§. 277. Καὶ ἐξ Ἀλγεβραϊκῶν Ποσοτήτων, ἀκριβῶς τετραγώνων οὐσῶν, καὶ αἱ ῥίζαι ἀκριβεῖς ἐξάγονται. Ἀλλ᾽ αἱ ποσότητες, κατὰ τὰς αὐτῶν δυνάμεις, ἐν οἰκείῳ τόπῳ ἑκάςη τακτέαι, ὥςε τὴν μείζονα δύναμιν τὸν α΄. τόπον καταλαμβάνειν, καὶ ταύτῃ τὰς λοιπὰς κατὰ τάξιν ἕπεσθαι. Τὸ δὲ καθόλου σχῆμα $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ὑπ᾽ ὄψιν ἔςω, καθ᾽ ὅ τῆς ῥίζης ἐξαγομένης, ἐὰν αἱ ποσότητες ἀλλήλας πᾶσαι οὐκ ἀναιρῶσι, δεῖγμα σαφὲς τὴν δοθεῖσαν ποσότητα μὴ εἶναι ἀκριβῆ τετράγωνον.

Παράδ. Ἡ $\sqrt{}\,(\gamma^2 + 6\gamma\beta + 9\beta^2.)$ Ἡ δὲ Ποσότης ταχθήτω κατὰ τὰς τοῦ γ δυνάμεις.

$$\begin{array}{rl|l} & \gamma^2 + 6\gamma\beta + 9\beta^2 & \alpha + \beta \\ \alpha^2 = & \gamma^2 & \gamma + 3\beta \\ \hline 2\alpha\beta + \beta^2 = & + 6\gamma\beta + 9\beta^2 & \\ 2\alpha = (2\gamma) & & \\ 2\alpha\beta + \beta^2 = (2\gamma + 3\beta)3\beta = & 6\gamma\beta + 9\beta^2 & \\ \hline & 0 \quad 0 & \end{array}$$

Ἡ ῥίζα τοῦ $\gamma^2 = \gamma$. Διπλασιασθήτω, ἵνα ὁ καινὸς προκύψῃ διαιρέτης. Εἶτα πολλαπλασιασθήτω τὸ καινὸν πηλίκον, καὶ ὁ καινὸς διαιρέτης ἐπὶ τὸ καινὸν πηλίκον, κτ. ὡς τὸ παράδ. προφανῶς ὑπεμφαίνει.

$$\text{Ἡ} \sqrt{\gamma^4 + 2\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma + 1} \;\Big|\; \alpha + \beta$$

$$\gamma^4 + 2\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma + 1 \;\Big|\; \alpha + \beta$$

$$\alpha^2 = \gamma^4 \qquad\qquad \gamma^2 + \gamma + 1$$

$$2\alpha\beta + \beta^2 = + 2\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma + 1$$

$$2\alpha = 2\gamma^2$$

$$2\alpha\beta + \beta^2 = (2\gamma^2 + \gamma).\gamma = 2\gamma^3 + \gamma^2$$

$$+ 2\gamma^2 + 2\gamma + 1$$

$$2\alpha + 2\gamma^2 + 2\gamma$$

$$2\alpha\beta + \beta^2 = (2\gamma^2 + 2\gamma + 1)1 = + 2\gamma^2 + 2\gamma + 1$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

§. 278. Πᾶσα Τετραγωνικὴ ποσότης ἔχει ῥίζαν καὶ καταφατικὴν, καὶ ἀποφατικήν. (§. 177.) Ὅτε τοίνυν τὴν ῥίζαν καταφατικῆς ποσότητος δεῖξαι βουλόμεθα, ἀμφοῖν τοῖς σημείοις $+$, καὶ $-$ χρώμεθα. ὡς ἡ $\sqrt{25} = \pm 5$. ἡ $\sqrt{144} = \pm 12$. ἡ $\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm \frac{2}{5}$. Τοῦτο δὲ καὶ ἱκανῶς ἡμᾶς διδάσκει ἐξ ἀποφατικῆς ποσότητος οὐδεμίαν ἐξάγεσθαι ῥίζαν δυνατὸν εἶναι, ὡς ἀδύνατον οὖσαν. π. χ. ἡ $\sqrt{-16}$ οὔτε $= + 4$, οὔτε $= - 4$. ἀμφοῖν γὰρ ὁ Τετράγωνος $+ 16$. Ἐνταῦθα δὲ ζητεῖται ῥίζα, ἧς ὁ τετράγ. $- 16$. ἀδύνατος ἄρα.

