Περὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου.

§. 254. Ἀριθμῶν πληθὺς, ἢ Ποσοτήτων, διηνεκῶς αὐξομένων, ἢ μειουμένων, ὧν ἑκάςη ἄμεσος δυὰς τὸν αὐτὸν ἔχει ἐκθέτην, (§. 227) ὅν καὶ αἱ λοιπαὶ, (δι ἀλλήλων· ἀμέλει τῶν δύω ἀριθμῶν διαιρουμένων) Γεωμετρικὴ ἀκούει Πρόοδος. Ὡς 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, κτ. ἢ 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$. κτ. ἔνθα τῆς α΄. ὁ ἐκθέτης $=$ 2. τῆς δὲ β΄. $=$ $\frac{1}{3}$. Ἀναφύεται δὲ ἐκ τῆς συνεχοῦς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας, (§. 234.) ἧς ὁ γενικὸς τύπος ὅδε ἦν. $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2$. Ἐὰν οὖν τοὺς δύω ἐσχάτους ὅρους τῆς δε τῆς ἀναλογίας, πρώτους ὅρους ἑτέρας καινῆς συνεχοῦς ἀναλογίας ποιήσωμεν, καὶ οὕτως ἀεὶ χωρῶμεν, τόν δε τὸν λόγον οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας ἕξουσι. τουτ. ἔςαι ὁ α΄. πρὸς τὸν β΄. ὡς ὁ β΄. πρὸς τὸν γ΄. ὡς ὁ γ΄. πρὸς τὸν δ΄, κτ. Αἱ δ᾽ ἀναλογίαι οὕτως ἀποδοθήσονται.

$\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2$. Καὶ $\alpha\mu : \alpha\mu^2 = \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3$. Καὶ $\alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 = \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4$. κτ. Ἐπεὶ δὲ οἱ δύω ἔσχατοι ὅροι τῆς ἀναλογίας ἀεὶ ἐπαναλαμβάνονται, ἐξενεχθείη ἂν καὶ ὧδε τὸ σχῆμα. $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2 = \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 = \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4$, κτ. Ἀλλ᾽ ἐὰν ληφθῶσιν ἐνταῦθα οἱ δύω πρῶτοι δοθέντες ὅροι, καὶ οἱ διὰ τούτων ἐφεξῆς εὑρισκόμενοι, καὶ εἰς σειρὰν τεθῶσι, προκύψει σειρὰ ἡ ἑξῆς α, $\alpha\mu$, $\alpha\mu^2$, $\alpha\mu^3$, $\alpha\mu^4$, $\alpha\mu^5$, $\alpha\mu^6$, $\alpha\mu^7$, κτ. Ἔνθα τὸ μ διηνεκῶς μιᾷ δυνάμει ἐπαύξει, καὶ ἕκαςος ὅρος, ὁ προηγούμενος τυγχάνει πολλαπλασιασθεὶς, ἢ διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἐκθέτου. (κἀνταῦθα γὰρ τὸ μ Ἐκθέτης τῆς Προόδου καλεῖται, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἀναλογίας, Ἐκθέτης τοῦ λόγου, ἢ τῆς ἀναλογίας, (§. 227.) ἐμφαίνων, ποσάκις ἕκαςος ὅρος τὸν πρὸ αὐτοῦ περιέχει, ἢ ἐν ἐκείνῳ περιέχεται) Ἵνα δὲ τὸ λεγόμενον ὑπ᾽ ὄψιν παραςήσωμεν

μεν, ἀντικατασήτωσαν ἐν τῇ σειρᾷ ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀριθμοί. Ἔςω οὖν $\alpha = 1$. καὶ $\mu = 2$. ἡ δὲ σειρὰ ἔςαι $1,\ 1 . 2,\ 1 . 2 . 2,\ 1 . 2 . 2 . 2,\ 1 . 2 . 2 . 2 . 2,\ 1 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2,$ κτ. $= 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,$ κτ. Ἐφ' ἧς προφανῶς καθορῶμεν, ὅπως ἕκαςος ὅρος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸν πρὸ αὐτοῦ.

