τῶν Ποσοτήτων α καὶ β ὁ αὐτὸς μένει Λόγος, ὃν καὶ πρότερον εἶχον, καίτοι ἀμφοῖν ἐν τῷ $\frac{\alpha\,.\,\infty}{\beta\,.\,\infty}$, ὡς ἀπείρως μεγίστων θεωρουμένων, καὶ ἐν λόγῳ οὐσῶν $\alpha\,\infty : \beta\,\infty$.

Παραπλησίως, καὶ εἰ ἄμφω μετ' ἀπείρου ἐλαχίστης ποσότητος, ἣν $=0$ ἔχομεν ἐκδέξασθαι, ἐπολλαπλασιάσθησαν. Μεταξὺ γὰρ τοῦ $\alpha\,.\,\frac{1}{\infty} : \beta\,.\,\frac{1}{\infty}$ ὁ αὐτὸς λόγος, ὃς καὶ μεταξὺ τοῦ $\alpha : \beta$.

Περὶ τῆς τῶν Ῥιζῶν Ἐξαγωγῆς.

§. 269. Ἐν τοῖς προηγηθεῖσι, περὶ τῶν Ῥιζῶν, καὶ Ῥιζικῶν σημείων ὀλίγ' ἄττα ἐν παρόδῳ διαλαβόντες, ἐν τῷ παρόντι τὴν περὶ τούτων ἀκριβεστέραν ἀπεταμιευσάμεθα διδασκαλίαν. Ἀλλ' ἵνα τὴν τούτων συνέχειαν οἱονεὶ πρὸ ὀφθαλμῶν ἔχωμεν, ἀναγνωστέον τὰ ἐν §. §. 186. κτ. 200. κτ. ῥηθέντα. Ὅπως δὲ ἀπὸ δοθεισῶν ποσοτήτων, ἢ ἀριθμῶν, τὰς ζητουμένας ῥίζας ἐξάγειν δυνησόμεθα, καὶ δὴ ῥητέον. Ἐπεὶ γὰρ νοηθῆναι δυνατὸν, τὰς ποσότητας διὰ τοῦ τοσάκις πολλαπλασιασμοῦ ποσότητος ἑτέρας, οἵα ἡ ζητουμένη ῥίζα, προελθεῖν, οὐ δυσχερὲς τήνδε δι' ὑπολογισμῶν ἀνακαλύπτειν. Ἀλλ' ὡς δῆλον ἑξῆς γενήσεται, πάσας ἀκριβῶς εὑρεῖν οὐκ ἔνι, ὅσον βούλει, ἐλάχιστον τὸ ἔλλειμμα ποιήσαντι. Ἔνθεντοι αἱ Ῥίζαι, αἱ ἀκριβῶς μὴ ἀποδιδόμεναι, Ἄλογοι Ῥίζαι καλοῦνται. ὥσπερ τοὐναντίον, Λογικαὶ, ἃς ἀκριβῶς ἀποδοῦναι οἷόντε. Οὕτως ἡ $\sqrt{2}$, ἡ $\sqrt{3}$, κτ. Ἄλογοι τυγχάνουσιν. Ἀλλ' εἰ καὶ τὰς τοιαύτας ἀλόγους ῥίζας ἐντελῶς ἐξάγειν ἀμήχανον, ἰδέαν μέντοι τινὰ καὶ πάνυ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ. ΔΩΡΟΣ Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

καὶ τὸ τούτῳ προςεθὲν πηλίκον) μετὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου πολλαπλασιάζοντες, καὶ τὸ παραγόμενον ἀπὸ τοῦ λειψάνου τοῦ τετραγώνου ἀφαιροῦντες.

Προκείσθω τὸ παράδ. δι' ἀριθμῶν, εἰς ὅ ὁ τοῦ 14 τετράγ. ληφθήτω, εἰς δύω μέρη, κατὰ τὸ Δυάδου ν διαιρεθέντος, τουτ: εἰς $8 + 6 = \alpha + \beta$.

