῦ τοὺς χαρακτῆρας ἀπὸ τηλικούτου ἄρχεσθαι ἀριθμοῦ, εἰς ἡλίκην δυναμιν $\alpha + \beta$ ἀρθῆναι δέοι. Ἕκαϛον δὲ τούτων (τῶν χαρ:) μονάδι τοῦ προηγουμένου ἐλαττοῦσθαι, ἢ ἕπεσθαι ἀλλήλοις κατὰ φυσικὴν τάξιν, ἀντίϛροφον μέντοι. Ἐν δὲ τῷ παρονομ. ἀείποτε ἀπὸ μονάδος τὴν ἀρχὴν γίνεσθαι, τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν ἐν φυσικῇ τάξει ἀλλήλους διαδεχομένων Καὶ τούτου καθόλου ὄντος, οὐ χαλεπὸν ἑκάϛου ὅρου οἱασοῦν δοθείσης δυνάμεως τοὺς συνεργοὺς, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, καὶ ὅλον τὸν ὅρον εὑρεῖν, εἰδότας προσέτι, καὶ ὅσοι ὅροι ἑκάϛῃ δυνάμει ἐνυπάρχουσι· Πρὸ πάντων οὖν εὑρετέον τὰς δυνάμεις τοῦ α καὶ β. ἡ τοῦ β δύν. ἀεὶ μονάδι ἐλάττων τοῦ κατὰ τὸν ὅρον ἀριθμοῦ. τὴν δὲ τοῦ α δύν. ἐν ἑκάϛῳ ὅρῳ ἀνακαλύπτομεν, ἀπὸ τῆς ὑπερτάτης δυνάμεως ἀφαιροῦντες τὸν ἐκθέτην τοῦ β, τοῦ ἐν τῷ ἀνὰ χεῖρας ὅρῳ. Οἷον ὁ ζ. ὅρος τοῦ $(\alpha + \beta)^{10}$ ἐϛὶν ὁ $\alpha^4 \beta^6$ Τὸ γὰρ β τοῦ ζ' ὅρου ἐν τῇ ϛ' δυνάμει τυγχάνει. β^6. ἄρα τὸ α ἐν τῷ αὐτῷ ὅρῳ ἔϛαι $\alpha^{10-6} = \alpha^4$. Ἐν τῷ ε' ὅρῳ τοῦ $(\alpha + \beta)^7$ τὸ μὲν β ἐν τῇ δ'. δυνάμει, ὡς β^4. τοῦ δὲ α ἡ δύναμις $= \alpha^{7-4} = 3$. Ὥϛε ἄμφω, $\alpha^3 \beta^4$. Παραπλησίως καὶ ὁ η'. ὅρος τοῦ $(\alpha + \beta)^{10} = \alpha^{10-7} \beta^7 = \alpha^3 \beta^7$. Ῥᾷϛα οὖν ἤδη καὶ τοὺς συνεργοὺς εὑρήσομεν. Ἔϛω π. χ. ὁ συνεργὸς τοῦ ζ. ὅρου τῆς 10: ης δυνάμεως τοῦ $\alpha + \beta$ εὑρετέος. Ὁ ζ. ὅρος $= \alpha^4 \beta^6$. Ὁ δὲ συνεργὸς τὸ παραγόμενον τυγχάνει ἐξ ἀριθμῶν ἐν μὲν τῷ ἀριθμητῇ ἀπὸ τοῦ 10 ἀρχομένων, καὶ διηνεκῶς μονάδι ἐλαττουμένων, ἐν δὲ τῷ παρονομαϛῇ ἀπὸ 1

 μ. χ.

μέχρι τοῦ 6. Ἄρα ὁ ζ. ὅρος τοῦ $(\alpha + \beta)^{10}$ $= \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}\, \alpha^4 \beta^6 = 210 \alpha^4 \beta^6$. Ὁ ε'. ὅρος τοῦ $(\alpha + \beta)^7 = \frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ $\alpha^3 \beta^4 = 35 \alpha^3 \beta^4$.