Ἐὰν δὲ αὖθις ἡ $\alpha = 1$, καὶ μ, ἤτοι ὁ Ἐκθέτης $= \frac{1}{2}$, ἔςαι ἡ σειρά.

$$1,\ 1 . \tfrac{1}{2},\ 1 . \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{2},\ 1 . \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{2} \text{ κτ.}$$

$$\text{ἢ } 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32},\ \text{κτ.}$$

§. 255. Ἐὰν ἐπὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου οἱ ὅροι ἐπὶ τὸ διηνεκὲς αὔξωσι, καλεῖται ἡ Σειρά, Αὔξουσα. Μειουμένων δέ, Μειουμένη. Κἀκεῖνο μὲν γίνεται, ἐὰν ὁ Ἐκθέτης, ἤτοι μ, μείζων τῆς 1 τυγχάνῃ, εἴτε ὁλοσχερὴς εἴη ἀριθμός, εἴτε νόθον κλάσμα. Τοῦτο δέ, ἐλάττονος τῆς 1, καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, γνησίου κλάσματος τοῦ Ἐκθέτου ὄντος. Εἰ δ' Ἐκθέτης ἡ 1 εἴη, οἱ ὅροι ἔσονται ἀλλήλοις ἴσοι.

§. 256. Τῶν ὅρων τῆς ἐν γένει σειρᾶς (§. 254.) τοῖς φυσικοῖς ἐπισημειωθέντων χαρακτῆρσιν, $\overset{1}{\alpha},\ \overset{2}{\alpha\mu},\ \overset{3}{\alpha\mu^2},\ \overset{4}{\alpha\mu^3},\ \overset{5}{\alpha\mu^4},\ \overset{6}{\alpha\mu^5},\ \overset{7}{\alpha\mu^6},$ κτ. δῆλον, ὅτι ἡ δύναμις τοῦ Ἐκθέτου μ ἀεὶ μονάδι ἐλαττοῦται τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐφ' ἑκάςου ὅρου. π. χ. ἐν τῷ ς' ὅρῳ τῆς Προόδου ἡ μὲν δύναμις τοῦ μ ἐςὶ 5, ὁ δ' ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμὸς 6. Ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ δ'. ἡ μὲν δύν. 3, ὁ δ' ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμὸς 4, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. Ἔνθεν τοι, ἐὰν ἡ τῶν ὅρων πληθὺς π ῥηθῇ, ἀναγκαίως ἡ δύναμις τοῦ ἐκθέτου τοῦ κατὰ τὸν ἔσχατον ὅρον, ἢ ἡ δύναμις τοῦ π ὅρου ἔςαι $\pi - 1$. Εἰ π. χ. ἡ τῶν ὅρων πληθὺς 6, ταυτ: $\pi = 6$, ἡ δύναμις

ναμις τοῦ ϛ'. ὅρου ἔςαι $6 - 1$, ἢ ϛ. Ὡς ἐπὶ πάντων. ὁ ἔσχατος ὅρος οἱασοῦν Γεωμετρικῆς προόδου $= \alpha\mu^{\pi-1}$, ἐὰν ἐν γένει ἡ τῶν ὅρων πληθὺς π κληθῇ. Ἐπεὶ δὲ ἐφ' ἑκάςου ἐγγὺς προηγησαμένου ὅρου ἡ δύναμις τοῦ ἐκθέτου 1 ἐλαττοῦται τῆς τοῦ ἑπομένου ὅρου, ἡ τοιαύτη σειρὰ, καθόλου θεωρουμένη, οὕτως ἂν ἐκδηλωθείη.

$$\alpha,\ \alpha\mu,\ \alpha\mu^2\ \ldots\ldots\ \alpha\mu^{\pi-3},\ \alpha\mu^{\pi-2},\ \alpha\mu^{\pi-1}.$$

Ἢ ἐὰν ἡ σειρὰ ἀντιςραφῇ, καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος α'. γένηται, εἴη ἂν ὁ γενικώτατος τύπος, ὁ πάσαις ταῖς Γεωμετρικαῖς ἐφαρμόζων Προόδοις, ὅδε·