Κατὰ τὸν τύπον οὖν ταχθὲν ἔςαι $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 8 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6 =$ τῷ Τετραγώνῳ τοῦ 14. Ἐξ οὗ πρόκειται τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν.

$$
\begin{array}{lll}
:\ 8) & 8\cdot8 + 2\cdot8\cdot6 + 6\cdot6 & \big|\ 8+6 \\
 & 8\cdot8 & \\
\hline
 & \quad 2\cdot8\cdot6 + 6\cdot6 & \\
:\ 2\cdot8 + 6) & \quad 2\cdot8\cdot6 + 6\cdot6 &
\end{array}
$$

Τοῦ $8 \cdot 8$ ἡ ῥίζα 8 τυγχάνει. Τεθήτω ὡς ά. μέρος τῆς ῥίζης. Καὶ $8 \cdot 8 = 8 \cdot 8$ Οὗ ἀφαιρεθέντος, ὑπόλοιπον τὸ $2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6$. Τὸ ά. μέρος τῆς ῥίζης, ἢ 8 δὶς ληφθὲν $= 2 \cdot 8$. Διὰ τούτου, τοῦ β΄. ὅρου τοῦ Τετραγώνου, ἤτοι τοῦ $2 \cdot 8 \cdot 6$ διαιρεθέντος, προκύψει πηλίκον $+ 6$. Οὗ καὶ τῷ καινῷ Διαιρέτῃ $2 \cdot 8$ προςεθέντος, ἔςαι $2 \cdot 8 + 6$. Τοῦτο οὖν μετὰ τοῦ β΄. μέρους τῆς ῥίζης πολλαπλασιασθὲν παράξει $2 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6$. Ὃ ἀπὸ τοῦ λειψάνου ἀφαιρεθὲν οὐδὲν ὑπολείπει. Ὥςε εὕρηται ἡ ῥίζα $= 8 + 6$. Ἀλλὰ τοῦτον τὸν τρόπον οὐ δίδονται ἡμῖν οἱ ἀριθμοὶ, ἀφ' ὧν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἐξακτέαι, ἀλλ' οὕτω, $(14)^2 = 196$. Ὥςε ἐκ τούτου ἐξακτέα ἡ ῥίζα.

§ 271. Πρὸ πάντων οὖν τοὺς Τετραγώνους τῶν ἁπλῶν χαρακτήρων ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 9, σημειωτέον, οὓς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, κατὰ τὸν Πυθαγορικὸν πίνακα, ῥᾶςα εὑρήσομεν. Μᾶλλον δὲ, ἐν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε. Α. ... ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ὑποσυνάψομεν πινακιδίῳ, προσθέντες καὶ τοὺς Κύβους, καὶ Διτετραγώνους, (§. 184.) ἵνα μὴ τούτους ὕςερον ἐν μέρει καταγράφειν ἀναγκαζώμεθα.

Τετρ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ῥί:	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Κύ.	1	8	27	64	125	216	343	512	74[illegible]
Διτ.	1	16	87	250	256	1296	2401	4096	6561

Ἔνθα ὁρᾷς οὐδένα Τετράγωνον τῶν ἁπλῶν ἐννέα χαρακτήρων πλείους τῶν δύω ἀριθμοὺς περιέχοντα. Δύω δὲ τούτων μόνον ἕνα. Οὐδένα Κύβον πλείους τῶν τριῶν· τινὰς δὲ μόνον δύω, καὶ ἕνα. Οὐδένα Διτετράγωνον πλείους τῶν δ'. τινὰς δὲ μόνον τρεῖς, καὶ δύω.

§. 272. Προκειμένου τοίνυν ἀριθμοῦ, ἐξ οὗ τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν βούλει, χωρήσεις κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

1) Δίελε τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς κλάσεις, ἀνὰ δύω χαρακτῆρας ἑκάςην περιεχούσας, δεξιόθεν ἐπ' ἀριςερὰ προϊὼν, ὥςε περιτταρίθμων τῶν χαρακτήρων τυχόντων, καὶ μοναδικὸν ἔχειν χαρακτῆρα τὴν κλάσιν τὴν ἀριςερωτάτην.

2) Ζήτησον ἐν τῷ Πινακιδίῳ (§ ἀνωτ.) τὴν ῥίζαν τῆς α'. κλάσεως, ἀπὸ τῶν ἀριςερῶν δηλονότι ἀρχόμενος, ἢ τὴν ἐγγὺς ἐλάσσονα, εἰ ὁ ἀριθμὸς, οὗ ἡ ῥίζα ζητεῖται, οὐκ ἐπ' ἀκριβὲς τετράγωνος. Τοῦτο δὲ δεῖγμα σαφὲς τῇ α'. κλάσει καίτι τοῦ διπλοῦ τῶν μερῶν τῆς ῥίζης ἐνεῖναι, ἐν γένει τοῦ 2αβ.

3) Τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν, ἢ τὴν ἐγγὺς ἐλάττονα, εἰ ἡ ζητουμένη οὐχ εὕρηται, γράψον ἐν τῷ πηλίκῳ,

λίκῳ, ὡς τὸ α΄. μέρος τῆς ῥίζης, ἢ ὡς τὰ α. (§. 270.) καὶ μεθ᾽ ἑαυτῆς αὐτὴν πολλαπλασιάσας ἄφελε τὰ παραγόμενον ἀπὸ τῆς α΄. κλάσεως.

4) Διπλασίασον τὸ εὑρεθὲν α΄. μέρος τῆς ῥίζης, καὶ θὲς τὸν ἔσχατον τούτου χαρακτῆρα ὑπὸ τὸν α΄. τῆς β΄. κλάσεως, ἧς τοὺς χαρακτῆρας κατάγαγε, προθέμενος αὐτοὺς τῷ λειψάνῳ τῆς α΄. κλάσεως. Ἐὰν δὲ τὸ διπλοῦν παραγόμενον τοῦ α΄. μέρους τῆς ῥίζης πλείους ἀριθμοὺς, ἢ ἕνα παρέχῃ, προάγονται ἀεὶ πρὸς τὰ ἀριστερά.

5) Δίελε ἤδη μετὰ τοῦ διπλοῦ παραγομένου, ὡς καινοῦ διαιρέτου. Τὸ δὲ πηλίκον μὴ πάνυ μέγα λαμβανέσθω. Ὃ ἐστι τὸ β΄. μέρος τῆς ῥίζης, ἢ τὸ β. Πρόσθες τὸ ἤδη εὑρεθὲν πηλίκον καὶ τῷ Διαιρέτῃ, ὑπὸ τὸν β΄. χαρακτῆρα τῆς β΄. κλάσεως, ἔνθα ὁ τόπος κενὸς, αὐτὸ θέμενος, καὶ πολλαπλασιάσας τὸ πηλίκον μεθ᾽ ὅλου τοῦ διαιρέτου, τοῦ ἐκ τοῦ διπλοῦ παραγομένου τοῦ α΄. μέρους τῆς ῥίζης, καὶ τοῦ ἤδη προκύψαντος πηλίκου συγκειμένου, ἄφελε τὸ παραγόμενον ἀπὸ τῆς β΄. κλάσεως. Ἐὰν δὲ τὸ παραγόμενον μεῖζον ᾖ τοῦ ἀριθμοῦ, ἀφ᾽ οὗ ἀφαιρεθῆναι δέοι, τὸ πηλίκον εἴληπται πάνυ μέγα. Ὅθεν μονάδι μειωτέον, ἵνα τὸ παραγόμενον ἔλαττον τυγχάνῃ. Καὶ οὕτω προκύψαντος καὶ τοῦ β΄. μέρους τῆς ῥίζης, κατάγαγε τὸ λείψανον, εἴτι ὑπολέλειπται, καὶ τὴν ἑπομένην κλάσιν.

6) Εἰ δὲ πλείους τῶν δύω κλάσεις πάρεισι, θεωρῶν τὰ εὑρεθέντα δύω μέρη τῆς ῥίζης, ὡς τὸ α΄. μέρος, διπλασίασον αὐτὰ, θεὶς τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα ὑπὸ τὸν α΄. τῆς καταχθείσης κλάσεως, τοὺς δὲ λοιποὺς πρὸς τὰ ἀριστερά. Δίελε αὖθις, καταγράφων τὸ πηλίκον καὶ πρὸς τοῖς εὑρεθεῖσι μέρεσι τῆς ῥίζης, καὶ πρὸς τῷ Διαιρέτῃ. Πολλαπλασίασον, καὶ ἄφελε, ὡς ἀνωτ. παραπλησίως χωρῶν, εἰ καὶ ἕτεραι κλάσεις ἔτι ὑπάρχουσιν.

Οὕτως

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ Κ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ. ΔΙΑΣ Κ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Οὕτως οὖν εὑρήσομεν ἀκριβῶς τὴν ῥίζαν, εἰ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀληθὴς τυγχάνει τετράγωνος.

§. 273. Τοὺς προχειρισθέντας κανόνας καὶ διὰ παραδείγμ. ἀναπτύξαι οὐκ ἂν ὀκνήσαιμεν. Δεῖ δὲ καὶ τὸν ἐν γένει τύπον καταρχὰς καταγράφεσθαι, ἵν', ὅπως ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἐμπεριέχηται, δῆλον γένηται.