§. 288. Ἔστω ἡ δύναμις, εἰς ἥν τὸ δυώνυμον ἐξῆρται $= \mu$. Ἐπεὶ οὖν κατὰ τὸ ἐν §. §. 286. 287. ἡ τοῦ α δύναμις ἐν τοῖς ἑπομένοις ὅροις ἀεὶ μονάδι μειοῦται, ἡ δὲ τοῦ β ἐν μὲν τῷ β'. ἀπὸ 1 ἄρχεται, ἐν δὲ τοῖς ἐφεξῆς διηνεκῶς μονάδι προσαύξει, καὶ ὁ συνεργὸς τοῦ β'. ὅρου ὁ ἐκθέτης τῆς ὑπερτάτης δυνάμεως τοῦ α, διὰ 1 διαιρεθείς, τῶν δ' ἐχομένων ὅρων οἱ συνεργοὶ τὸ πηλίκον κλάσματος τυγχάνουσιν, οὗ οἱ ὅροι, κατὰ τὰ ἀνωτ. εὕρηνται, ἐκδηλωθείη ἂν τὸ Δυώνυμον γενικώτατα διὰ τῆς δε τῆς σειρᾶς.

$$(\alpha + \beta)^{\mu} = \alpha^{\mu} + \frac{\mu}{1}\alpha^{\mu-1}\beta + \frac{\mu \,.\, \mu-1}{1 \,.\, 2}\alpha^{\mu-2}\beta^{2} + \frac{\mu \,.\, \mu-1 \,.\, \mu-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\alpha^{\mu-3}\beta^{3}$$
$$+ \frac{\mu \,.\, \mu-1 \,.\, \mu-2 \,.\, \mu-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\alpha^{\mu-4}\beta^{4}$$
$$+ \frac{\mu \,.\, \mu-1 \,.\, \mu-2 \,.\, \mu-3 \,.\, \mu-4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$$
$\alpha^{\mu-5}\beta^{5}$, κτ. ἥτις ἐκπερανθήσεται, ἢ ἧς ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς δυνάμεως εἰς πέρας ἥξουσι γραφόμενοι, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α (ἤτοι τοῦ μ) ἀφαιρούμενος, ἴσος ᾖ τῷ μ. π. χ. εἰ $\mu = 4$ εἴη, ἐκπερανθείη ἂν καὶ ἡ σειρὰ ἐπὶ τοιούτου ὅρου $\alpha^{\mu-4}\beta^{4}$.

Την

Τηνικαῦτα γὰρ ἔςαι $\alpha^{4-4}\beta^4 = \alpha^0\beta^4$. Ἀλλὰ ποσότης ἐν τῇ ο δυνάμει $= 1$. (§. 198.) ἄρα $\alpha^0\beta^4 = 1\beta^4 = \beta^4$, ὅς ὁ ἔσχατός ἐςιν ὅρος, ᾧ οὐδεὶς συνεργὸς, ὡς ἐν τοῖς προηγηθεῖσι σαφῶς κατείδομεν. Καὶ β ἔςαι τηνικαῦτα ἐν τῇ ὑπερτάτῃ δυνάμει, εἰς ἣν τὸ διώνυμον ἔδει ἐξαρθῆναι.

Τὸ μ ὡς πᾶσαν ποσότητα ἐν γένει παριςῶν καὶ κλάσμα ὑποδηλώσει, καὶ ὁ τῆς μνήμης μὴ ἀποβαλὼν, ὃ §. 200. εἴρηται, ῥαδίως συνήσει, ὅτι καὶ ῥίζαν διὰ τούτου τοῦ διωνύμου ἐξάγειν ἔχομεν. π. χ. Ἔςω $\mu = \frac{1}{3}$. Καὶ ἔςαι $(\alpha + \beta)^\mu = (\alpha + \beta)^{\frac{1}{3}}$. Τὸ δὲ ἴσα δύναται τῷ $\sqrt[3]{(\alpha+\beta)}$, ἢ τῇ κυβικῇ ῥίζῃ αὐτοῦ. Ἔςω $\mu = \frac{3}{4}$. Ὥςε $(\alpha + \beta)^\mu = (\alpha + \beta)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(\alpha+\beta)^3}$.