$\alpha\mu^{\pi-1},\ \alpha\mu^{\pi-2},\ \alpha\mu^{\pi-3},\ \alpha\mu^{\pi-4},\ \alpha\mu^{\pi-5}$ .. κτ. μέχρις οὗ ἡ τῶν ὅρων πληθὺς τῷ π ἐξισωθῇ. Τηνικαῦτα γὰρ ἔςαι $\alpha\mu^{\pi-\pi}$, ἢ $\alpha\mu^0$. ἀλλὰ $\mu^0 = 1$. (§. 198.) ἄρα καὶ ὁ ὅρος $= \alpha . 1 = \alpha$. ὅπερ ὡς α'. ὅρος καὶ ἡμῖν παρείληπται.

Ἐὰν δὲ καὶ αὖθις τὴν Γεωμετρικὴν Πρόοδον θεωρήσωμεν,

$$\alpha,\ \alpha\mu,\ \alpha\mu^2,\ \alpha\mu^3,\ \alpha\mu^4,\ \alpha\mu^5,\ \alpha\mu^6\ ..$$

Εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ δύω ἄκροι ὅροι, καὶ ἀεὶ δύω ἐπίσης ἀπὸ τῶν δύω ἄκρων ἀφιςάμενοι, τὸ αὐτὸ παρέχουσι παραγόμενον. Ὡς ὁ α'. α, καὶ ὁ ἔσχατος $\alpha\mu^6 =$ τῷ β'. αμ, καὶ τῷ ϛ'. $\alpha\mu^5 =$ τῷ γ'. $\alpha\mu^2$, καὶ τῷ ε'. $\alpha\mu^4$, κτ. Ἐναργέςερον δὲ δι' ἀριθμῶν. Ἔςω $\alpha = 3$. $\mu = 4$.

ἡ δὲ Πρόοδος $3,\ 3.4,\ 3.4^2,\ 3.4^3,\ 3.4^4,\ 3.4^5$. ἢ

$3,\ 12,\ 48,\ 192,\ 768,\ 3072$, κτ.

ἧς τὰ

ἧς τὰ παραγόμενα ἐκ τῶν ταῖς γραμμαῖς συνημμένων ὅρων ἴσα ἀλλήλοις, ἤτοι $= 9216$.

Εἰ οὖν, ὡς δέδεικται, γενικώτατα, ὁ α'. ὅρος α κληθῇ, ὁ δ' ἔσχατος $a\mu^{\pi-1}$, ἀείποτε τὸ ἐκ δύω ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀΦισαμένων ὅρων παραγόμενον ἔςαι $a \cdot a\mu^{\pi-1} = a^2 \mu^{\pi-1}$.

§. 257. Τούτων κειμένων, ῥαδίως τὰ ἑξῆς ἐπιλυθήσονται Προβλήματα. Δοθέντος τοῦ α'. ὅρου μετὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς Προόδου, καὶ τῆς πληθύος τῶν ὅρων, τὸν ἔσχατον ὅρον εὑρεῖν. Ὁ ἔσχατος ὅρος, $= a\mu^{\pi-1}$. (§. ἀνωτ.) Ἔςω $a = 3$. Ὁ ἐκθέτης $\mu = 2$. ἡ δὲ τῶν ὅρων πληθὺς, ἢ $\pi = 17$. ὁ δὲ ἔσχατος $= 3 \cdot 2^{17-1} = 3 \cdot 2^{16}$. Ἔνθεντοι, ὁ 2 ἐξαρτέος εἰς τὴν ις'. δύν. καὶ εἶτα πολλαπλασιαςέος τῷ 3. τόνδε τὸν τρόπον. (§. 191.)

$2^1 \cdot 2^1 = 2^2 = 4$. Ἀλλὰ $2^2 \cdot 2^2 = 2^4 = 4 \cdot 4 = 16$. Αὖθις $2^4 \cdot 2^4 = 2^8 = 16 \cdot 16 = 256$. Καὶ $2^8 \cdot 2^8 = 2^{16} = 256 \cdot 256 = 65536$. Ὁ μετὰ τοῦ 3 ἔτι πολλαπλ. παρέξει τὸν ἔσχατον ὅρον $= 196608$. Εἰ δ' ὁ α'. ὅρος, ἢ $a = 1$ ἦν, ἱκανὸν εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου ὅρου τὸν Ἐκθέτην, καὶ τὴν τῶν ὅρων πληθὺν εἰδέναι· Ὅτι ἡ 1 οὐ πολλαπλασιάζει.