Ἐξαχθήτω ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 1764 Τετραγ.

$$
\begin{array}{rcl|l|l}
 & & 17 & 64 & \alpha + \beta \\
(\alpha^2) & = & \underline{16} & \underline{} & 4 \quad\;\; 2 \\
(2\alpha\beta + \beta^2) & = & 1 & 64 & \\
2\alpha + \beta & = & (8 & 2) & \\
2\alpha\beta + \beta^2 & = & 1 & 64 &
\end{array}
$$

α'. Διαιρεθεὶς δεξιόθεν πρὸς ἀριστερὰ εἰς κλάσεις δίδωσι δύω κλάσεις. (κ. 1.) Ὥστε καὶ τῆς ῥίζης οἱ χαρακτῆρες δύω.

β'. Ζήτησον ἐν τῷ πινακιδίῳ τὸν 17 ἐν τοῖς Τετραγώνοις, (κ. 2.) ὅστις οὐ πάρεστιν. Ἐγγὺς δὲ ὁ ἐλάττων αὐτοῦ Τετράγ. ἤτοι ὁ 16, οὗ ἡ ῥίζα 4. γραφήτω ἐν τῷ Πηλίκῳ, ὡς τὸ α'. μέρος τῆς ῥίζης, τουτ. α. Μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθέντος τοῦ 4. τεθήτω τὸ παραγόμ. ὑπὸ τὴν α'. κλάσιν. $4 \cdot 4 = 16 = \alpha^2$. καὶ ἀπὸ τοῦ 17 τοῦ 16 ἀφαιρεθέντος, ὑπολείπεται 1. (κ. 3.) Καταχθέντος ἤδη τοῦ λειψάνου, τουτ: τοῦ $2\alpha\beta + \beta^2$, διπλασίασον τὸ α'. μέρος τῆς ῥίζης, ἤτοι τὸν 4. καὶ ἔσται $2 \cdot 4 = 8$. τοῦτο δ' ἐστὶ 2α. καὶ θὲς αὐτὸ ὑπὸ τὸν 6 τῆς β'. κλάσεως. (κ. 4.) Δίελε 16 διὰ 8, καὶ ἕξεις πηλίκον τὸν 2. Τεθήτω καὶ οὗτος εἰς τὸ πηλ. ὡς τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης, ὅ ἐστι β, καὶ πρὸς τῷ Διαιρέτῃ 8. Καὶ τοῦ 82 ἐπὶ τὸν 2 πολλαπλασιασθέντος, προκύψει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ

164, τουτ: $(2\alpha+\beta)\,\beta$. ἢ $2\alpha\beta + \beta^2$. Ὃ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῆς καταχθείσης κλάσεως, καὶ τοῦ λειψάνου τῆς α΄. (κ. ς.) οἴχεται παντάπασιν. Ἐπεὶ οὖν οὐδὲν ὑπολέλειπται, ἡ ἀκριβὴς ῥίζα 42 τυγχάνει.

Τοῦτο βασανίται βουλόμενος, πολλαπλασιασὸν μεθ' ἑαυτῆς τὴν ῥίζαν, καὶ ἀναγκαίως προκύψει ὁ Τετράγωνος. Ἔςι γὰρ $42 \cdot 42 = 1764$.

Ὑποτεθήτω ἔτι καὶ ἕτερα τῶν παραδ. πολυαριθμότερα, παρ' οἷς καὶ τὸν τύπον γράφειν οὐκ ἐπιλησέον. Ὁ γὰρ τοῦτον μετὰ προσοχῆς μετιὼν ῥαδίως ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν μιμηθήσεται τὸ παράδειγμα.

Ἐξαχθήτω ἡ ῥίζα ἐκ τοῦ 8 1 7 2 1 6 | $\alpha + \beta$

```
                       1 |    |
                      81 | 72 | 16 | α + β
                                    | 904
            α² =      81 |
      2αβ + β² =         | 72 |
      2αβ + β  =      (1 | 80)|
  (2α + β) . β =       0 | 00 |
                         | 72 | 16
            2α + β (1804)
       (2α + β) . β  7216
                     0000
```

Σημείωσαι ἐνταῦθα, ὅτι ἐπὶ τῆς β΄. ἣν κατηγάγομεν, κλάσεως, ὁ 7 οὐ διαιρέσιμος διὰ 18. Ὥςε τὸ πηλίκον = 0. Ἀλλὰ καὶ ἡ μετ' αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα ποσότης = 0. (§. 69.) Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου ἀπὸ 72 οὐδὲν ἀφήρηται, ἀλλ' ὅλος (ὁ 72) κατήχθη. Τούτῳ δὲ τῷ παραδ. ἐχρησάμεθα, εἰς τὸ δεῖξαι, ὅπως χωρεῖν δέον ἐπὶ τῶν τοιούτων, καὶ ὅτε τῇ ῥίζῃ μηδενικὰ ἐνυπάρχουσι. Προκείσθω ἤδη παράδ. ἐν ᾧ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ῥίζης μηδενικὰ ἀπαντῶσιν.

