δὲ $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$.

Ἄρα $K = \frac{1500 \cdot \frac{243}{32} - 1500}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{9890\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}$

$= 9890\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{1} = 19781\frac{1}{4}$ μνῶν $=$ πάσῃ τῇ περιουσίᾳ. Ἡ δὲ πρόοδος πρόβαιη ἂν οὕτω.

$1500 + 1500 \cdot \frac{3}{2} + 1500 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1500 \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1500 \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 1500 + 2250 + 3375 + 5062\frac{1}{2} + 7593\frac{3}{4}$. Ἅπερ καὶ αἱ τῆς κληρονομίας μερίδες. Καὶ ταῦτα μὲν ἀρκούντος περὶ τούτων. ῥητέον δέ τι καὶ

Περὶ τοῦ Ἀπείρου.

§. 262. Κυρίως οὐδεὶς ἀριθμὸς, ἢ Ποσότης δίδοται, ὅς τῷ ὄντι ἀπείρως μέγιςος, ἢ ἀπείρως ἐλάχιςος τυγχάνει. Ὅσῳ γὰρ ἂν μέγιςος ὁ ἀριθμὸς ᾖ, ὃν τῇ διανοίᾳ παρεςήσαμεν, δυνάμεθα μέν τοι τὸν αὐτὸν τοῦτον ἐπινοῆσαι καὶ διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, κτ. Παραπλησίως καὶ ὁ ἐλάχιςος ἀριθμὸς, τῇ ἐπινοίᾳ γοῦν, διαιρεθήσεται εἰς μέρη. Ὥςε Ἀπείρως μέγιςον, καὶ ἀπείρως ἐλάχιςον λέγονται καταχρηςικῶς, δηλοῦντα, οὕτω ποσότητά τινα ἐπαυξῆσαι, ἢ μειωθῆναι, ὥςε πρὸς οὐδεμίαν ἑτέραν ποσότητα παραβάλλεσθαι, ἀλλὰ πᾶσαν ποσότητα πρὸς τὴν οὕτως ἐπαυξηθεῖσαν, ὡς τὸ μηδὲν λογίζεσθαι, καὶ τὴν οὕτω μειωθεῖσαν ἐν τῷ ὑπολογισμῷ πρὸς πᾶσαν ἑτέραν ὡς τὸ μηδὲν θεωρεῖσθαι. Τῇ οὖν ἐπινοίᾳ παραςήσομεν τὴν ποσότητα μᾶλλον, καὶ μᾶλλον αὐξομένην, καὶ εἰς τοσοῦτον μέγεθος ἀφικομένην, ὥςε οὐδεμία ταύτης μείζων ἂν γένοιτο. Καὶ τοῦτο καλεῖται Ἀπείρως μέγιςος ἀριθ-

ἀριθμὸς, ἢ Ποσότης. Νόει μοι γραμμήν τινα ἀπὸ τοῦ Α ἀρξαμένην, καὶ διὰ τοῦ Β, Α ——·Β—— ἀεὶ εἰς τὸ πρόσω χωροῦσαν ἄνευ πέρατος. Καὶ αὕτη τυγχάνει ἀπείρως μεγίςη γραμμή. Καὶ ἐπὶ δύω γραμμῶν παραλλήλων, ἑκατέρωθεν προεκβαλλομένων, μηδέποτε δὲ συμπιπτουσῶν, λέγεται, ὅτι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις ἐν ἀπείρῳ ἀποςάσει, τουτ: οὐδέποτε. Τὸ δὲ σημεῖον, δι' οὗ ἡ ἄπειρος παρίςαται ποσότης, τόδε (∞) τυγχάνει.

§. 263. Ὡσαύτως καὶ Ποσότητα νοεῖν πάρεςιν, οὕτως ἀεὶ μειουμένην, ὥςε τελευταῖον ἐλάσσονα πάσης νοουμένης ἑτέρας ποσότητος γίνεσθαι, καὶ τοῦτό ἐςιν ἡ Ἄπειρος ἡ Ποσότης, ἢ ἡ ἀπείρως ἐλαχίςη, ἢ ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ὡς τὸ μηδὲν θεωρεῖσθαι δυναμένη, (§. ἀνωτ.) ὡς τούτῳ ἔγγιςα οὖσα. Διαφόροις δὲ τοῖς τρόποις καὶ αὕτη ἐπισημανθήσεται, ὡς καὶ ἡ ἀπείρως μεγίςη ποσότης. Δείκνυσι μέντοι τόδε τὸ σχῆμα $\frac{1}{\infty}$ ἀεὶ Ποσότητα ἀπειροςήν.