Προκείσθω καὶ ἓν παράδ. τῆς μειουμένης σειρᾶς, ἧς ὁ ἐκθέτης κλάσμα. (§. 255.) Ἔςω $a = 2$. $\mu = \frac{1}{3}$. ἡ δὲ τῶν ὅρων πληθὺς, ἢ $\pi = 7$.

Ὁ οὖν ἔσχατος ὅρος $= a\mu^{\pi-1}$. καὶ τῶν ἀριθμῶν ἀντικαταςάντων ἐνταῦθα $= 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} =$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 2 \cdot \frac{1^6}{3^6} = 2 \cdot \frac{1}{3^6} = \frac{2 \cdot 1}{729}$$

Ὥςε ὁ ἔσχατος ὅρος $\frac{2}{729}$. Τὸ δὲ κλάσμα εἰς ἐλάσσονας ὅρους ἀποβραχύνειν οὐκ ἔνι.

Αὐτὴ δὲ ἡ σειρά.

$$2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9}\cdot\ \frac{2}{27}\cdot\ \frac{2}{81},\ \frac{2}{243}\cdot\ \frac{2}{729}\cdot$$

Δοθέντων τοῦ ἐσχάτου ὅρου, τῆς πλήθυος τῶν ὅρων, καὶ τοῦ Ἐκθέτου, τὸν α΄. εὑρεῖν. Κληθήτω ὁ ἔσχατος ὅρος ὀνόματι γενικωτάτῳ $= \beta$.

Ὅθεν $\alpha\mu^{\pi-1} = \beta \quad : \mu^{\pi-1}$

$$\frac{\alpha\mu^{\pi-1}}{\mu^{\pi-1}} = \frac{\beta}{\mu^{\pi-1}} \quad (\S.\ 114.\ \alpha'.)$$

ἢ $\alpha = \frac{\beta}{\mu^{\pi-1}}$ Τουτ: ὁ α΄. ὅρος ἴσος τῷ ἐσχάτῳ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ Ἐκθέτου, εἰς δύναμιν ἐξηρμένου ἐλάττονα μονάδι τῆς τῶν ὅρων πληθύος.

Ἔςω ὁ ἔσχατος ὅρος τῆς Προόδου 18, ἤτοι $\beta = 18$. Ἡ δὲ τῶν ὅρων πληθὺς 5, ἤτοι $\pi = 5$. Ὁ δ᾽ ἐκθέτης 2, τουτ $\mu = 2$. Ἔςι δὴ ὁ α΄. ὅρος $\alpha = \frac{18}{2^{5-1}} = \frac{18}{2^4} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$. Ἡ οὖν σειρὰ προαχθείη οὕτως $\frac{9}{8}$, $\frac{18}{8}$, $\frac{36}{8}$, $\frac{72}{8}$, $\frac{144}{8}$. ἢ διαιρεθέντος, ὅπερ ἐνεργείᾳ διαιρεθῆναι δύναται, ἔςαι $\frac{9}{8}$, $2\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, 9, 18, ... Αὖθις, τοῦ α΄. καὶ β΄. ὅρου τῆς Γεωμετρικῆς δοθέντων προόδου,

δου, ῥᾷςα οἱ ἑπόμενοι εὑρεθήσονται. Εἰ γὰρ ὁ β'. ὅρος διὰ τοῦ α'. διαιρεθείη, προκύψει ὁ Ἐκθέτης (§. 254.) τῆς Προόδου, μεθ' οὗ ἕκαςος ὅρος πολλαπλασιασθεὶς τὸν ἑπόμενον παράξει.

Ἔςω καθόλου ὁ α'. ὅρος $=$ α. Καὶ ὁ β'. $=$ αμ. Τὸ οὖν $\frac{\alpha\mu}{\alpha}$ δίδωσι πηλίκον τὸ μ, ἤτοι τὸν Ἐκθέτην, δι' οὗ πάντας τοὺς ἑπομένους ὅρους τῆς Προόδου εὐχερῶς ἂν εὕροιμεν, ἤτοι αὐξούσης, ἢ μειουμένης. (§ 255.)