Ἐξάγα-

Ἐξάγαγε τὴν ῥίζαν τοῦ	1440000				$\alpha + \beta$
					$\alpha + \beta :$
	1	44	00	00	$\alpha + \beta : :$
$\alpha^2 =$	1				1 2 0 0
$2\alpha\beta + \beta^2 =$		44			
$2\alpha + \beta =$		22			
$(2\alpha + \beta) . \beta =$		44			
	000000				

Ἔνθα τῶν δύω τελευταίων τάξεων ἡ ῥίζα = 0. Τοῦ γὰρ 0 ῥίζα = 0.

§. 274. Τῶν προχειρισθεισῶν Ποσοτήτων ἀκριβῶν οὐσῶν Τετραγώνων, καὶ αἱ τούτων ῥίζαι ἀκριβῶς ἀποδέδονται. Τοῦτο δὲ οὐκ ἀεὶ συμβαίνει. Δίδονται γὰρ καὶ ἀριθμοί, ὧν καὶ λείψανον ὑπολείπεται, εἰ ἀπὸ τῆς τελευταίας κλάσεως τὸ τελευταῖον ἀφαιρεθῇ παραγόμενον. Τὸ δὲ ὑπολειπόμενον γνήσιον τυγχάνει κλάσμα, τουτ: τῆς 1 ἔλαττον. Ὅθεν καὶ τὸ ἐν τετραγωνικῇ ῥίζῃ παράπτωμα οὐδὲ μονάδι ἐξισοῦται. Εἰ γὰρ τὸ ἐλλεῖπον μεῖζον ἦν τῆς 1, τὸν ἔσχατον τῆς ῥίζης χαρακτῆρα ἅπαξ, ἢ πολλάκις προσαυξῆσαι ἂν εἴχομεν. Ὡς οὖν ἐν τοῖς τοιούτοις τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκριβῶς μὴ ἐχούσης ἀποδοθῆναι, ἐπινενόηται μέθοδος, δι' ἧς, πλὴν τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν, τὸ λοιπὸν ἐν δεκαδικοῖς ζητεῖται κλάσμασιν, ὅτι ἔγγιστα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τούτῳ τῷ τρόπῳ γινομένοις. Καὶ τοῦτό εἰσιν αἱ ἄλογοι ῥίζαι. (§. 269.) Προκείσθω οὖντις τῶν τετραγώνων, οὗ ἡ ῥίζα πάντη πάντως ἀναπόδοτος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΡΟΥ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ληφθήτω ἡ ῥίζα τοῦ 1321.