§. 279. Ἡ δὲ τῆς Κυβικῆς ῥίζης ἐξαγωγὴ, καίτοι μὴ συχνάκις ἀπαντῶσα, ἐργωδεστέρα μέντοι τυγχάνει. Ἀλλ' ὥσπερ ἐπὶ τῆς Τετραγωνικῆς, οὕτω καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης, καθόλου τις τύπος, καὶ σχῆμα δίδοται, ὑφ' οὗ εἰς τὴν ταύτης ἐξαγωγὴν ὁδηγούμεθα.

$\alpha + \beta$ εἰς τὴν γ'. ἀρθὲν δύναμιν, ἡ $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. Τὸ γὰρ $\alpha + \beta$ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν =

α^2

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. (§. 270.) Ὃ ἔτι μετὰ τοῦ $\alpha + \beta$ πολλαπλασιασθὲν, ἤτοι

$$\begin{array}{r} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\ \alpha + \beta \\ \hline \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ + \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \\ \hline \end{array}$$

ἔςαι $= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$.

Ἡ γ΄. ἄρα δύν. ῥιασοῦν ποσότητος διμεροῦς ἐν γένει τῷ προκειμένῳ ἂν παραςαίη τύπῳ, ἡ δὲ ῥίζα αὐτῆς τῷ ($\alpha + \beta$). Ἐὰν οὖν ἐξ αὐτοῦ (τοῦ τύπου) τὸ $\alpha + \beta$ (τὴν ῥίζαν) αὖθις ἀνακαλύψαι δυνηθῶμεν, κανόνα ἡμῖν τοῦτο παρέξει τοῦ τὴν κυβικὴν ἐξάγειν ῥίζαν.

$$\begin{array}{ll} \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & \Big| \ \alpha + \beta \\ \alpha^3 & \\ \hline \qquad 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & \\ 3\alpha^2 & \\ \text{ἐν μέρει παραγόμ.} \quad 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & \\ \hline \qquad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Τὸ α΄. μέρος τῆς ῥίζης προχείρως εὑρίσκομεν. Ἔςι γὰρ $= \alpha$. Ὃ εἰς κύβον ἐξαρθὲν ἀναιρεῖ τὸ α^3. Ὥςε δὲ καὶ τὸ β΄. μέρος αὐτῆς, ἤτοι τὸ β, εὑρεῖν, τετραγωνιςέον τὸ α΄. μέρος τῆς ῥ. καὶ μετὰ τοῦ 3 πολλαπλασιαςέον, καὶ διὰ τούτου τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ κύβου διαιρετέον. Τὸ δὲ πηλίκον $+ \beta$ ἔςαι τὸ β΄. μέρος. Ὅπως δὲ εἰδῶμεν, εἰ τοῦτο τὸ μέρος τῆς ῥίζης τὸ ἀληθὲς, 1) τετραγωνιςέον α τὸ α΄. μέρος τῆς ῥίζης. καὶ τὸ τετράγ. πολλαπλασιαςέον ἐπὶ τὸ β΄. μέρος

ρος αὐτῆς. καὶ τοῦτο ἔτι ἐπὶ τὸν 3. Ὅπερ δίδωσι τὸ α΄ ἐν μέρει παραγόμενον, ἐνταῦθα τὸ $3\alpha^2\beta$. 2) τετραγώνιζεον τὸ β΄. μέρος τῆς ῥ. πολλαπλασιάζοντας τοῦτο ἐπὶ τὸ α΄ μέρος, καὶ ἔτι μετὰ τοῦ 3. καὶ οὕτως ἕξομεν τὸ β΄. ἐν μέρει παραγόμ. ὧδε τὸ $3\alpha\beta^2$. 3) Ἀρτέον εἰς κύβον τὸ β΄. μέρος τῆς ῥ. ὅ παρέξει τὸ γ΄. ἐν μέρει παραγόμ. β^3. Ταῦτα, τὰ γ΄. ἐν μέρει παραγόμενα, ἀπὸ τοῦ καταχθέντος λειψάνου ἀφαιρεθέντα, οὐδὲν ὑπολείψουσιν. Ἡ τοίνυν κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha + \beta$. Ἐκ τούτου, καὶ τῆς θεωρίας τῆς κυβικῆς ποσότητος, συνάγομεν ἐν γένει τοὺς ἑξῆς κανόνας εἰς ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης ἐξ ἀριθμῶν.