Παράδειγμα. Τεθήτω ὁ α'. ὅρος $=$ 4. ὁ β'. $=$ 9. Ὁ ἄρα Ἐκθέτης $= \frac{9}{4}$. ἐπὶ τοῦτο τὸ κλάσμα πολλαπλασιασθήτω ἕκαςος ὅρος, ἤτοι α'. ὁ β'. 9 ἐπὶ τὸν $\frac{9}{4}$, καὶ τὸ παραγόμενον $\frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$. ἔςαι ὁ γ'. ὅρος. Ὃς αὖθις μετὰ τοῦ $\frac{9}{4}$ πολλαπλασιασθεὶς δίδωσι τὸν δ'. ὅρον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἡ Πρόοδος δὲ 4, 9, $20\frac{1}{4}$, $45\frac{9}{16}$, $102\frac{33}{64}$, κτ.

Ἔςω ὁ α'. ὅρος 5, ὁ β'. 1, Ὁ δ' ἐκθέτης $\frac{1}{5}$. Ἡ δὲ πρόοδος

5, 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{625}$, κτ.

Ἐὰν ὁ α'. ὅρος τῆς Προόδου μὴ 1 ᾖ, εὐχερῶς τοῦτον εἰς μονάδα τρέψομεν, τῇ διαιρέσει ἁπάντων τῶν ὅρων διὰ τοῦ α'. ὅρου. Καὶ τούτου γεγονότος, προκύψει σειρὰ, τὸν αὐτὸν ἐκθέτην, καὶ τὸν αὐτὸν λόγον τῇ προτέρᾳ ἔχουσα.

Ἔςω ἐν γένει ἡ σειρὰ α, αμ, $\alpha\mu^2$, $\alpha\mu^3$, $\alpha\mu^4$, $\alpha\mu^5$. κτ.

Ἥτις διαιρεθ. διὰ τοῦ α ἔςαι 1, μ, μ^2, μ^3, μ^4, μ^5, κτ. τὰς δυνάμεις τοῦ μ μόνον ἔχουσα.

Καὶ

Καὶ δυνάμεθα ἄρα οἱανοῦν σειρὰν εἰς τοιαύτην ἀνάγειν, ἧς ὁ α΄. ὅρος = 1.

Παράδειγμα. Ἔςω ἡ σειρὰ . 2 , 6 , 18 , 54 . 162 , 486 κτ.

Ἧς ὁ ἐκθέτης = 3. Ἁπάντων οὖν τῶν κατ' αὐτὴν ὅρων διὰ τοῦ 2 διαιρεθέντων, ὁ μὲν α΄. ὅρος = 1 γενήσεται, ἡ δὲ σειρὰ =

1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , κτ. οἵτινες δυνάμεις εἰσὶ τοῦ 3.

§. 258. Καὶ ἑτεράτινα τῶν Προβλημάτων, ἅπερ ἐχομένως ὑποσυνάψομεν, διὰ τῶν εἰρημένων προχείρως ἤδη ἔχει ἐπιλυθῆναι.

Ἐπὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου εὑρήσομεν καὶ τοὺς μέσους ὅρους, τῶν ἄκρων δοθέντων. ὅ ἐςι, μεταξὺ δύω δοθέντων ἀριθμῶν ἕνα, ἢ πλείους ἀριθμοὺς συνεχῶς ἀναλόγους. (§. 234.) Ἀλλὰ πρὸ τούτου, ἐπιμνηςέον τῶν ἐν §. 200. περὶ τῶν Ποσοτήτων, ἐν αἷς ῥιζικὸν σημεῖον √ ἀπαντᾷ, προηγουμένως ῥηθέντων.