1 3	21	36
9		
4	21	
	(66)	
3	96	
	25	

Ἥτις ὁ 36 τυγχάνει, ἀλλ' οὐκ ἀκριβῶς. (ὑπολείπεται γὰρ 25) Καὶ μονάδι προσαυξηθῆναι, ἤτοι 37 εἶναι, οὐ δύναται· παρεμπίπτει δὲ μεταξὺ 36, καὶ 37. Ἵνα δὲ τούτου πεῖραν λάβῃς, ἐπὶ τοῦ β'. μέρους τῆς ῥίζης λαβὲ 7 ἀντὶ 6, καὶ ὄψει τὸ παραγόμενον τὸ ἀφαιρετέον μεῖζον εἶναι τοῦ μειωτέου. Ἀναγκαῖον τοίνυν πρὸς τῷ ὁλοσχερεῖ ἀριθμῷ 36 καὶ κλάσμα εὑρεῖν, ὅ τῷ ὁλοσχερεῖ προσαρτητέον, ὡς καὶ τοῦτο τῇ ῥίζῃ προσῆκον. Εἰ οὖν τῷ 36 καὶ $\frac{1}{4}$ προσάψεις, καὶ 36 . $\frac{1}{4}$ μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιάσεις, ἕξεις παραγόμενον 1314 $\frac{1}{16}$. Ὥςε τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$ πάνυ βραχύ. Εἰ δὲ $\frac{3}{8}$, τουτ: 36 $\frac{3}{8}$, προκύψει τὸ παραγόμ. 1323 $\frac{9}{64}$. Ἄρα τὸ $\frac{3}{4}$ πάνυ μέγα. Τὸ τοίνυν κλάσμα, τὸ τῇ ὁλοσχερεῖ ῥίζῃ προσαρτητέον, μεταξὺ $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$ κεῖται. Ἀλλ' εἰ καὶ διὰ πολλοῦ τοῦτο ζητοίης, οὐχ εὑρήσεις. Ἔνθεν τοι καὶ ἑτέραν ὁδὸν ἐτράποντο τήνδε. Ποίησον, διὰ τὸ ἐν §. 164. ῥηθὲν, τοσαύτας καινὰς κλάσεις ἐκ μόνων μηδενικῶν, ὅσα μέρη τῆς ῥίζης ἔτι ἐν δεκαδικοῖς ἔχειν βούλει κλάσμασι, δύω μηδενικὰ ἑκάςῃ κλάσει ἐπὶ τετραγωνικῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς διδοὺς, καὶ οὕτω χωρῶν ζήτει τρόπῳ τῷ προδιδαχθέντι τὰ μέρη τῆς ῥίζης. Ἔνθα ὁμέντοι τὸ μέρος τῆς ῥίζης, τῆς ἀπὸ τῶν δοθέντων ὁλοσχερῶν ἐξαχθείσης, ἀπολήγει, κόμματι διαςέλλειν χρή· μετὰ γὰρ τοῦτο τὰ μέρη τῆς ῥίζης ἐν δεκαδικοῖς ἀποδίδονται κλάσμασιν. Ὁ δὲ λόγος τοῦ δύω

μηδενι-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ. Δ. της Β. τ.ΙΙ ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

μηδενικὰ προσαρτᾶν τῷ λειψάνῳ, ὅτι ἐξ ἑκάςης κλάσεως ἓν καινὸν δεκαδικὸν ἀνακύπτει κλάσμα. Ὅτι δὲ ἡ τοιαύτη πρᾶξις ὀρθὴ, ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι διὰ τοῦ τόπου, ὃν τὰ δεκαδικὰ καταλαμβάνουσι κλάσματα, δείκνυται ταῦτα διὰ τῆς 1, τοσαῦτα μηδενικὰ ἐχούσης, διαιρεῖσθαι, ὅσαι δυάδες μηδενικῶν τῷ λειψάνῳ προσήφθησαν.

Παράδειγμα εἰς ἀνάπτυξιν ληφθήτω τὸ πρότερον.

```
1 3|2  1|36,345
  9|    |
-------
   4|2 1|
    |(66)|
  3 9 6
-------------
    25| 00| 00|00
   (7 | 23)| ::|::
    21| 69 | ::|::
  ---- ----- --- ---
     3| 31 |   |::
      |(72 |64)|::
     2| 90 |56 |::
  ---- ----- --- ---
        40 |44 |00
       (7  |26 |85)
        36 |34 |25
       ---- --- ---
          4|09 |75
```

Ἔνθα τριῶν δυάδων μηδενικῶν προσαφθειςῶν, καὶ τρία δεκαδικὰ προέκυψαν, οὕτω κυρίως ἐκδηλούμενα $\frac{345}{1000}$. Ἀλλ' ὁ τόπος, ὃν κατέλαβον, τὸ αὐτὸ δηλοῖ. Εὕρηται οὖν ἡ ῥίζα, εἰ καὶ μὴ πάντῃ ἐπ' ἀκριβὲς, ἐλλείπει μέντοι τοῦ ἀκριβοῦς ἧττον, ἢ χιλιοςημόριον, μεταξὺ τοῦ 36,345, καὶ 36,346

ἐμ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ. της Κ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ἐμπίπτουσα. Καὶ ἔτι ἀκριβέστερον ἂν εὑρέθη, εἰ πλείους αἱ κλάσεις τῶν μηδενικῶν εἶεν οὕτως, ὥστε τὸ ἔλλειμμα καὶ τριλλιοστημορίου ἔλαττον εἶναι. Ἐὰν οὖν ἤδη 36. 345 μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθῇ, καὶ τὰ δεκαδικὰ προσηκόντως ἐξαλειφθῇ, προκύψει σχεδὸν 1321. Ἐντελῆ δὲ τὴν ῥίζαν λαβεῖν ἀμήχανον, μηδενικῶν, ὅσα ἂν βούλῃ, προσαφθέντων τῷ λειψάνῳ, ὡς ἄλογον οὖσαν. (§. 269.)