1) Δίελε τὸν δοθέντα ἀριθμὸν δεξιόθεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἰς κλάσεις, τρεῖς ἑκάστην χαρακτῆρας περιεχούσας, μηδόλως φροντίζων, εἰ ἡ πρὸς τὰ λαιὰ τελευταία δύω, ἢ ἕνα τούτων περιλαμβάνει. Δίδονται γὰρ, κατὰ τὸ πινακίδιον, (§. 271.) καὶ τοιοῦτοι Κύβοι.

2) Ζήτησον ἐν τῷ Πινακιδίῳ τὴν ῥίζαν τοῦ Κύβου τῆς α΄. κλάσεως πρὸς ἀριστερὰν, καὶ γράψον αὐτὴν ἐν τῷ Πηλίκῳ, ὡς τὸ α΄. μέρος τῆς ῥίζης. Ἐὰν δὲ τοιοῦτος ἀριθμὸς αὐτῷ (τῷ Πιν:) οὐχ ὑπάρχῃ, οἷος ὁ ἐν τῇ α΄. κλάσει, λαβὲ τὴν ῥίζαν τοῦ ἐγγὺς ἐλάσσονος Κύβου.

3) Ἆρον εἰς κύβον τὸ εὑρεθὲν α΄. μέρος τῆς ῥίζης, καὶ ἄφελε τοῦτον ἀπὸ τῆς α΄. κλάσεως, καταγαγὼν τὸ λείψανον μετὰ τῶν χαρακτήρων τῆς β΄. κλάσεως.

4) Τετραγώνισον τὸ εὑρεθὲν α΄. μέρος τῆς ῥίζης, πολλαπλασιάσας τὸν Τετράγ. ἐπὶ τὸν 3, καὶ δίελε διὰ τοῦ παραγομένου τὸ καταχθὲν λείψ. Τὸ ἐκ τοῦ-

τούτων πηλίκου γράψον, ὡς τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον μὴ πάνυ μέγα λαμβανέσθω. Τρία γὰρ ἐν μέρει τὰ παραγόμενα. τὰ ἀπὸ τοῦ καταχθέντος λειψάνου ἀφαιρεθησόμενα.

5) Πολλαπλασίασον ἤδη τὸ εὑρεθὲν β'. μέρος τῆς ῥίζης μετὰ τοῦ τριπλοῦ Τετραγώνου τοῦ α'. μέρους τῆς ῥίζης. Ὅπερ δώσει σοι τὸ α'. ἐν μέρει παραγόμενον, οὗ ὁ τελευταῖος χαρακτὴρ ἐπὶ τὰ δεξιὰ γραφήτω ὑπὸ τὸν ἀνώτατον χαρακτῆρα πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς β'. καταχθείσης κλάσεως.

6) Τετραγώνισον τὸ εὑρεθὲν β'. μέρος τῆς ῥίζης, πολλαπλασιάσας τὸν τετράγ. μετὰ τοῦ α'. μέρους τῆς ῥίζης, καὶ μετὰ τοῦ 3. Τοῦτο δὲ παρέχει τὸ β'. ἐν μέρει παραγόμενον. οὗ τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα ὑπὸ τὸν μέσον τῆς β'. κλάσεως γράψον.

7) Ὕψωσον ἤδη εἰς κύβον τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης, καὶ δώσει σοι τὸ γ'. ἐν μέρει παραγόμ. οὗ τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα ὑπὸ τὸν τελευταῖον τῆς β'. κλάσεως γράψον.

8) Τὰ ἐν μέρει παραγόμενα πάντα προσαθροίσας ἄφελε τὸ τούτων κεφάλαιον ἀπὸ τοῦ καταχθέντος λειψάνου. Εἰ τοίνυν δύω κλάσεις μόναι προὔκειντο, καὶ οὐδὲν ὑπολείπεται, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀκριβὴς κύβος τυγχάνει, καὶ τὰ τῆς ῥίζης μέρη ἀκριβῶς εὕρηνται. Εἰ δὲ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ λείψ. ὑπολείπεται, ἀψευδὲς σημεῖον τοῦ μὴ ἀκριβῆ τὸν κύβον εἶναι. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ οὐκ ἂν εἴη = 1. Εἰ γὰρ τοῦτο, εὑρέθη ἂν ἡ 1 ἐπὶ τῆς ἐξαγωγῆς, τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης μονάδι προσαυξήσασι.

