Ὁ α΄. ὅρος, ἢ α ἔςω $= 1$. Ὁ δ΄ ἔσχατος $\beta = 81$. Ὥςε, τριῶν μέσων ὅρων ζητουμένων, ἔςαι τούτων ὁ α΄. ἢ $\chi = \sqrt[4]{1^3 . 81}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ 1 ἀεὶ 1 μένει. Ἔςαι $\chi = \sqrt[4]{81}$, ὅ ἐςιν $= 3$. Ἐὰν γὰρ 3 εἰς δ΄. ἐξαρθῇ δύναμιν, ἔςαι $= 81$. Ἄρα καὶ ἡ τετραπλῆ $\sqrt{}$ τοῦ $81 = 3$. Ἡ δὲ σειρὰ 1, 3, 9, 27, 81.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, τουτ: δι' ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης. δυνάμεθα καὶ τὸν α΄. καὶ ἔσχατον ὅρον εὑρεῖν, δοθέντων τοῦ παραγομένου ἐκ τῶν δύω ἄκρων, τῆς πληθύος τῶν ὅρων, καὶ τοῦ Ἐκθέτου.

Ἔςω δεδομένον τὸ παραγόμ. ἐκ τῶν δύω ἄκρων ὅριων $= \varepsilon$. Ὁ Ἐκθέτης δεδομένος $= \mu$. Ὡσαύτως καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅριων $= \pi$. Ἔςω ὁ α΄. ὅρος ἄγνωςος $= \chi$. Ὁ ἔσχατος παραπλησίως $= \psi$. Τὸ ἐκ τῶν δύω ἄρα ἄκρων παραγόμενον ἔςαι

$$\varepsilon = \chi\psi \quad : \chi \quad (\S. 114. \alpha'.)$$

$$\frac{\varepsilon}{\chi} = \psi$$

Ἀλλ' ἐπεὶ ὁ α΄. ὅρος $= \chi$. κατὰ τὸ §. 256. ἔςαι

$$\chi\mu^{\pi-1} = \psi$$

$$\frac{\varepsilon}{\chi} = \chi\mu^{\pi-1} \quad (\S. 48. \delta'.)$$

$$\cdot\ \chi \quad (79. \alpha'.)$$

$$\varepsilon = \chi^2\mu^{\pi-1} \quad : \mu^{\pi-1} \quad (\S. 114. \alpha'.)$$

$$\frac{\varepsilon}{\mu^{\pi-1}} = \chi^2.$$

Καὶ ἐξ ἀμφοῖν τῶν Ποσοτήτων τῆς ῥίζης ἐξαχθείσης.

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu^{\pi-1}}} = \sqrt{\chi^2} = \chi.$$

Οὕτω

Οὕτω τόινυν τοῦ χ, ἤτοι τοῦ α΄. ὅρου εὑρεθέντος, ῥᾷςα καὶ τὸ ψ. ἤτοι ὁ ἔσχατος, εὑρεθήσεται. Ἔςι γὰρ (§. 256.) $= \chi\mu^{\pi-1}$. ἢ καὶ $= \frac{\varepsilon}{\chi}$. Ὅτι, ὡς εἴδομεν, $\frac{\varepsilon}{\chi} = \chi\mu^{\pi-1}$. Τὸ δὲ χ εὕρηται.

Παράδ. Ἔςω τὸ παραγόμ. ἐκ τῶν δύω ἄκρων, ἢ $\varepsilon = 49$. Ὁ ἐκθέτης, ἢ $\mu = 2$. Ἡ τῶν ὅρων πληθὺς, ἢ $\pi = 5$. Τὸ οὖν χ, ἢ ὁ α΄. ὅρος ἔςαι $= \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2^{5-1}}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2^4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}}$.