§. 275. Χρήσιμος δὲ ἡ μέθοδος τοῦ τὰς ῥίζας, ὡς ἔγγιστα, εὑρίσκειν, καὶ εἰ ἐξ ἁπλῶν ἀριθμῶν τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν πρόκειται. Τοσαῦται γὰρ κλάσεις μηδενικῶν παραληφθήσονται, ὅσα δεκαδικὰ ἔχειν βουλόμεθα. Ζητηθήτω ἡ $\sqrt{3}$ ἐν 3 δεκαδικοῖς. Ὥστε τῷ 3 τρεῖς κλάσεις μηδενικῶν προσθετέαι·

3	00	00	00	1, 732 . . .
1	: :	: :	: :	
2	00	: :	: :	
	(27)	: :	: :	
1	89	: :	: :	
	11	00	: :	
	(3	43)	: :	
	10	29	: :	
		71	00	
		(34	62)	
		69 .	24	

Ἐὰν οὖν 1, 732 μεθ' ἑαυτοῦ πολλασιασθῇ, προκύψει σχεδὸν 3.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

$$
\begin{array}{r}
1,732 \\
1,732 \\
\hline
3\,464 \\
51\,96 \\
1212\,4 \\
1732 \\
\hline
2,999824
\end{array}
= 2,\tfrac{999824}{1000000}.
$$

Ἐλλείπει τοίνυν τοῦ 3 ἔτι $\frac{176}{1000000}$, (ἐὰν γὰρ 176 τῷ 999824 προσθῇς, ἔσται ὁ ἀριθμ. 1000000 ἴσος τῷ παρον: τουτ: τὸ κλάσμα = 1, ἥτις προστεθεῖσα τῷ 2 δώσει παραλ. 3) ὅπερ οὐδὲ $\frac{1}{1000}$ τῆς μονάδος ἐξισοῦται.

§. 276. Καὶ ἐξ ἀριθμῶν, οἷς δεκαδικὰ ἐνυπάρχει, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν δυνατὸν, τῇ αὐτῇ χρωμένους μεθόδῳ, παρ' ὅσον ἐν τῇ τῶν κλάσεων διαιρέσει οἱ μὲν ὁλοσχερεῖς καθ' ἑαυτοὺς διαιρετέοι, τὰ δὲ δεκαδικὰ ἀριστερόθεν πρὸς τὰ δεξιὰ, εἴπερ ἀμέλει τοῖς ὁλοσχερέσι συνῆπται. Ἐν οἷς ἀριθμοῦ λείποντος, ὥστε τὴν κλάσιν μὴ συμπληροῦσθαι, προσαρτάσθω καὶ μηδενικόν. (τὸ αὐτὸ γὰρ παριστᾷ, ὃ καὶ τὰ προσαρτηθέντα δεκαδικὰ, πλὴν ὅτι ταῦτα (τὰ δεκ.) ἐνεργείᾳ ποσότητες τυγχάνουσι.) Ἐν δὲ τῷ πηλίκῳ, τῷ τὰ μέρη τῆς ῥίζης περιέχοντι, τὸ κόμμα μὴ παραλειπέσθω, τὸ τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀπὸ τῶν μηδενικῶν διαστέλλον, ἐκ τῶν ὁλοσχερῶν τοῦ τετραγώνου προκύψαντας.

Παραδ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ Π. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Παραδ. Ἐξαχθήτω ἡ ῥίζα τοῦ 135,543.

1	35,	54	30	11, 64 ....
1	: :	: :	: :	
	35	: :	: :	
	(21)	: :	: :	
	21	: :	: :	
	14	54	: :	
	(2	26)	: :	
	13	56	: :	
		98	30	
		(23	24)	
		92	96	
		5	34	

Κἀνταῦθα καὶ ἕτεραι κλάσεις μηδενικῶν προσετεθεῖεν, εἰς ἀκριβεστέραν τῆς ῥίζης εὕρεσιν, ἥτις, κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, ἐν τοῖς δεκαδικοῖς, ὧν ἠρξάμεθα, κλάσμασι προάγεται.

Εἰ δέοι ἀπὸ κλάσματος τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν, ἀπ' ἀμφοῖν ἐξακτέα τῶν ὅρων. π. χ. ἡ $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$. Ἦν γὰρ $\frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{9}{25}$. Ὅθεν ἀνάγκη πᾶσα καὶ τὴν ῥίζαν οὕτως ἐξάγειν.