§. 289. Ἐκκείσθωσαν καὶ παραδείγμ. τούτων. Εἰ δέοι ς εἰς τὴν ς'. ἐξαρθῆναι δύναμιν, εἴη ἂν κατὰ τὸ $(\alpha + \beta)^\mu$, $\mu = 6$. καὶ $(\alpha + \beta) = 5$. Δίελε τὸν ς, ᾗ βούλει. Ἔςω $\alpha = 2$. ἄρα $\beta = 3$. Γράψας οὖν ἤδη τὸν ἐν γένει τύπον τοῦ ἀνωτ. §. σύνθες κατὰ τοῦτον τὴν σειρὰν, ἥτις ἔςαι $(2 + 3)^6$

$$= 2^6 + \frac{6}{1} 2^5 \cdot 3 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} 2^4 \cdot 3^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^3 \cdot 3^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^2 \cdot 3^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 2 \cdot 3^5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} 3^6$$

$$= 2^6 + 6 \cdot 2^5 \cdot 3 + 15 \cdot 2^4 \cdot 3^2 + 20 \cdot 2^3 \cdot 3^3 + 15 \cdot 2^2 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2 \cdot 3^5 + 3^6.$$

Καὶ τῶν ποσοτήτων ἐνεργείᾳ εἰς δυνάμεις ἀρθεισῶν, $= 64 + 6 \cdot 32 \cdot 3 + 15 \cdot 16 \cdot 9 + 20 \cdot 8 \cdot 27 + 15 \cdot 4 \cdot 81$

 + 6 .

$+ 6 . 2 . 243 + 729 = 64 + 576 + 2160 + 4320 + 4860 + 2916 + 729 = 15625.$

Ἀλλ' εἴποι ἄντις πολλῷ ταχύτερον 5 κατὰ τὸν συνήθη τρόπον ἤρθη ἂν εἰς τὴν ϛ'. δύναμιν, ἢ οὕτως. Εἰσὶ μέντοι δυσχερέστερα παραδείγμ. ἔνθα τοῦτο πλεῖστα συμβάλλεται, καὶ μάλιστα ἐπὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν μετὰ μείζονος ἐκθέτου. π. χ. Ἔστω ἐξακτέα ἡ $\sqrt{6}$. Ὥστε $(\alpha + \beta)^{\mu}$. Ἐνταῦθα $\alpha + \beta = 6$. καὶ $\mu = \frac{1}{2}$. Τεθήτω α ὡς 4, καὶ β ὡς 2. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, προτεθήτω ἡ σειρὰ τοῦ Διωνύμου τοῦ $(4 + 2)^{\frac{1}{2}}$. Ἐὰν οὖν γράφωσιν ἐν τῷ γενικῷ τύπῳ τοῦ Διωνύμου §. ἀνωτ. ἀντὶ τοῦ α καὶ β, καὶ μ τὰ ἰσοδύναμα, ὅπερ οὐ δυσχερῶς γενήσεται, τοῦ τύπου πρὸ ὀφθαλμῶν ληφθέντος, ἕξομεν τὴν ἑπομένην σειράν. $(4 + 2)^{\frac{1}{2}} =$

$$4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} 4^{\frac{1}{2} - 1} . 2 + \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} - 1}{1 . 2} 4^{\frac{1}{2} - 2} 2^2 + \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} - 1 . \frac{1}{2} - 2}{1 . 2 . 3} 4^{\frac{1}{2} - 3} 2^3 + \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} - 1 . \frac{1}{2} - 2 . \frac{1}{2} - 3}{1 . 2 . 3 . 4} 4^{\frac{1}{2} - 4} . 2^4,$$