Ἐκ τούτων οὐ χαλεπὸν τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν, καίτοι περὶ ταύτης οὐδὲν ἔτι διαλαβοῦσιν. Ἄμφω γὰρ αἱ Ποσότητες τῷ Πυθαγορικῷ (§. 59.) ἐνυπάρχουσι πίνακι. Ἔνθεντοι $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$. Ὁ δ' ἔσχατος ὅρος $= \frac{\varepsilon}{\chi} = \frac{49}{\frac{7}{4}} = 49 \cdot \frac{4}{7} = \frac{196}{7} = 28$. Καὶ ἐπεὶ $\mu = 2$, ἡ σειρὰ οὕτως ἂν χωροίη $\frac{7}{4}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{28}{4}$, $\frac{56}{4}$, $\frac{112}{4}$. ἢ $1\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28.

Ὁ ἐν τοιούτοις παραδείγμασιν ἑαυτὸν ἐξασκῶν καλῶς ποιήσει, μετὰ τὸ τὴν περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης διδασκαλίαν (περὶ ἧς μετ' ὀλίγα ἐροῦμεν) ἐκμαθεῖν.

§. 259. Ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, ἅμα ληφθέντες, ἀποτελοῦσιν ἓν κεφάλαιον. Δοθέντων οὖν τῶν ὅρων, ἢ εὑρεθέντων, κατὰ τὰ ἀνωτ. εὑρεθείη ἂν τὸ κεφάλαιον τούτων, τῇ προσθέσει. Ἀλλὰ τοῦτο ἐν προόδοις, ὧν οἱ ὅροι εἰς μέγα πλῆθος ἐκτεί-

ἐκτείνονται, λίαν ἐργῶδες. Ἔνθεντοι καὶ περὶ τούτου βραχεῖάν τινα ὑποσυνάψωμεν μέθοδον. Εἰς εὕρεσιν τοῦ κατὰ τὴν Γεωμετρικὴν Πρόοδον κεφαλαίου, ἀναγκαία ἡ γνῶσις τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου, καὶ τοῦ ἐκθέτου. Οὗτοι δὲ ἤτοι δεδομένοι, ἢ ζητητέοι, κατὰ τὰ Προβλήματα τὰ προηγηθέντα. Ταῦτα γὰρ τὰ τρία ἐξ ἀνάγκης ἀπαιτεῖ ὁ τύπος, ὃν εἰς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου ὑποδεῖξαι βουλόμεθα. Ζητηθήτω τοίνυν ἐν γένει τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον.

Ἔςω ὁ α'. ὅρος $= α$. Ὥςε ὁ ἔσχατος $=$ $αμ^{π-1}$, ἐὰν ἡ τῶν ὅρων πληθὺς $= π$. K ἄρα, ἤτοι τὸ κεφάλαιον ἁπάντων τῶν ὅρων, ἔςαι

$$K = α + αμ + αμ^2 + αμ^3 \ldots αμ^{π-2} + αμ^{π-1} \text{ §. 256.}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \;.\, μ$$

ἤτοι ἁπάντων τῷ μ πολλαπλασιασθέντων, προκύψει

$$μK = αμ + αμ^2 + αμ^3 + αμ^4 \ldots αμ^{π-1} + αμ^π. \text{ §. 191.}$$

Ἕκαςος ἄρα ὅρος αὔξει μιᾷ δυνάμει τοῦ μ. Ἐντεῦθεν καὶ ὁ ἔσχατος $αμ^{π-1}$, πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ μ, ἔςαι $αμ^{π-1+1} = αμ^π$. (§. αὐτ.)

Ἄφελε ἤδη τὰς δύω σειρὰς ἀπ' ἀλλήλων. Καὶ ἵνα τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφαιρεθῇ, οἱ ὅροι τῆς α'. σειρᾶς ὑποτεθήτωσαν ὑπὸ τοὺς τῆς τῷ μ πολλαπλασιασθείσης οὕτως, ὥςε τοὺς ἴσους ὑπαλλήλους εἶναι. Ὡς