Ὥστε εἰ ἐν γένει κλάσμα ὁποιονοῦν $\frac{\alpha}{\beta}$ κληθῇ, ἔσται ἡ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$. Καὶ $\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{2,236}{2,828}$.

Σημείωσαι, ὅτι, εἰ δέοι τὴν ῥίζαν ὅλου τοῦ κλάσματος ἐξαχθῆναι, τὸ ῥιζικὸν σημεῖον τίθεται μεταξὺ ἀμφοῖν τῶν ὅρων. Εἰ δὲ ὑπὲρ, ἢ ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν κεῖται, σημαίνει, ἤτοι μόνου τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ μόνου τοῦ παρονομαστοῦ τὴν ῥίζαν ληπτέαν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της ... ΙΩΑΝΝΙΝΑ

Ταὐτὸ συμβαίνει, καὶ τοῖς δεκαδικοῖς κλάσμασι. Ἡ τοῦ 0, 0043 $= \sqrt{\frac{43}{10000}} = \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{10000}}$

$= \frac{6,557}{100} = 0,06557\ldots$

Ἢ ἐπιτομώτερον, κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἔνθα τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος τὰς ἁπλᾶς διαςέλλει μονάδας, γενέσθω μία κλάσις, καὶ ἀπὸ τῶν ἀριςερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ προβαίνων δίελε τὰ δεκαδικὰ εἰς κλάσεις. Μοναδικοῦ δὲ ἀριθμοῦ ἐν τῇ τελευταίᾳ ὑπολειφθέντος τάξει, πρόσθες αὐτῷ καὶ μηδενικὸν, ὡς τοῦτο τὰ δεκαδικὰ μηδόλως μεταβάλλον. Καὶ ἀπὸ τῶν δεξιῶν δὲ ἡ διαίρεσις ἐπὶ τὰ λαιὰ ἂν χωροίη, εἰ τὰ δεκαδικὰ, ὧν ἡ πληθὺς περιττὴ, τῇ προσθέσει τοῦ 0 ἄρτια ποιήσαιμεν. Θὲς εἶτα εἰς τὸ πηλίκον, τὸ τὰ μέρη τῆς ῥίζης περιέξον, α΄. τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος, τὴν τῶν ὁλοσχερῶν δηλοῦν ἀπουσίαν, μεθ᾽ ὃ τὰ δεκαδικά. Εἰ δ᾽ ἐν τῷ τετραγώνῳ πρὸς ἀριςερὰν καὶ κλάσεις ἔνεισι, μηδενικὰ μόνον περιέχουσαι, ἀνθ᾽ ἑκάςης (θὲς εἰς τὸ πηλ:) ἓν μηδενικὸν μετὰ τὸ κόμμα, καὶ εἶθ᾽ οὕτως ἐξάγαγε τὴν τετρ. ῥίζαν. Ἀλλὰ καὶ, εἴσοι βουλητὸν, τοῖς δεκαδικοῖς τοῦ τετρ: τοῖς πρὸς δεξιὰν, ὅσα βούλει, μηδενικὰ ἔξεςι προσάψαι, ὥςε πλείω τὰ μέρη τῆς ῥίζης προκύψαι.

Παραδ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ Κ. ΤΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε. Π. της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Παραδ. ἑκάστου τούτων. Ἡ $\sqrt{}$ ο, 1444

```
0, |14|44| 0,38
   | 9|  |
------------
     5|44
     (68)
     5 44
------------
     0 00
```

Ὥστε ἡ $\sqrt{}$ τοῦ ο, 1444 = 0, 38.

Ἡ $\sqrt{}$ ο, 545

```
0, |54| 50| 0,7382 . . .
   |49| ::|
----------------
     5| 50
    (1| 43)
     4| 29
---------------------------
     1|2.1.|0.0| 00
      |(14 |68)| : :
     1 17   44   : :
---------------------------
          3.|56.|0.0
          (1|47 |62)
           2|95 |24
---------------------------
             66 |76
```

Ἡ $\sqrt{}$ ο, 00000485 1

```
0, |00|00|04|85|10| 0,00220
         | 4|::|  |
         ----------
            85 |
           (42)|
            84 |
         -----------
             1 |10
            (4 | 4)
```

Κἀνταῦθα τοῖς τελευταίοις ἀριθμοῖς, ἤτοι 110, καὶ ἑτέρας κλάσεις μηδενικῶν προσθεῖναι δυνάμεθα, τὴν ῥίζαν ἀκριβεστέραν ἔχειν βουλόμενοι. §. 277.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ. Δ.της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006