9) Πλειόνων δὲ οὐσῶν τῶν κλάσεων, καταχθεισῶν καὶ τούτων καὶ τῶν δύω εὑρεθέντων μερῶν τῆς ῥίζης, ὡς ἑνὸς θεωρουμένων, τετραγωνίζομεν

αὐτὰ

αὐτὰ ἐπὶ τὸν 3 ἐπάγαντες, καὶ διὰ τούτων τὸ λεῖψανον διαιροῦντες, ὥστε τὸ καινὸν β, ἤτοι ἕτερον μέρος τῆς ῥίζης, εὑρεῖν. Τὰ δὲ λοιπὰ γίνονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς οἱ κανόνες 5, 6, 7, 8. ἐπιτάττουσι.

Διὰ τῶν παραδειγμ. ἐκθησόμεθα σαφῶς τὰ ῥηθέντα, πρὸ ὀφθαλμῶν τὸν καθόλου κυβικὸν τύπον ἔχοντες.

Ἡ $\sqrt[3]{79507}$.

$$
\begin{array}{lrl}
 & & \alpha + \beta \\
 & 79|507 & 4 \quad\; 3 \\
 & \alpha^3 = 64|:::\; & \\
\hline
 & = 15|507 & \\
\text{Διαιρέτης} & 3\alpha^2 = (48) & \\
\text{ἐν μέρει παραγόμ.} & \left\{\begin{array}{l} 3\alpha^2\beta = 144 \\ 3\alpha\beta^2 = \;\, 108 \\ \;\;\beta^3 = \quad\;\; 27 \end{array}\right. & \\
\hline
 & 15507 & \\
\hline
 & 00000 & \\
\end{array}
$$

Ἡ οὖν τούτου ῥίζα $= 43$.

Ἡ $\sqrt[3]{34965783}$.

$$\alpha + \beta$$

(α΄. καν. καὶ β΄.) $34|965|783 \;\big|\; \alpha + \beta :$

(γ΄. καν.) $\alpha^3 = 27 \quad | \; ::: \;\big|\; 3 \quad 2 \quad 7$

$7|965| \; :::$

(δ΄. καν.) διαιρέτης $3\alpha^2 = (27) \; | \; :::$

(έ. ς΄. ζ΄. καν.) ἐν μέρει παραγόμ. $\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 54 \\ 3\alpha\beta^2 = 36 \\ \beta^3 = 8 \end{cases}$ $\; | \; :::$

κεφ. τῶν ἐν μέρει παραγ. $= 5\;68 \; | \; :::$

(θ΄. καν.) τὸ λείψ. $= 2\;197 | 783$

καινὸς διαιρέτης, ἐν ᾧ $\alpha = 32$

ὥςε $3\alpha^2 = (3072)$

ἐν μέρει παραγόμ. $\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 2150\;4 \\ 3\alpha\beta^2 = 47\;0\;4 \\ \beta^3 = 343 \end{cases}$

κεφάλ. τῶν ἐν μέρει παραγ. $= 2197\;7\;8\;3$

τὸ λείψ. $= 0000000$

Ὡς μηδενὸς τοίνυν ὑπολειπομένου, ἡ κυβικὴ ῥίζα $=$ 327. ἥτις τρὶς ἐφ᾽ ἑαυτὴν πολλαπλασιασθεῖσα τὸν κύβον παράγει 34965783.

§. 280. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς μὴ ἀκριβὴς Κύβος ᾖ, ὅτε καὶ ἡ τούτου ῥίζα οὐκ ἂν ἀκριβῶς ἀνιχνευθείη, καὶ ἧς τὸ παράπτωμα ἔλαττον μονάδος, κλάσεις τῶν μηδενικῶν κἀνταῦθα προσαρτῶντες, τρία ἑκάςην περιεχούσας, ὅσον βούλει, ἔγγιςα τῆς ἀληθοῦς ῥίζης γενησόμεθα. Τὰ δὲ τῇ τῶν μηδενικῶν προσθέσει τῷ λειψάνῳ προκύπτοντα ἑπόμενα μέρη τῆς ῥίζης, τοῖς προευρεθεῖσιν ὡς δεκαδικὰ προςεθείσθω. Τοσαῦτα δὲ ἀνακύψουσιν, ὅσαι μηδενικῶν κλάσεις προσήρτηνται.