μK

$$\mu K = \alpha\mu + \alpha\mu^2 + \alpha\mu^3 + \alpha\mu^4 \ldots \alpha\mu^{\pi-1} + \alpha\mu^{\pi}$$

$$K = \alpha + \alpha\mu + \alpha\mu^2 + \alpha\mu^3 + \alpha\mu^4 \ldots \alpha\mu^{\pi-1}$$

$$\mu K - K = -\alpha. \qquad\qquad + \alpha\mu^{\pi}$$

Καὶ ἐνεργείᾳ τῆς ἀφαιρέσεως γεγονυίας, ὑπολείπεται $\mu K - K = -\alpha + \alpha\mu^{\pi}$, ἢ $\alpha\mu^{\pi} - \alpha$. Τὸ γὰρ $\alpha\mu^{\pi}$ μόνον τῶν μειωτέων ὅρων οὐκ ἀνηρέθη ὑπό τινος ἀφαιρετέου. Ὡσαύτως καὶ τὸ α τοῦ ἀφαιρετέου ἐτέθη ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐναντίῳ τῷ σημείῳ, (§. 49.) ὡς ἀπό τινος ἀφαιρεθῆναι μὴ ἔχον. Ὥστε

$$\mu K - K = \alpha\mu^{\pi} - \alpha, \text{ ἢ}$$

$$(\mu - 1)\,K = \alpha\mu^{\pi} - \alpha \quad \text{ἄμεινον ἐκδηλωθέν.}$$

$$: \mu - 1.$$

$$\frac{(\mu - 1)\,K}{\mu - 1} = \frac{\alpha\mu^{\pi} - \alpha}{\mu - 1}. \quad \text{τουτέστι.}$$

$$K = \frac{\alpha\mu^{\pi} - \alpha}{\mu - 1}. \text{ Τὸ δὲ ἦν τὸ ζητούμενον.}$$

Τὸ κεφάλαιον ἄρα οἱασοῦν Γεωμετρικῆς Προόδου εὑρίσκεται, ἐὰν ὁ α΄. ὅρος μετὰ τοῦ ἐκθέτου πολλαπλασιασθῇ, εἰς δύναμιν ἠρμένου, ἡλίκη ἡ τῶν ὅρων πληθὺς, καὶ ἀπὸ τοῦ παραγομένου ὁ α΄. ὅρος ἀφαιρεθῇ, καὶ εἶτα ἡ διαφορὰ διὰ τοῦ ἐκθέτου, ἀφ' οὗ α΄. ἡ μονὰς ἀφαιρετέα, διαιρεθῇ.

Παράδειγμα. Προκειμένου εἰδέναι τὸ κεφάλαιον τῆς ἑξῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, ἧς οἱ ὅροι 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Εὑρετέος α΄.

ὁ ἐκθέτης κατὰ τὸ §. 257. ὅς ἐνταῦθα $= 2$. Οἱ δὲ ὅροι 9. Ὥςε $\alpha = 1$. $\mu = 2$. $\pi = 9$. Τὸ δὲ κεφάλ. ἁπάντων τῶν ὅρων, ἢ $K = \frac{1 \cdot 2^9 - 1}{2 - 1}$

$= \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{2^9 - 1.}{1} = 2^9 - 1$. Ἡ δ' ἐννάτη δύναμις τοῦ $2 = 512 - 1 = 511 =$ τῷ κεφαλαίῳ τῶν τῆς Προόδου ὅρων.

Ἔςω ὁ α΄. ὅρος 3. Ἡ πληθὺς τῶν ὅρων 10. Ὁ ἐκθέτης $\frac{3}{2}$. Τὸ ἄρα κεφάλ. τῆς ὁλικῆς Προόδου $K = \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 3}{\frac{3}{2} - 1}$. Τὸ δὲ $\left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{2^{10}} = \frac{59049}{1024}$. Ἔνθεντοι $K = \frac{3 \cdot \frac{59049}{1024} - 3}{\frac{3}{2} - 1}$

$= \frac{\frac{177147}{1024} - 3}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{177147 - 3072}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{174075}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{174075}{1024} \cdot \frac{2}{1} = \frac{348150}{1024} = 339 \frac{1014}{1024} = 339 \frac{507}{512} =$ τῷ κεφ. τῆς Προόδου.

Ἡ δὲ σειρὰ ἥδε. $3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4} \ldots\ldots 115 \frac{169}{512}$.

ἢ $3, 4\frac{1}{2}, 6\frac{3}{4} \ldots\ldots 115 \frac{169}{512}$.