κτ. Τοῦτο δὲ, ἐὰν οἱ συνεργοὶ προσηκόντως πολλαπλασιασθῶσι, καὶ διαιρεθῶσιν $= 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} . 4^{\frac{1}{2} - 1} . 2 - \frac{1}{8} . 4^{\frac{1}{2} - 2} 2^2 + \frac{1}{16} . 4^{\frac{1}{2} - 3} . 2^3 - \frac{3}{128} 4^{\frac{1}{2} - 4} . 2^4$, κτ. Ἀλλὰ $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$, καὶ ἀντὶ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{2} - 1}$. ἔχει ἀντικαταστῆναι τὸ $\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}$, ἀντὶ δὲ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{2} - 2}$ τὸ $\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha^2}$. Τὸ γὰρ, ἐφ' ᾧ καὶ αὖθις τοῦ το ἐπαναλαβεῖν, ἀπὸ τῶν ἐκθετιῶν τῶν δυνάμεων ἀφαιρεῖντι, διαιρεῖν ἐςιν αὐτοὺς διὰ δυνάμεως τηλικαύτης, ἡλίκος ὁ ἀφαιρεθεὶς ἀριθμός. §. 194. Ἔνθεντοι ἔςαι ἡ σειρὰ $\sqrt{4} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4}{4}} \cdot 2 - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{4}{4^2}} \cdot 2^2 + \frac{1}{16} \cdot \sqrt{\frac{4}{4^3}} \cdot 2^3 - \frac{5}{128} \cdot \sqrt{\frac{4}{4^4}}\, 2^4 ..$ Τοῦτο δὲ $= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot 2, - \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{16} \cdot 4, + \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{64} \cdot 8 - \frac{5}{128} \cdot \frac{2}{256} \cdot 16,$ κτ. $= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$, κτ. Καὶ προςεθέντων τῶν καταφατικῶν ὅρων, ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἀποφατικῶν ἐν μέρει, καὶ τῶνδε ἀπ' ἐκείνων ἀφαιρεθέντων, ἕξομεν καταφατικὸν μὲν $\frac{161}{64}$, ἀποφατικὸν δὲ $\frac{69}{1024}$. Ἄμφω δ' αἱ ποσότητες ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀχθεῖσαι παρονομαςὴν δώσουσι $\frac{2576 - 69}{1024} = \frac{2507}{1024} = 2\ \frac{459}{1024}$. ἢ ἐν δεκαδικοῖς κλάσμασιν $= 2, 448 \ldots$ Ὁ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 6 ὡς ἔγγιςα, ἧς τινος ἀκριβῶς ἐξάγεσθαι μὴ ἐχούσης, καὶ ἡ σειρὰ ἂν εἴη ἀπέραντος, ἀεὶ μέντοι ἔγγιον τῆς ἀκριβοῦς. Καὶ τὰς μὲν τετραγωνικὰς, καὶ κυβικὰς ῥίζας οὐκ ἂν δήπου τοῦτον τὸν τρόπον ἐξαγάγοιμεν. Εἰ δὲ ῥίζας ἐξαγαγεῖν πρόκειται, μείζονας τοὺς ἐκθετας ἐχούσας, τὸ Δυώνυμον οὐ μικρὰν ἡμῖν εἰς τοῦτο τὴν ὄνησιν ἐμποιήσει. Ἔνθεντοι ζητητέος προσφυέςερός τις τύπος τοῦ Δυωνύμου.

§. 290. Διὰ τοῦτον τὸν λόγον γράψον ἔτι ἅπαξ τὸν τοῦ Δυωνύμου τύπον.

$$a^{\mu} + \frac{\mu a^{\mu-1}}{1}\beta + \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} a^{\mu-2}\beta^{2}$$

$+ \mu \cdot$

$$+ \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2}{1 . 2 . 3} \alpha^{\mu - 3} \beta^{3} + \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3}{1 . 2 . 3 . 4} \alpha^{\mu - 4} \beta^{4}$$