Ἡ $\sqrt[3]{}$

Ἡ $\sqrt{}$ 5789436

$\alpha + \beta$

$\alpha + \beta$:

$\alpha + \beta$!

$5|789|436|179,5\ldots$

$\alpha^3 = 1|:::|:::$

$4|789|:::$

διαιρέτης $3\alpha^2 = (3)$ $:::$

ἐν μέρει παραγόμ. $\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 21 & ::: \\ 3\alpha\beta^2 = 147 \\ \beta^3 = 343 \end{cases}$

κεφ. τῶν ἐν μέρει παραγ. $= 3913|:::$

τὸ λεῖψ. $876|436$

καινὸς διαιρέτ. ὅπου $\alpha = 17$

ὥστε $3\alpha^2 = (867)$

ἐν μέρει παραγόμ. $\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 7803 \\ 3\alpha^2\beta = 4131 \\ \beta^2 = 729 \end{cases}$

τὸ τούτων κεφ. $= 822339$

τὸ λεῖψ. $= 54097|000$

καινὸς διαιρ. ἔνθα $\alpha = 179$

ὥστε $3\alpha^2 = (9612|3)$

ἐν μέρει παραγόμ. $\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 480615 \\ 3\alpha\beta^2 = 13425 \\ \beta^3 = 125 \end{cases}$

τὸ τούτων κεφ. $= 48195875$

τὸ λεῖψ. $= 5901125$

Ὁ τὴν οὕτως ἐργώδη πρᾶξιν πολλάκις ἐπαναλαμβάνειν μὴ ὀκνῶν, καὶ ἕτερα δεκαδικὰ παράξει κλάσματα, ὅσα βούληται.

§. 281. Αἱ διάφοροι τῶν Ποσοτήτων, αἱ ἐν §. 275. κτ. προβληθεῖσαι, ἀφ' ὧν τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἦσαν

ἦσαν ἐξακτέαι, ἵνα καὶ κυβικὰς ῥίζας ἐκ τούτων ἐξαγάγωμεν, δοθῆναι δύνανται. Γίνονται δὲ τὰ αὐτὰ, ὥσπερ ἐκεῖ, μόνον ὅτι, εἰ 1) ὁλοσχερεῖς ἁπλοῖ ἀριθμοὶ πρόκεινται, τοσαύτας κλάσεις μηδενικῶν εὐθὺς ἐν ἀρχῇ προσαρτῶμεν, ὅσα μέρη ῥίζης ἐν δεκαδικοῖς βουλόμεθα ἔχειν κλάσμασι.

Π. χ. $\sqrt[3]{6}$

$$\begin{array}{r|l} & \alpha+\beta \\ & \alpha+\beta: \\ 6,|000|000 & 1,\ 81\ \ldots \\ \alpha^3 = 1|\ :\ ::| & \end{array}$$

$5.|000|$

διαιρέτης $3\alpha^2 = (|3)$

ἐν μέρει παραγόμ. $\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 2\ 4 \\ 3\alpha\beta^2 = 1\ 92 \\ \beta^3 = \ 512 \end{cases}$

τὸ τούτων κεφ: $4\ 832$

λείψ. $168|000$

καινὸς διαιρέτ. ἔνθα $\alpha = 18$

ὥστε $3\alpha^2 = (97\ 2)$

λειψ. ἐν μέρει παραγόμ. $\begin{cases} 3\alpha^2\beta = 97\ 2 \\ 3\alpha\beta^2 = 54 \\ \beta^3 = 1 \end{cases}$

τὸ τούτων κεφ. $= 97\ 741$

λείψ. $= 70\ 259.$

Ἡ $\sqrt[3]{6} = 1,\ 81\ \ldots.$

2) Προκειμένων δὲ ἀριθμῶν, οἷς καὶ δεκαδικὰ ἔνεισι, διαιρείσθωσαν οἱ ὁλοσχερεῖς μόνοι δεξιόθεν πρὸς ἀριστερὰ, τὰ δὲ δεκαδικὰ ἀνάπαλιν. Εἰ δ' αἱ κλάσεις αἱ πρὸς δεξιὰ οὐ πλήρεις, προστιθέσθωσαν καὶ μηδενικά.