§. 264. Πᾶν κλάσμα, εἴτε γνήσιον, εἴτε νόθον, ἀπείρως μεγίςη Ποσότης γενήσεται, ἐὰν ὁ τούτου ἀριθμητὴς πεπερασμένος, ὁ δὲ παρονομαςὴς ἀπείρως ἐλάχιςος, ἢ $= 0$, ᾖ. Ἔςω κλάσμα οἱονδηποτοῦν, οὗ ὁ ἀριθμητὴς ἐν γένει α κληθήτω, ὁ δὲ παρονομαςὴς ω, τουτ: $\frac{\alpha}{\omega}$. Καὶ α μὲν ἔςω ὁ Διαιρετέος, ω δὲ ὁ Διαιρέτης. Τὸ ἐκ τούτων πηλίκον ῥηθήτω $= \pi$. Δῆλον οὖν, ὅτι ἐὰν ω, ἢ ὁ Διαιρέτης ἡμισευθῇ, τὸ πηλίκον, ἢ π, διπλασιασθήσεται. Ἐὰν δὲ τετράκις, δεκάκις, ἑκατοντάκις, κτ. ω ἐλαττωθῇ, τὸ π τετραπλασιασθήσεται, δεκαπλασιασθήσεται, ἑκατονταπλασιασθήσεται, κτ. π. χ. Θετέον εἶναι τὸ $\alpha = 8$. Τὸ δὲ $\omega = 4$. Ὥςε $\frac{8}{4} = 2$,

ἢ

ἡ π = 2. Σημαινέτω ἤδη ω τὸ ἥμισυ τοῦ προτέρου. Τὸ οὖν πηλίκον ἔςαι $\frac{8}{2} = 4$. διπλάσιον τοῦ προτέρου. Ἔςω ω δεκάκις ἔλαττον. Καὶ ω, ὅπερ ἐν ἀρχῇ $= 4$ ἦν, ἔςαι $= \frac{4}{10}$. Καὶ $\frac{8}{0,4} = 20$. Ὥςε π δεκαπλάσιον, κτ. Ἀλλὰ τὸ ω ὡς ἀπείρως ἐλάχιςον νοεῖν ἔχομεν. Ἄρα ἐξ ἀνάγκης π ἀπείρως μέγιςον. Ὅσῳ οὖν ω ἐλαττοῦται, τοσούτῳ ἐγγύτερον τοῦ 0 γίνεται. Εἰ δὲ τὸ ω = 0 γένηται, ἀναγκαίως τὸ π ὡς ἀπείρως μέγιςον νοήσομεν. Εἰ γὰρ, τοῦ ω ἔτι ὡς ἀπείρως ἐλαχίςης ποσότητος θεωρουμένου, τὸ πηλίκον ἄπειρον ἦν, πολλῷ μᾶλλον ἔςαι τοῦτο, τοῦ ω = 0 γεγονότος. Τὸ γὰρ 0, οὕτως εἰπεῖν, ἡ ἐλαχίςη τῶν ἀπείρως ἐλαχίςων Ποσοτήτων. Ἔνθεν τοι τὰ σχήματα $\frac{a}{\frac{1}{\infty}}$, ἢ καὶ $\frac{a}{0}$, ἄπειρον ἐμφαίνουσι ποσότητα, ἢ $\frac{a}{\frac{1}{\infty}} = \frac{a}{0} = \infty$. Ἐν §. 229. δέδεικται, ὡς ἕκαςον κλάσμα θεωρεῖν δυνάμεθα ὡς τὸν Λόγον δύω ἀριθμῶν. Ὥςε καὶ τὸ σχῆμα $\frac{a}{\frac{1}{\infty}}$ θεωρηθείη ἂν ὡς ὁ λόγος $a : \frac{1}{\infty}$. Τὸ δὲ α, ὁποῖον ἂν ᾖ, ἔςαι ἀπείρως μέγιςον πρὸς τὸ ἀπείρως ἐλάχιςον. Παραπλησίως καὶ $\frac{a}{0}$ ὁ λόγος τυγχάνει τοῦ $a : 0$. Τὸ δὲ α αὖθις, ὅ, τι ἂν σημαίνῃ, ἀπείρως μέγιςον ἔςαι πρὸς τὸ μηδενικόν. Ὥςε, εἰ ἀντὶ τοῦ α πᾶς ἀριθμὸς, ἢ ποσότης τεθῇ, ἀεὶ τὸ σχῆμα τοῦ ἀπείρως μεγίςου τηρηθήσεται. Ὅθεν $\frac{12}{0}$, ἢ $\frac{12}{\frac{1}{\infty}} = \infty$, ἢ καὶ