Παράδειγμα μειουμένης σειρᾶς. Ἔςω ὁ α΄. ὅρος 8. Ὁ ἐκθέτης $\frac{2}{3}$. Ἡ τῶν ὅρων πληθὺς 7. Ὥςε $K = \frac{\alpha\mu^{\pi} - \alpha.}{\mu - 1}$ ἐνταῦθα $= \frac{8 \left(\frac{2}{3}\right)^7 - 8.}{\frac{2}{3} - 1}$

Τὸ δὲ $\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{2^7}{3^7} = \frac{128}{2187}$. Τουτ: $K =$

$8 . \frac{128}{}$

$$8 \cdot \frac{\frac{128}{2187} - 8}{\frac{2}{3} - \frac{3}{3}} = \frac{\frac{1024 - 17496}{2187}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{16472}{2187} \cdot -\frac{1}{3}.$$

Καὶ ἐνεργείᾳ τῶν δύω ἀποφατικῶν Ποσοτήτων πολλαπλασιασθεισῶν $= + \frac{49416}{2187} = 22\,\frac{1302}{2187} =$ τῷ κεφ. ὅλης τῆς Προόδου. Σειρὰ δὲ ἥδε. $8,\ 5\frac{1}{3},\ 3\frac{5}{9} \ldots\ldots \frac{512}{729}$.

Ἐὰν ἡ γνωςὰ 1) τὸ κεφάλ. = Κ. 2) ὁ α΄. ὅρος α. 3) ὁ ἔσχατος β. 4) ὁ ἐκθέτης μ 5) καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων π, καὶ ἐκ τούτων τῶν πέντε μόνον τρία δοθῇ, τὰ λοιπὰ δύω ἀεὶ εὑρεθήσεται δι᾽ ἐκείνων. Ὧν τινὰ προβλήμ. ἐπιλέλυται, ἕτερα δὲ Λογαριθμικῶς ἐπιλύονται, καὶ δι᾽ Ἐξισώσεων, περὶ ὧν ἐν οἰκείῳ τόπῳ.

260. Ἀλλὰ καὶ Προόδους παριςάναι τῇ διανοίᾳ δυνάμεθα, ἐπ᾽ ἄπειρον χωρούσας, καὶ ζητεῖν, εἰ καὶ τὸ τούτων κεφάλαιον εὑρεθῆναι δυνατόν. Ἐπὶ μὲν οὖν τῆς μειουμένης σειρᾶς τὸ ζήτημα καταφήσομεν, ἧς ὁ Ἐκθέτης ἐλάττων τῆς 1, ἤτοι γνήσιον κλάσμα. Τηνικαῦτα γὰρ οἱ ὅροι οὕτω τελευταῖον ἀπομειοῦνται, ὡς ἴσους τῷ μηδενὶ ἐκλογίζεσθαι. Εἰ δ᾽ ὁ ἐκθέτης μείζων τῆς 1, οἱ ὅροι αὐξηθήσονται διηνεκῶς, καὶ τελευταῖον ἐν ἀπείροις ταῖς σειραῖς, ἔσονται καὶ οὗτοι ἀπείρως μέγιςοι. Τῆς οὖν τοιαύτης σειρᾶς τὸ κεφάλαιον ἀμήχανον εὑρεῖν, ὡς καὶ ἡ τοῦ πράγματος φύσις διδάσκει. Τῶν δὲ μειουμένων ἀπείρων σειρῶν ταῖς μὲν οἱ ὅροι πάντες καταφατικοί, ταῖς δὲ τὰ ἐνόντα σημεῖα ἐναλλὰξ ἐπαμείβονται. Ὧν ἀμφοῖν ἐν γένει τὸν τύπον, καὶ τὴν δεῖξιν ἐποισόμεν.

Καὶ α΄. τοῦ α΄. Ἔςω ὁ α΄. ὅρος = α. Ὁ τῆς προόδου ἐκθέτης γνήσιον κλάσμα $= \frac{\beta}{\gamma}$. πλείω τούτων οὐκ ἀναγκαῖον εἰδέναι.

Ἡ σειρὰ ἔςαι ἄρα

$$\alpha + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4}$$. καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον.

Ὅθεν τὸ κεφάλαιον αὐτῆς, ἢ

$$K = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} \ldots$$ ὁμοίως ἐπ' ἄπειρον.