π. χ.

Π. χ. Ἡ $\sqrt[3]{126,52}$.

$$
\begin{array}{lll}
 & & 126,|520|5,02 \\
 & a^3 = & 125| \\
 & & 1|520| \\
\text{διαιρέτης} & 3a^2 = & (7|5) \\
 & & 1\ 520|000 \\
\text{καινὸς διαιρέτης, ἔνθα} & a = 50 & \\
\text{ὥστε} & 3a^2 = & (750|0) \\
 & 3a^2\beta = & 1\ 500|0 \\
\text{ἐν μέρει παραγ.} & 3a\beta^2 = & 600 \\
 & \beta^3 = & 8 \\
\text{τὸ τούτων κεφ.} & = & 1506008 \\
\text{λείψ.} & = & 13992
\end{array}
$$

3) Εἰ δὲ δεκαδικὰ μόνα πάρεισι, γραφέσθω ἐν τῷ τῆς ῥίζης πηλίκῳ τὸ σύνηθες μηδενικὸν διὰ τὴν τῆς μονάδος ἀπουσίαν, καὶ γινέσθω εἶτα ἡ εἰς κλάσεις διαίρεσις ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιά. Ἐλλιπεῖς δ' ὄντες οἱ τόποι τῆς τελευταίας κλάσεως πληρούσθωσαν μηδενικῶν. Ἐὰν δὲ καὶ πρὸς τὰ λαιὰ πρὸ τῶν χαρακτήρων μηδενικὰ ὑπάρχωσι, μετὰ τὸ κόμμα, τιθέσθω παραπλησίως εἰς τὸ τῶν ῥιζῶν πηλίκον τοσαῦτα ἔτι μηδενικά, ὅσαι αἱ κλάσεις αἱ μηδενικῶν πλήρεις. Τὰ λοιπὰ δὲ προβήσῃ τὸν συνήθη τρόπον.

Παράδ. $\sqrt{}$ 0,0000045

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha^3 & = & 0,|000|004|500|0,016\ldots \\
 & & 1 \\
 & & 3|500 \\
\text{διαιρέτης } 3\alpha^2 & = & (3) \\
\text{τὰ ἐν μέρει παραγόμ.}\left\{\begin{array}{r} 3\alpha^2\beta \\ 3\alpha\beta^2 \\ \beta^3 \end{array}\right. & \begin{array}{c} = \\ = \\ = \end{array} & \begin{array}{r} 1\,8 \\ 1\,08 \\ 216 \end{array} \\
\text{τὸ τούτων κεφ.} & = & 3\,096 \\
\text{λείψ.} & = & 404, \text{ κτ.}
\end{array}
$$

Ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἐξάγομεν τὰς κυβικὰς ῥίζας ἐξ ἀμφοῖν τῶν ὅρων, τοῦ ῥιζικοῦ σημείου μεταξὺ ἀμφοῖν κειμένου. Ἄλλως γὰρ, ἤτοι μόνον ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ μόνον ἀπὸ τοῦ παρονομασοῦ ἡ τῆς κυβικῆς ἐξαγωγὴ ἀπαιτεῖται ῥίζης.

Π. χ. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$. Καὶ $\sqrt[3]{\frac{81}{125}} = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4,326\ldots}{5}$. Ἐκ γὰρ τοῦ ἀριθμητοῦ ἡ $\sqrt[3]{}$ ἀκριβῶς ἐξαχθῆναι οὐκ ἔχει. Ἀλλὰ $\sqrt[3]{}\frac{81}{125} = \frac{81}{5} = 16\frac{1}{5}$. Καὶ $\frac{\sqrt[3]{81}}{125} = \frac{4,326\ldots}{125}$. Καὶ ἐν γένει $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}}$.

§. 282. Καὶ ἐξ Ἀλγεβραϊκῶν Ποσοτήτων τὴν $\sqrt[3]{}$ ἐξάγειν δυνάμεθα, ἀκριβῶν οὐσῶν κύβων. Ἡ δ' ἐξαγωγὴ τελεῖται κατὰ τὸν γενικὸν τύπον. Ἀλλ' ἐπειδὴ τοῦτο σπανίως ἀπαντᾷ, προκείσθω καὶ τούτου παράδειγμα.