$\frac{1}{\frac{1}{\infty}}$, ἢ $\frac{1}{0} = \infty$. Ὧν τὸ ἔσχατον μᾶλλον ἐν χρήσει εἰς τὴν τοῦ ἀπείρου δήλωσιν. Ὅθεν ἐφ' ἑκάστης Ποσότητος, ἥτινι ὡς Διαιρέτης τὸ 0 προσήκει, ἀντικαθιστῶσι τὸ ∞.

§. 265. Ἐὰν δὲ τοῦ κλάσματος ὁ μὲν Ἀριθμητὴς πεπερασμένος, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀπείρως μέγιστος ᾖ, τηνικαῦτα τὸ κλάσμα γενήσεται Ποσότης ἀπείρως ἐλαχίστη, καὶ ὅλως ἴσον τῷ μηδενί. Τεθήτω Ποσότης τις $= \alpha$ δι' ἑτέρας $= \omega$ διαιρουμένη. Ὥστε τὸ κλάσμα ἔστω $\frac{\alpha}{\omega}$. Καὶ τὸ μὲν α μενέτω ἀμετάβλητον, τὸ δὲ ω ἀεὶ αὐξέτω. Ἐὰν οὖν ω διπλασιασθῇ, τὸ πηλίκον ἡμισευθήσεται. Εἰ δὲ δεκάκις ω ηὔξηται, τὸ πηλίκον δεκάκις ἐλαττωθήσεται, κτ. Ἀλλὰ τὸ ω οὕτω μέγα ἔχομεν ἐπινοῆσαι, ὥστε μηδεμίαν Ποσότητα ταύτης μείζω δίδοσθαι. Τότε οὖν καὶ τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{\alpha}{\omega}$ ἀπειροστὸν γενήσεται, καὶ ὡς 0 θεωρηθήσεται. π. χ. Ἔστω $\alpha = 8$. $\omega = 2$. Καὶ ἔσται π, ἢ τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{8}{2} = 4$. Αὐξηθήτω 2, καὶ γενέσθω 4, καὶ ἔσται $\pi = 2$. Αὐξανέσθω ἔτι ω μᾶλλον καὶ μᾶλλον μέχρι τῶν 10000, καὶ γενήσεται $\pi = \frac{8}{10000} = \frac{1}{1250}$. Καὶ ἐὰν ω ἐπαύξηται μέχρι μιλλιονίων, διλλιονίων, τριλλιονίων, μᾶλλον δ' ἐπὶ τοσοῦτον, ὅσον τῇ ἐπινοίᾳ ἂν παραστῇ, ἀναγκαίως θεωρήσομεν, καὶ μεταχειρισθησόμεθα τὸ π ὡς οὐδέν. Ὅθεν ὁ τύπος $\frac{\alpha}{\infty} = 0$. Κἀνταῦθα ὁ λόγος τυγχάνει $\alpha : \infty$, καὶ α, ὁποῖον ἂν ᾖ, πρὸς τὸ ∞ οἰχήσεται.

§. 266.

§. 266. Ἐὰν ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς Ποσότητες ἀπαντῶσι μετ' ἀπείρως μεγίςων ποσοτήτων τῷ πολλαπλασιασμῷ συνημμέναι, ἢ καὶ ἀπείρως μέγιςαι ποσότητες μόναι, πᾶσαι αἱ λοιπαὶ τῶν ποσοτήτων οἴχονται πρὸς ἐκείνας, καὶ $= 0$ γίνονται, διὰ τὰ ἀνωτέρω. π. χ. Εἴπερ εἴη $3\alpha\beta\nu + 2\alpha\beta\infty = \pi\infty$ οἴχεται ἡ $3\alpha\beta\nu$, καὶ μένει μόνον $2\alpha\beta\infty = \pi\infty$. ἢ $\frac{\rho P\infty}{3\rho + \rho^2 - 2P} = \zeta$, αἱ ρ^2 καὶ $-2P$ οἴχονται πρὸς τὴν $3\rho\infty$, καὶ λείπεται μόνον $\frac{\rho P\infty}{3\rho\infty} = \zeta$. Εὑρίσκομεν δὲ τὰς ἀπείρους ποσότητας καὶ εἰς δυνάμεις ἠρμένας. ὡς ∞^2, ∞^3, κτ.