Πολλαπλασιασθήτωσαν μετὰ τοῦ $\frac{\beta}{\gamma}$.

Καὶ ἔςαι $K \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} + \frac{\alpha\beta^6}{\gamma^6} \ldots$ ἐπ' ἄπειρον.

Ἔνθα ἐφ' ἑκάςου ὅρου, εἰ καὶ ἐπ' ἄπειρον ἡ σειρὰ νοοῖτο, ἡ δύναμις τοῦ β καὶ γ διηνεκῶς μονάδι ἐπαύξεται.

Ἐὰν οὖν ἀπὸ τῆς α'. σειρᾶς ἡ β'. ἀφαιρεθῇ, ἥτις ἐλάσσων τῆς α'. ὡς κλάσματι πολλαπλασιασθεῖσα, τῶν ἴσων ὅρων ὑπαλλήλων τεθέντων, ὅπερ μέχρις ἐπ' ἄπειρον νοηθῆναι γοῦν ἔχει, ἤτοι

$$K = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} + \frac{\alpha\beta^6}{\gamma^6} \ldots$$

$$K . \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} + \frac{\alpha\beta^6}{\gamma^6} \ldots$$

ὑπολειφθήσεται

$K - K . \frac{\beta}{\gamma} = \alpha$. Οἱ δὲ λοιποὶ ὅροι ἀναιροῦσιν ἀλλήλους. Ἡ τοῦ λειψάνου καταλληλότερον ἐξενεχθέντος.

I —

$$\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)K=\alpha.$$

$$: \left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right) \quad (\S.114.\alpha'.)$$

$$K=\frac{\alpha}{1-\frac{\beta}{\gamma}}$$

Ἢ καὶ τῆς μονάδος κλάσματος γεγονυίας·

$$K=\frac{\alpha}{\frac{\gamma-\beta}{\gamma}}$$

Ὃ καὶ οὕτως ἂν παραςαίη.

$$K=\alpha:\frac{\gamma-\beta}{\gamma}.$$

τουτέςι (§. 148. καν.)

$$K=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\gamma-\beta}=\frac{\acute{\alpha}\gamma}{\gamma-\beta}$$

Εὑρήσομεν τοίνυν τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπ' ἄπειρον προόδου, ἧς οἱ ὅροι καταφατικοὶ, ἐὰν ὁ α' ὅρος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὰν παρονομαςὴν τοῦ Ἐκθέτου, καὶ τὸ παραγόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ παρον. τοῦ Ἐκθέτου, ἀφαιρεθέντος ἀπ' αὐτοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἐκθέτου.

Παράδειγμα. Ζήτησον τὸ κεφάλ. τῆς ἀπείρου σειρᾶς, τῆς ὧδε χωρούσης.

$3, 2, 1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}$ .... καὶ οὕτως ἐπ' ἄπ.

Ἐνταῦθα ὁ α'. ὅρος, ἢ $\alpha=3$. Ὁ ἐκθέτης, ἢ τὸ κλάσμα $=\frac{2}{3}=\frac{\beta}{\gamma}$. Εἰ γὰρ μετα $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιάσομεν, ἔςαι τὸ παραγόμ. $=2$ $=$ τῷ β'. ὅρῳ. Ὥςε $\beta=2$. Καὶ $\gamma=$

$\gamma = 3$. Ἄρα $K = \frac{\alpha\gamma}{\gamma - \beta} = \frac{3 \cdot 3}{3 - 2} = \frac{9}{1} = 9$. Καὶ τοῦτο ἐςὶ τὸ κεφάλ. τῆς ἀπείρου ταύτης σειρᾶς.

Αὖθις. Ζητηθήτω τὸ κεφ. τῆσδε $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπ.

Ἔνθα $\alpha = \frac{1}{2}$. Ὁ ἐκθέτης, ἢ $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{2}$. Ὥςε $\beta = 1$, καὶ $\gamma = 2$.

Ὅθεν $K = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{2 - 1} = \frac{\frac{2}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1 =$ τῷ κεφαλαίῳ ταύτης.