, κτ. Ἐπειδὴ (194.) $\alpha^{\mu-1} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha}$, καὶ $\alpha^{\mu-2} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{2}}$, τοῦ ἴσου ἀντὶ τοῦ ἴσου ἀντικαταςάντος, οὕτως ἂν ἐκκέοιτο ἡ σειρά.

$$\alpha^{\mu} + \frac{\mu \alpha^{\mu} \beta}{\alpha} + \frac{\mu . \mu - 1}{1 . 2} \frac{\alpha^{\mu} \beta^{2}}{\alpha^{2}} + \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2}{1 . 2 . 3} \frac{\alpha^{\mu} \beta^{3}}{\alpha^{3}} + \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3}{1 . 2 . 3 . 4} \frac{\alpha^{\mu} \beta^{4}}{\alpha^{4}}$$

κτ. ἥτις ἐν ἅπασι τοῖς κατ' αὐτὴν ὅροις μετὰ τὸν α΄. τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ περιέχει. ἐν γὰρ τῷ β΄. ὅρῳ αὐτίκα δῆλον. ἐν δὲ τῷ γ΄. τὸ $\frac{\beta^{2}}{\alpha^{2}}$ ἐνυπάρχει $= \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\beta}{\alpha}$. ἐν δὲ τῷ δ΄. τὸ $\frac{\beta^{3}}{\alpha^{3}} = \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\beta}{\alpha}$, κτ. Κληθήτω τοίνυν $\frac{\beta}{\alpha} = \Pi$. Καὶ ἡ σειρὰ ἕξαι, ἀντὶ τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$ τοῦ Π, καὶ ἀντὶ τοῦ $\frac{\beta^{2}}{\alpha^{2}}$ τοῦ Π^{2}, κτ. τεθέντος, $\alpha^{\mu} + \frac{\mu}{1} \alpha^{\mu} \Pi$

$$+ \frac{\mu . \mu - 1}{1 . 2} \alpha^{\mu} \Pi^{2} + \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2}{1 . 2 . 3} \alpha^{\mu}$$

$$\alpha^{\mu} \Pi^{3} + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^{\mu} \Pi^{4}, \text{ κτ.}$$

Κἀν ταύτῃ τῇ σειρᾷ, ἡ δῆλον, ὁ α΄. ὅρος ἐμπεριέχεται τῷ β΄. ὁ β΄. τῷ γ΄. ὁ γ΄. τῷ δ΄, κτ. ἢ σαφέςερον. Ὁ β΄. ὅρος προκύπτει τῷ Πολλαπλασιασμῷ τοῦ α΄. ὅρου α^{μ} μετὰ τοῦ $\frac{\mu}{1}\Pi$. Ὁ δὲ γ΄. τῷ τοῦ β΄. μετὰ τοῦ $\frac{\mu - 1}{2}\Pi$. Ὁ δὲ δ΄. τῷ τοῦ γ΄. μετὰ $\frac{\mu - 2}{3}\Pi$, κτ. ὡς ἐκ τῆς προόδου σαφές.

Ῥηθήτω ὁ α΄ ὅρος Α. ὁ β΄. Β. ὁ γ΄. Γ ὁ δ΄. Δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, καὶ ἡ σειρὰ ἄλλως ἐκφανθήσεται. Ὁ οὖν α΄. ὅρος, ἢ $\alpha^{\mu} = A$. Ἀρχ ὁ β΄. ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ α΄. καὶ τοῦ $\frac{\mu}{1}\Pi$ συνιςάμενος $= \frac{\mu}{1} A\Pi = B$. Ἐνθεντοι ὁ γ΄. ὅς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ β΄. καὶ τοῦ $\frac{\mu - 1}{2}\Pi$ συγκροτεῖται $= \frac{\mu - 1}{2} B\Pi = \Gamma$. Ὥςε καὶ ὁ δ΄. $\frac{\mu - 2}{3}\Gamma\Pi. = \Delta$. ἡ δὲ σειρὰ

$$\alpha^{\mu} + \frac{\mu}{1} A\Pi + \frac{\mu - 1}{2} B\Pi + \frac{\mu - 2}{3} \Gamma\Pi$$