Οἱ δύω δοθέντες ἀριθμοὶ, ὧν μεταξὺ ἕνα, ἢ πλείους συνεχῶς ἀναλόγους εὑρεῖν δέοι, ὁ α΄. καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος τῆς Γεωμετρικῆς τυγχάνουσι Προόδου. Ἐπειδὴ οὖν δέδονται, ὁ μὲν α΄. ἀριθμὸς α ῥηθήτω, ὁ δ' ἔσχατος β. Καὶ α΄. ζητηθήτω μεταξὺ τούτων εἷς μέσος ἀνάλογος, ὅς = χ τεθήτω. Ἡ πρόοδος οὖν εἴη α , χ , β. Γνωςὸν δὲ, τὰ ἐκ τῶν ἄκρων παραγόμενα, καὶ τὰ δύω ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφιςαμένων ὅρων, ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. (§. 256.) Τὸ δὲ χ ἐν μέσῳ κεῖται. Ἀφίςαται ἄρα ἀπὸ τῶν δύω ἄκρων ἐπίσης. Ὥςε ἀναγκαῖόν ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθῆναι. Ἔςαι γὰρ $α : χ = χ : β$. Καὶ $αβ = χ^2$. Ἐκ δύω δὲ ἴσων Ποσοτήτων καὶ αἱ ἐξαχθεῖσαι √ ἴσαι.

ἴσαι $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\chi^2}$. ἢ $\sqrt{\alpha\beta} = \chi$. Ἀλλ' ἐπεὶ οὔπω τὴν ῥίζαν ἐξάγειν ἐδιδάχθημεν, ἱκανὸν ἐν τοσούτῳ καὶ τὸ $\sqrt{}$ σημεῖον.

Παράδ. δι' ἀριθμῶν. Ἔςω ὁ α'. ὅρος, ἤτοι $\alpha = 4$. Ὁ ἔσχατος $\beta = 9$. Ὁ ἄρα μέσος ἔςαι $= \sqrt{4 \cdot 9}$. ἢ $\chi = \sqrt{36} = 6$. Ἡ δὲ πρόοδος 4, 6, 9. ἧς ὁ ἐκθέτης $= \frac{3}{2}$. Συμβαίνει δὲ πολλάκις μεταξὺ δύω ἀριθμῶν πλείους συνεχῶς ἀναλόγους ζητεῖσθαι. π. χ. τρεῖς. Τῶν δύω δοθέντων ὁ μὲν α'. ἔςω $= \alpha$. ὁ δ' ἔσχατος $= \beta$. Ζητείσθωσαν ἤδη τύποι α'. τῶν ὅρων, τῶν εἰς ζήτησιν προκειμένων, οὓς κατὰ τὸν τῆς ἀναλογίας κανόνα εὑρήσομεν. Ἔςω ὁ α'. τῶν εὑρεθησομένων ὅρων $= \chi$. Ἔνθεντοι κατὰ τὸ §. 254. ἔςαι $\alpha : \chi = \chi : \frac{\chi^2}{\alpha}$.

Καὶ $\chi : \frac{\chi^2}{\alpha} = \frac{\chi^2}{\alpha} : \frac{\chi^3}{\alpha^2}$. Ἡ δὲ Πρόοδος

$\alpha,\ \chi,\ \frac{\chi^2}{\alpha},\ \frac{\chi^3}{\alpha^2},\ \beta$. Ἔςι δὲ §. 255.

$$\alpha\beta = \chi \cdot \frac{\chi^3}{\alpha^2}.$$

$$\text{Ἢ}\quad \alpha\beta = \frac{\chi^4}{\alpha^2}$$

$$\overline{\alpha^3\beta = \chi^4} \cdot \alpha^2 \ (\S.\ 79.\ \alpha'.)$$

Καὶ (§. 200.) $\sqrt[4]{\alpha^3\beta} = \sqrt[4]{\chi^4} = \chi^{\frac{4}{4}} = \chi$.

Ἔνθεντοι εἰς εὕρεσιν τοῦ χ, τὴν τετραπλῆν ῥίζαν τοῦ $\alpha^3\beta$ ἐξαγαγεῖν δεήσει. Οὗ γεγονότος, ἅπαντες οἱ ἑπόμενοι ὅροι πολλαπλασιασμῷ μόνῳ εὑρεθήσονται. Προκείσθω καὶ τούτου παράδειγμα εἰς ἀνάπτυξιν τοῦ ῥηθέντος.