Εὑρεθήτω τὸ κεφάλ. τῆς σειρᾶς $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{12}{125}$ ...., καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον. Ἔνθα $\alpha = \frac{3}{5}$. $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2}{5}$. Ὥςε $\beta = 2$. καὶ $\gamma = 5$. Καὶ τὸ κεφάλαιον $= \frac{\frac{3}{5} \cdot 5}{5 - 2} = \frac{\frac{15}{5}}{3} = \frac{3}{3} = 1 =$ τῷ κεφαλαίῳ τῆς ἀπείρου σειρᾶς.

Εἰ δὲ τὰ σημεῖα ἐναλλὰξ ἐπαμείβονται, δυνατὸν ὡσαύτως ἐν μειουμένῃ σειρᾷ τύπον τοῦ κατ' αὐτὴν ἀποδοῦναι κεφαλαίου. Ἔςω αὖθις ὁ α'. ὅρος $= \alpha$. ὁ δ' ἐκθέτης γνήσιον κλασμα $= \frac{\beta}{\gamma}$. Καὶ ἔςαι τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον τῆς ἀπείρου σειρᾶς, ἢ $K = \alpha - \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4}$ .... ἐπ' ἄπειρον.

Πολλαπλασίασον ἤδη ὅλην τὴν σειρὰν τῷ $\frac{\beta}{\gamma}$.

Διά

Διὰ τούτου ἕκαστος ὅρος μέχρις ἐπ' ἄπειρον αὐξηθήσεται κατὰ μίαν δύναμιν, τὴν $\frac{\beta}{\gamma}$. οὕτω

$$K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} - \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} + \frac{\alpha\beta^5}{\gamma^5} \ldots$$

ἐπ' ἄπειρον.

Πρόσθες τῇ σειρᾷ, τῇ τῷ Κ ἀνηκούσῃ, τὴν σειράν, τὴν τῷ $K \cdot \frac{\beta}{\gamma}$ προσήκουσαν, τοὺς ἴσους ὅρους ὑπαλλήλους καταγράψας, οὕτω

$$K = \alpha - \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} \ldots$$

$$K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} - \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\alpha\beta^4}{\gamma^4} \ldots$$ Ὥςε

$K + K \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \alpha$.. Οὐδὲν γὰρ ἄλλο ὑπολείπεται.

Τοῦτο δὲ ἁρμοδιώτερον ἐκφανθὲν εἴη $\left(1 + \frac{\beta}{\gamma}\right) K = \alpha$. ἢ $\left(\frac{\gamma + \beta}{\gamma}\right) \cdot K = \alpha$.

Καὶ διελὼν ἄμφω διὰ τοῦ $\frac{\gamma + \beta}{\gamma}$ ἕξεις $K = \frac{\alpha}{\frac{\gamma + \beta}{\gamma}} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\gamma + \beta}$. (§. 148. κ.) Ὃ τὸ κεφάλαιον τῆς τοιαύτης σειρᾶς καταλλήλως ἐμφαίνει.

Παράδειγμα. Ἔςω ἡ σειρὰ

1 —

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27}$, κτ.

Ἔνθα $\alpha = \frac{3}{4}$. Ὁ ἐκθέτης, ἡ $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2}{3}$.

Ὥςε $\beta = 2$. $\gamma = 3$. Καὶ $K = \frac{\frac{3}{4} \cdot 3}{3 + 2}$

$= \frac{\frac{9}{4}}{5} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ = τῷ κεφαλαίῳ.

Ἔςω ἡ σειρὰ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ κτ.

$\alpha = 1$. $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{2}$. Ὥςε $\beta = 1$. καὶ $\gamma = 2$. ἄρα

$$K = \frac{1 \cdot 2}{2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

§. 261. Πρὶν ἢ πέρας τῷ περὶ Γεωμετρικῆς Προόδου κεφαλαίῳ ἐπιθεῖναι, δέδοκται δὲ ἑνὸς παραδείγματος, ἐκ τοῦ κοινοῦ εἰλημμένου βίου, τὴν μέχρι τοῦδε ἀναπτύξαι διδασκαλίαν

Ἀνήρτις τὸν βίον καταλύσας τὴν ἑαυτοῦ οὕτω διέθετο περιουσίαν, ὥςε τῶν έ. υἱέων τὸν μὲν ά. 1500 κομίσασθαι μνᾶς. Ἕκαςον δὲ τῶν ἑπομένων $\frac{1}{2}$ πλέον, ἢ ὁ προηγησάμενος ἐκομίσατο. Ζητεῖται, πόση ἡ περιουσία, καὶ πόσον ἕκαςος ἐκομίσατο.