Η

Ἡ $\sqrt[3]{(\mu^3 + 12\mu^2 + 48\mu + 64)}$

$$
\begin{array}{lrl|l}
 & & & \alpha + \beta \\
 & & & \vdots \quad \vdots \\
 & & \mu^3 + 12\mu^2 + 48\mu + 64 & \mu + 4 \\
 & \alpha^3 = & \mu^3 & \\
\hline
 & & 12\mu^2 + 48\mu + 64 & \\
\text{διαιρέτης} & 3\alpha^2 = & 3\mu^2 & \\
\text{ἐν μέρει παραγόμ.} & 3\alpha^2\beta = & +12\mu^2 & \\
 & 3\alpha\beta^2 = & +48\mu & \\
 & \beta^3 = & +64 & \\
\hline
\text{τὸ τούτων κεφ.} & = & 12\mu^2 + 48\mu + 64. & \\
\end{array}
$$

Ὥςε ἡ κυβικὴ ῥίζα τῆς προτεθείσης Ποσότητος τὸ $\mu + 4$ τυγχάνει.

§. 283. Ἡ κυβικὴ ῥίζα ποσότητος ἀποφατικῆς ἀποφατικὴ τυγχάνει, καταφατικῆς δὲ καταφατική. Ἔνθεντοι ἐξ ἀποφατικῶν κυβικὰς ῥίζας ἐξάγειν οἷόντε, ὅπερ ἐπὶ ἀποφατικῶν τετραγώνων οὐκ ἐγχωρεῖ. (§. 278.) ὡς $\sqrt[3]{125} = 5$. Καὶ $\sqrt[3]{-125} = -5$. Καὶ γὰρ $-5 \cdot -5 \cdot -5 = -125$.

§. 284. Εἰς ἐξαγωγὴν τῶν Διτετραγώνων ῥιζῶν, ἀναγκαῖος α΄. γενικός τις τύπος τῆς δ΄. δυνάμεως, ἤτοι $\alpha + \beta$ εἰς τὴν δ΄. δύναμιν ἐξαρτέον, ἵνα κατὰ τοῦτον καὶ ταύτας μεταχειριζώμεθα. $(\alpha + \beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$. Ἀλλ᾽ ἐπεὶ τοῦτο, ὡς ἐκ τοῦ τύπου δῆλον, λίαν ἐργῶδες, ὡς τεσσάρων ἐν μέρει παραγομένων ἀνακυπτόντων, γενικόν τινα ἐκθησόμεθα κανόνα, ὃν ὁ πολὺς τὴν σοφίαν ἐπενόησε Νεύτων, καθ᾽ ὃν ἁπασῶν τῶν δυνάμεων αἱ ῥίζαι διάτινος σειρᾶς ὅρων λαμβάνονται, ἡλίκαι ἂν εἴησαν αἱ δυνάμεις.

§. 308.

§. 285. Ἐπεὶ οὖν εἰς τοῦτο αἱ δυνάμεις τοῦ Διωνύμου, ἢ τῆς ποσότητος, τῆς ἐκ δύω συγκειμένης ὅρων, οἷοι $\alpha + \beta$, ἐν χρήσει παραλαμβάνονται, ὑποδεῖξαι διὰ βραχέων βουλόμεθα, ὅπως ῥᾷστα οἱανοῦν διώνυμον ποσότητα εἰς ἡλικηνοῦν ζητουμένην δύναμιν ἐξαίρειν δυνάμεθα, τουτ: καθ' ὃν τρόπον διορίζονται, καὶ διατάττονται ἐν τοῖς ὅροις αἱ τοῦ α καὶ β δυνάμεις, ὡσαύτως καὶ οἱ Συνεργοὶ, οὓς αὗται ἐν ἀριθμοῖς ἔχουσι. Διὸ παραληφθήτω $\alpha + \beta$ μέχρις εἰς τὴν δεκάτην ὑψωτέον δύναμιν, ὧν ἑκάστη ἐν τῷ ἑξῆς ἐκκείσθω πινακιδίῳ. Ἐὰν $\alpha + \beta$ ἐπὶ τὸ $\alpha + \beta$ πολλαπλασιασθῇ προκύψει ἡ β'. τούτου δύναμις. Ἐὰν δὲ καὶ τὸ παραγόμ. αὖθις ἐπὶ τὸ $\alpha + \beta$, ἡ γ'. καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Αἱ δυνάμεις τοίνυν τοῦ $\alpha + \beta$ αἵδε τυγχάνουσι.