$+ \mu.\Pi$

$+ \frac{\mu - 3}{4}$ ΔΠ, κτ. Ἐν ᾗ τοῦτο μόνον σημειωτέον· ὅτι Π $= \frac{\beta}{\alpha}$, καὶ ὅτι τὰ μείζω τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, Δ, κτ. ἐφ' ἑκάστου ὅρου τὴν τιμὴν ἀεὶ καὶ δύναμιν τοῦ προηγηθέντος ἐμφαίνουσιν ὅρου. Τοῦτον τὸν τύπον ἀκριβῶς τῇ διανοίᾳ ἐντυπώσασθαι ἀναγκαῖον. Τὸ γὰρ πάνυ χρήσιμον τοῦ Διωνύμου πᾶς τις ἐπιγνώσεται εἰς τὰ τῆς Μαθηματικῆς ὑψηλότερα θεωρήματα χωρήσας. Σημειωτέον προτέτι, ὅτι τὸ μ καὶ κλάσμα, καὶ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἶναι δύναται. Τὸ α΄. ἔσται ἀείποτε ἐπὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης τῇ συνεργείᾳ τοῦδε τοῦ τύπου, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς ὀψόμεθα παραδείγματι.

§. 291. Εἰ δέοι τὸν ἀριθμὸν 12 εἰς τὴν γ΄. δύναμιν ἐξᾶραι, διαιρεθήτω εἰς 4 + 8.

Ὥστε $\alpha = 4$. καὶ $\beta = 8$. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{8}{4} = 2$. Τὸ δὲ ἐστὶ τὸ Π.

Ἔνθεν τοι Π = 2 ἐνταῦθα. Τὸ δὲ $\mu = 3$. ἄρα $\alpha^{\mu} = 4^3. = 64 =$ Α.

μΑΠ $= 3 \cdot 64 \cdot 2 = 384 =$ Β.

$\frac{\mu - 1}{2}$ ΒΠ $= 1 \cdot 384 \cdot 2 = 768 =$ Γ.

$\frac{\mu - 2}{3}$ ΓΠ $= \frac{1}{3} \cdot 768 \cdot 2 = 512 =$ Δ.

$\frac{\mu - 3}{4}$ ΔΠ $= \frac{0}{4} \cdot 512 \cdot 2 = 0$.

Ἡ σειρὰ ἐφικνεῖται τοῦ πέρατος ἐπὶ τοῦ πρὸ τοῦ τελευταίου ὅρου, ὡς τοῦ ἐσχάτου μετὰ τοῦ μηδενικοῦ πολλαπλασιασθέντος, ὅπερ ὅλον τὸν ὅρον εἰς μηδε-

μηδενικὸν τρέπει. (§. 69.) Ταύτῃ τοι καὶ ἅπαντες οἱ ἑξῆς ὅροι $=$ τῷ 0. Οἱ δ' ἀναφυέντες ἀριθμοὶ ἀλλήλοις προςεθέντες παρέχουσι κεφάλ. $1728 = 12^3$.

Ἐξάγαγε τὴν $\sqrt{2}$. Διαιρεθήτω ὁ 2 εἰς δύω μέρη, ἤτοι $= 1 + 1$. Ὥςε πρόκειται τὴν $\sqrt{(1+1)} = (1+1)^{\frac{1}{2}}$ ἐξαγαγεῖν.