Ἐὰν ὑπερτέρα τις δύναμις ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ἀπαντᾷ, αἱ τοῦ ∞ ὑποδεέςεραι δυνάμεις οἴχονται πρὸς τὰς ὑπερτέρας. π. χ. Ἔςω $\frac{\rho P\infty + \rho\infty^2}{3\nu\infty - 2\pi\infty^2} = \tau$. Ἔνθα τὸ ∞ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐκπίπτει πρὸς τὸ ∞^2, (δῆλον δ' αὐτόθεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ ἀριθμητοῦ Ποσότητες.) Καὶ ἐν τῷ παρονομαςῇ τὸ ∞ πρὸς τὸ ∞^2, καὶ αἱ λοιπαὶ μετ' ἐκείνου Ποσότητες. Ὑπολείπεται οὖν $\frac{\rho\infty^2}{-2\pi\infty^2} = \tau$. Τοῦτο δὲ πλατύτερον ἀναπτύξαι, οὐ τῆς παρούσης θεωρίας. Ταὐτὸ συμβαίνει καὶ ταῖς ἀπειροςαῖς Ποσότησι. Τὸ γὰρ $\frac{1}{\infty}$, ἢ τὸ ἀπείρως ἐλάχιςον, ἐκπίπτει ἐν παντὶ ὑπολογισμῷ πρὸς ἑτέρας Ποσότητας, καὶ γίνεται $= 0$. π. χ. $\alpha + \frac{\beta}{\infty} = \nu$. Ἐνταῦθα οἴχεται τὸ $\frac{\beta}{\infty}$, ὡς ἀπείρως ἐλάχιςον. Ἔςι γὰρ $= 0$. ὑπολείπεται δὲ $\alpha = \nu$. Καὶ πᾶσα ποσότης, ἡ τῷ $\frac{1}{\infty}$

πολλα-

πολλαπλασιαζομένη, γίνεται $= 0$. ὡς α. $\frac{1}{\infty} = 0$.

Ἐὰν ἐν ὑπολογισμοῖς δυνάμεις τοῦ $\frac{1}{\infty}$ ἀπαντῶσιν, οἴχονται πᾶσαι πρὸς τὸ $\frac{1}{\infty}$, καὶ αἱ μείζους πρὸς τὰς ἐλάσσους· Ὡς πρὸς τὸ $\frac{1}{\infty^2}$ οἴχεται τὸ $\frac{1}{\infty^3}$. πρὸς τὸ $\frac{1}{\infty}$ τὸ $\frac{1}{\infty^2}$ κτ.

Ἀλλὰ πύθοιτο ἄντις, εἰ, τοῦ ∞ ποσότητα σημαίνοντος, ἧς μείζων οὐκ ἔχει ἐπινοηθῆναι, καὶ τοῦ $\frac{1}{\infty}$ ὄντος $= 0$, πλείους, ὡς εἰπεῖν, ἀπειρότητες διδονται, τουτ. εἰ ἀπειρόντι τοῦ ἑτέρου μεῖζον, καὶ ο ἔλαττον ἑτέρου ο; ἀποφάσκοντες ἀποκρινούμεθα. Συμβάλλεται δὲ τὰ ῥηθέντα εἰς τὸ τοὺς λόγους τῶν Ποσοτήτων πρὸς ἀλλήλας διορίζειν. Ἀλλὰ τοῦτο οὐ τοῦ παρόντος σκοποῦ.