α'. δύν. $\alpha + \beta$

β'. δύν. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

γ'. δύν. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$.

δ'. δύν. $\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$.

ε'. δύν. $\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3$
$+ 5\alpha\beta^4 + \beta^5$.

ϛ'. δύν. $\alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3$
$+ 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6$.

ζ'. δύν. $\alpha^7 + 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^4\beta^3$
$+ 35\alpha^3\beta^4 + 21\alpha^2\beta^5 + 7\alpha\beta^6$
$+ \beta^7$.

η'. δύν. $\alpha^8 + 8\alpha^7\beta + 28\alpha^6\beta^2 + 56\alpha^5\beta^3$
$+ 70\alpha^4\beta^4 + 56\alpha^3\beta^5 + 28\alpha^2\beta^6$
$+ 8\alpha\beta^7 + \beta^8$.

θ'. δύν.

$$\vartheta'.\ \text{δύν.}\quad \alpha^9 + 9\alpha^8\beta + 36\alpha^7\beta^2 + 84\alpha^6\beta^3 + 126\alpha^5\beta^4 + 126\alpha^4\beta^5 + 84\alpha^3\beta^6 + 36\alpha^2\beta^7 + 9\alpha\beta^8 + \beta^9.$$

$$\iota'.\ \text{δύν.}\quad \alpha^{10} + 10\alpha^9\beta + 45\alpha^8\beta^2 + 120\alpha^7\beta^3 + 210\alpha^6\beta^4 + 252\alpha^5\beta^5 + 210\alpha^4\beta^6 + 120\alpha^3\beta^7 + 45\alpha^2\beta^8 + 10\alpha\beta^9 + \beta^{10}.$$

Ἐὰν ληφθῇ δυώνυμον, οὗ ὁ ἕτερος τῶν ὅρων ἀποφατικὸς, ὡς α — β, αἵτε δυνάμεις, καὶ οἱ τούτων συνεργοὶ χωρήσουσιν ὡσαύτως, εἰ μὴ ὅτι οἱ ἄρτιοι ὅροι, οἷον ὁ β'. δ'. ς'. η', κτ. γίνονται ἀποφατικοὶ, ἔνθα δηλονότι αἱ περιτταὶ δυνάμεις τοῦ β πάρεισι.

§. 286. Ὡς ἐκ τοῦ πίνακος προφανὲς, τῷ α καὶ β ἐν τῇ α'. δυνάμει οὐδεὶς ἐνυπάρχει ἐκθέτης, ὡς καὶ ἡ τοῦ πράγματος φύσις τοῦτο ἀπαιτεῖ, ἢ ἀκριβέστερον φάναι, τοῦ α, καὶ β ὁ ἐκθέτης = 1 ἐν τῇ α'. δυνάμει. Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν δυνάμεων, ἐν μὲν τῷ α'. ὅρῳ τὸ α μόνον κεῖται ἐν τῇ ὑπερτάτῃ δυνάμει, ἐν δὲ τῷ β'. καὶ τοῖς λοιποῖς μετὰ τοῦ β πεπολλαπλασιασμένον ὁρᾶται, μιᾷ δυνάμει τοῦ πρὸ αὐτοῦ α ἐλαττούμενον, μέχρις οὗ παντάπασιν ὁ τῆς αὐτοῦ δυνάμεως ἐκθέτης ἐκλίπῃ. Τὸ δὲ β ἄρχεται ἐν τῷ β'. ὅρῳ ἐκθέτου ἀμοιροῦν, ἀεί τε χωρεῖ δυνάμει μιᾷ αὐξανόμενον, μέχρις ἂν τῆς ὑπερτάτης ἐφίκηται δυνάμεως, ἔνθα ἡ σειρὰ πέρας λαμβάνει. τουτέστιν, οἱ μὲν τοῦ β ἐκθέται διηνεκῶς αὔξουσιν, οἱ δὲ τοῦ α μειοῦνται.

§. 287. Ῥᾴδιον οὖν ἔσαι τοὺς ὅρους οἱασοῦν δυνάμεως εὑρεῖν, ἡλικηοῦν ἂν εἴη, τὰ ἐν τῷ ἀνωτ. §. παρατηροῦντας. Οὕτως ἂν οἱ ὅροι, τοῦ

α+β