Ἐνταῦθα $\mu = \frac{1}{2}$. $\Pi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$. Ἡ δὲ σειρὰ ὧδε προαχθείη.

$$+ a^{\mu} = 1^{\frac{1}{2}} = +1 = A.$$

$$+ \frac{\mu}{1} = A\Pi = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} = B.$$

$$+ \frac{\mu - 1}{2}\, B\Pi = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{8} = \Gamma.$$

$$+ \frac{\mu - 2}{3}\, \Gamma\Pi = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{8} \cdot 1 = + \frac{1}{16} = \Delta.$$

$$+ \frac{\mu - 3}{4}\, \Delta\Pi = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 1 = -\frac{5}{128} = E.$$

$$+ \frac{\mu - 4}{5}\, E\Pi = -\frac{7}{10} \cdot -\frac{5}{128} \cdot 1 = + \frac{35}{1280} = Z.$$

$$+ \frac{\mu - 5}{6}\, Z\Pi = -\frac{3}{4} \cdot \frac{35}{1280} \cdot 1 = -\frac{105}{5120} = H.$$ κτ. Ὥςε ἡ $\sqrt{2}$ εἴη ἂν $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{35}{1280} - \frac{105}{5120}$, κτ. ἐπ' ἄπειρον. Ἐπεὶ δ' ἡ παροῦσα ἅλις ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς ῥίζης, ἔχοιμεν ἂν πέρας αὐτῇ ἐπιθεῖναι.

Ἐὰν οὖν αἱ καταφατικαὶ ποσότητες προςαθροι-

σθῶσιν

σθῶσιν ἀλλήλαις, καὶ ἀπὸ τούτων αἱ ὁμοίως ἀλλήλαις προςτεθεῖσαι ἀποφατικαὶ ἀφαιρεθῶσιν, ἀμφοτέρων τῶν κλασμάτων α΄. εἰς τὸν αὐτὸν παρονομ. ἀχθέντων, προκύψει 1 $\frac{415}{1024}$. Ἐν δὲ δεκαδικοῖς 1,405, ὅπερ οὐ πολὺ τῆς $\sqrt{2}$ ἀφίσταται.

§. 292. Καὶ τὰ μὲν μέχρι τοῦδε ῥηθέντα περὶ τῆς ἀνὰ χεῖρας διδασκαλίας, διεξοδικωτάτης οὔσης, ἱστορικήν τινα μόνον γνῶσιν παρέχοντα, ἀρκεῖ. Τοῦτο γὰρ τὸ εἶδος τῶν ὑπολογισμῶν δυσχερὲς πάνυ τοῖς, δι' οὓς ταῦτα γέγραπται. Ἔνθεντοι καὶ ὅπως διὰ τοῦ Διωνύμιου ἔτι μείζους ἐξάγονται ῥίζαι, ὅπως τε ἀποφατικαὶ δυνάμεις διὰ τούτου ἐξαίρονται, ὡς $(\alpha + \beta)^{-2} = \frac{1}{(\alpha + \beta)^2}$. ἢ καὶ ὅπως ἡ τούτων ῥίζα ἐξάγεται, οἷον $(\alpha + \beta)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(\alpha + \beta)^3}}$, κτ. ἐπίτηδες παρελείφθη. Ὁ δὲ πλείω περὶ τούτου ζητῶν μετελθέτω τὰ τῶν Νεωτέρων περὶ τούτου Μαθηματικὰ συγγράμματα. Ὁ γὰρ τὰ ῥηθέντα κατέχων μετ' ὠφελείας χρήσεται τοῖς τούτων συγγράμμασι.

Πλατυτέρα Θεωρία τῶν Ῥιζικῶν, Ἀλόγωντε καὶ Ἀδυνάτων Ποσοτήτων.

§. 293. Εἰ καὶ ἐν τοῖς φθάσασι τῶν Ῥιζικῶν, καὶ ἀλόγων ποσοτήτων μνείαν ἐποιησάμεθα, ἐφ' ᾧ μέντοι τὰ ῥηθέντα σαφέστερον ἐκθεῖναι, καὶ πλατύτερον, ἰδίᾳ περὶ τούτων πραγματεύσασθαι δεῖν ἔγνωμεν. Πρὶν ἢ δὲ τῆς τούτων ἅψασθαι θεωρίας, τοὺς ἀναγνώστας εἰς τὴν ἀνάγνωσιν τῶν ἐν §. §. §. 186. 200. 204, κτ. διαληφθέντων παραπέμπομεν.