§. 267. Πᾶν κλάσμα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἅμα ἐν τῷ ἀριθ. καὶ παρ. πολλαπλασιασθὲν, ἢ διαιρεθὲν, τροπὴν οὐχ ὑφίςαται. (§. 122.) Ὅτι ταὐτό ἐςιν, ὥσπερ εἰ τῇ μονάδι τοῦτο πολλαπλασιάζομεν, ἢ διαιροῦμεν, ἥτις οὔτε πολλαπλασιάζει, οὔτε διαιρεῖ. Τοῦτο δ' ἀληθεύει, καὶ ἐὰν ἡ ποσότης, δι' ἧς τοῦτο γίνεται, ἀπείρως μεγίςη, ἢ ἀπείρως ἐλαχίςη ᾖ. Ἐπειδὴ καὶ τὸ $\frac{\infty}{\infty} = 1$, καὶ $\frac{0}{0} = 1$, ὡς τοῦ διαιρέτου ἅπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριεχομένου. Ποσότης οὖν, π. χ. ἥδε $\frac{\alpha \,.\, \infty}{\beta \,.\, \infty} = \frac{\alpha}{\beta}$. Καὶ $\frac{\alpha \,.\, \frac{1}{\infty}}{\beta \,.\, \frac{1}{\infty}} = \frac{\alpha}{\beta}$ τυγχάνει. Τουτέςι μεταξὺ

τῶν

τῶν Ποσοτήτων α καὶ β ὁ αὐτὸς μένει Λόγος, ὃν καὶ πρότερον εἶχον, καίτοι ἀμφοῖν ἐν τῷ $\frac{\alpha \,.\, \infty}{\beta \,.\, \infty}$, ὡς ἀπείρως μεγίστων θεωρουμένων, καὶ ἐν λόγῳ οὐσῶν $\alpha \infty : \beta \infty$.

Παραπλησίως, καὶ εἰ ἄμφω μετ' ἀπείρου ἐλαχίστης ποσότητος, ἣν $= 0$ ἔχομεν ἐκδέξασθαι, ἐπολλαπλασιάσθησαν. Μεταξὺ γὰρ τοῦ $\alpha \,.\, \frac{1}{\infty} : \beta \,.\, \frac{1}{\infty}$ ὁ αὐτὸς λόγος, ὃς καὶ μεταξὺ τοῦ $\alpha : \beta$.

Περὶ τῆς τῶν Ῥιζῶν Ἐξαγωγῆς.

§. 269. Ἐν τοῖς προηγηθεῖσι, περὶ τῶν Ῥιζῶν, καὶ Ῥιζικῶν σημείων ὀλίγ' ἄττα ἐν παρόδῳ διαλαβόντες, ἐν τῷ παρόντι τὴν περὶ τούτων ἀκριβεστέραν ἀπεταμιευσάμεθα διδασκαλίαν. Ἀλλ' ἵνα τὴν τούτων συνέχειαν οἱονεὶ πρὸ ὀφθαλμῶν ἔχωμεν, ἀναγνωστέον τὰ ἐν §. §. 186. κτ. 200. κτ. ῥηθέντα. Ὅπως δὲ ἀπὸ δοθεισῶν ποσοτήτων, ἢ ἀριθμῶν, τὰς ζητουμένας ῥίζας ἐξάγειν δυνησόμεθα, καὶ δὴ ῥητέον. Ἐπεὶ γὰρ νοηθῆναι δυνατὸν, τὰς ποσότητας διὰ τοῦ τοσάκις πολλαπλασιασμοῦ ποσότητος ἑτέρας, οἵα ἡ ζητουμένη ῥίζα, προελθεῖν, οὐ δυσχερὲς τήνδε δι' ὑπολογισμῶν ἀνακαλύπτειν. Ἀλλ' ὡς δῆλον ἑξῆς γενήσεται, πάσας ἀκριβῶς εὑρεῖν οὐκ ἔνι, ὅσον βούλει, ἐλάχιστον τὸ ἔλλειμμα ποιήσαντι. Ἔνθεντοι αἱ Ῥίζαι, αἱ ἀκριβῶς μὴ ἀποδιδόμεναι, *Ἄλογοι Ῥίζαι* καλοῦνται. ὥσπερ τοὐναντίον, *Λογικαὶ*, ἃς ἀκριβῶς ἀποδοῦναι οἷόν τε. Οὕτως ἡ $\sqrt{2}$, ἡ $\sqrt{3}$, κτ. *Ἄλογοι* τυγχάνουσιν. Ἀλλ' εἰ καὶ τὰς τοιαύτας ἀλόγους ῥίζας ἐντελῶς ἐξάγειν ἀμήχανον, ἰδέαν μέντοι τινὰ καὶ πάνυ