Ἐνταῦθα Γεωμετρικὴ πάρεςι πρόοδος, ἧς οἱ ὅροι = 5. Οἱ γὰρ υἱεῖς τοσοῦτοι Ὁ δ' Ἐκθέτης = $1\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{2}$. Ὁ γὰρ ἑπόμενος $\frac{1}{2}$ πλεον, ἢ ὁ προηγησάμενος κομίζεται. Ὁ ά. ὅρος 1500 τυγχάνει. Ἐκ τούτων εὑρεθήσεται τὸ κεφάλαιον αὐτῆς, ὅ ἡ ἐπίλυσις τοῦ ά. ζητήματος. Ἔςι γὰρ (§. 259.)

$$K = \frac{\alpha\mu^{\pi} - \alpha}{\mu - 1} = \frac{1500\,(\frac{3}{2})^5 - 1500}{\frac{3}{2} - 1}.$$ Τὸ

δὲ

δὲ $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$.

Ἄρα $K = \frac{1500 \cdot \frac{243}{32} - 1500}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{9890\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}}$

$= 9890\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{1} = 19781\frac{1}{4}$ μνῶν $=$ πάσῃ τῇ περιουσίᾳ. Ἡ δὲ πρόοδος πρόβαίη ἂν οὕτω.

$1500 + 1500 \cdot \frac{3}{2} + 1500 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1500 \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1500 \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 1500 + 2250 + 3375 + 5062\frac{1}{2} + 7593\frac{3}{4}$. Ἅπερ καὶ αἱ τῆς κληρονομίας μερίδες. Καὶ ταῦτα μὲν ἀρκούντος περὶ τούτων. ῥητέον δέ τι καὶ

Περὶ τοῦ Ἀπείρου.

§. 262. Κυρίως οὐδεὶς ἀριθμὸς, ἢ Ποσότης δίδοται, ὅς τῷ ὄντι ἀπείρως μέγιςος, ἢ ἀπείρως ἐλάχιςος τυγχάνει. Ὅσῳ γὰρ ἂν μέγιςος ὁ ἀριθμὸς ᾖ, ὃν τῇ διανοίᾳ παρεςήσαμεν, δυνάμεθα μέν τοι τὸν αὐτὸν τοῦτον ἐπινοῆσαι καὶ διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, κτ. Παραπλησίως καὶ ὁ ἐλάχιςος ἀριθμὸς, τῇ ἐπινοίᾳ γοῦν, διαιρεθήσεται εἰς μέρη. Ὥςε Ἀπείρως μέγιςον, καὶ ἀπείρως ἐλάχιςον λέγονται καταχρηςικῶς, δηλοῦντα, οὕτω ποσότητά τινα ἐπαυξῆσαι, ἢ μειωθῆναι, ὥςε πρὸς οὐδεμίαν ἑτέραν ποσότητα παραβάλλεσθαι, ἀλλὰ πᾶσαν ποσότητα πρὸς τὴν οὕτως ἐπαυξηθεῖσαν, ὡς τὸ μηδὲν λογίζεσθαι, καὶ τὴν οὕτω μειωθεῖσαν ἐν τῷ ὑπολογισμῷ πρὸς πᾶσαν ἑτέραν ὡς τὸ μηδὲν θεωρεῖσθαι. Τῇ οὖν ἐπινοίᾳ παραςήσομεν τὴν ποσότητα μᾶλλον, καὶ μᾶλλον αὐξομένην, καὶ εἰς τοσοῦτον μέγεθος ἀφικομένην, ὥςε οὐδεμία ταύτης μείζων ἂν γένοιτο. Καὶ τοῦτο καλεῖται Ἀπείρως μέγιςος ἀριθ-