$$\begin{array}{l} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \eta : \vartheta = \delta : \nu \\ \rho : \sigma = \nu : \varepsilon \\ \pi : o = \varepsilon : \tau \\ \upsilon : \varphi = \tau : \psi. \end{array}$$

Ἡ δ' ἐκ τούτων καινὴ ἀναλογία $\alpha.\eta.\rho.\pi.\upsilon : \beta.\vartheta.\sigma.o.\varphi = \gamma : \psi$. Ἐὰν γὰρ ἐνεργείᾳ καὶ οἱ ὅροι τῶν ἐσχάτων λόγων τῆς ἀναλ. πολλαπλασιασθῶσιν, ἐν τῇ καινῇ ὅμως ἀναλογίᾳ οἱ δύω ἔσχατοι ὅροι διὰ τῆς διαιρέσεως (§. 240.) εἰς τοὺς $\gamma : \psi$ ἀναχθεῖεν. Οὕτω ποίησον καὶ ἐν ἀριθμοῖς.

Περὶ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου.

§. 248. Οὕτω κέκληται, ὅτι τριῶν δοθέντων ὅρων, ζητεῖται ὁ δ'. ἐν πράγμασι μάλιςα, ὧν πολλὴ ἐν τῷ κοινῷ βίῳ ἡ χρῆσις. Τὰ δὲ τῆς ἀναλογίας πράγματα Λόγον τινὰ πρὸς ἄλληλα ἔχειν ἐπάναγκες· Οὕτω π. χ. τὰ ὤνια, καὶ ἡ τούτων τιμὴ ἐν λόγῳ ἴσανται. Τουτ. ὅσῳ πλέον τις ὠνεῖται, τοσούτῳ πλέον καὶ καταβαλεῖ. Καὶ δὶς τοσαῦτα ὤνια, διπλῆν ἀπαιτοῦσιν ἄρα καὶ τὴν τιμήν. Παραπλησίως χρόνος, καὶ τόκος τῶν δανεισθέντων, καὶ μυρία ἄλλα, ὧν τίνα πρὸς ἄλληλα σχέσιν ἔχει, ὁ ὀρθὸς εὑρήσει λόγος, τὰ περὶ τούτων ἐπιλύσειν μέλλων προβλήματα.

§. 249. Διαιρεῖται δὲ εἰς Ὀρθὴν, καὶ Ἀντίςροφον· Καὶ ὀρθὴ μὲν, ἐὰν οἱ ὁμόλογοι ὅροι τῆς ἀναλογίας οὕτω πρὸς ἀλλήλους ἔχωσιν, ὥςε π. χ. τοῦ β'. ὅρου μείζονος, ἢ ἐλάττονος ὄντος, ἢ ὁ πρῶτος, καὶ τὸν δ'. οὕτως ἔχειν χρή. Ἐπὶ δὲ τῆς ἀντιςρόφου τοῦτο οὐκ ἔςι. Παράδειγμα τῆς μὲν α'. τὸ, Ἐάντινος ὠνίου λίτραι 5, μνῶν πιπράσκωνται 7· πόσου ἄρα ἀπεμπωληθήσονται τοῦ αὐτοῦ ὠνίου λίτραι 13; τουτ: ἐπειδὴ αἱ 13 λ. πλείους τῶν 5, ὠνηθήσονται

σονται ἀμέλει καὶ πλείονος, ἢ αἱ 7 εἰσι μναῖ. Ὅθεν λέγομεν· 5 : 13 = 7 : χ. Τῆς δὲ β'. τὸ, Ἐὰν 10 γεωργοὶ ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ 20 πλέθρα σκάπτωσι, πόσου χρόνου δεηθήσονται εἰς τοῦτο 20 γεωργοί; Ἐνταῦθα οὐκ ὀρθὸν τὸ ἐπαγαγεῖν, 10 γεωργοὶ πρὸς 20 γ. ὡς 1 ἡμέρα : χ ἡμ. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ 20 γ. πλέον ἐργάζονται κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον, ἢ οἱ 10. ἐροῦμεν, ὡς 20 : 10 = 1 : χ.

§. 250. Πότερον δὲ, προκειμενόντι παράδειγμα τῇ ὀρθῇ, ἢ τῇ ἀντιστρόφῳ ἁρμόζει μεθόδῳ, τῷ τὸν νοῦν ἐπιστήσαντι ῥάδιον συνιδεῖν. Καὶ τούτου τεθέντος, τὰ μὲν ὁμοειδῆ τὸν α'. καὶ β'. τῆς ἀναλογίας καταλήψονται τόπον, τὸ δ' ἀνομοιοειδὲς τὸν γ'. Τὸ δὲ ζητούμενον τὸν δ'. Ἐπεὶ δὲ ἡ προκειμένη μέθοδος ἀληθὴς Γεωμετρικὴ τυγχάνει ἀναλογία, ἧς οἱ τρεῖς ὅροι δέδονται, ὁ δὲ δ'. ζητεῖται· εἰς εὕρεσιν τούτου, γενήσεται τὸ ἐν §. 241. εἴτε ὁλοσχερεῖς, εἴτε κλάσματα (ὧν τὸν πολλαπλ. καὶ διαίρ. ἐν τοῖς §. §. 140. 144. ἐπραγματευσάμεθα) εἶεν οἱ δοθέντες ὅροι· οἷον, Πόσου ἄντις 32 πήχεις ὑφάσματός τινος ὠνήσαιτο, εἰ 5 π. ὠνησάμενος 7 δραχμὰς ἀπέτισε;

$$5 : 32 = 7 : \chi . \quad \text{Καὶ } \chi = \frac{32 \cdot 7}{5} = 44 + \frac{4}{5} . \text{ δραχ.}$$

§. 251. Ἡ δὲ βάσανος τοῦ ὀρθῶς τὸ παράδειγμα ὑπολελογίσθαι ἐν §. 235. δέδεικται. Ἐν γὰρ ὀρθῶς ἐχούσῃ ἀναλογίᾳ τὰ ἐκ τῶν ἄκρων παραγόμενα ἴσα τοῖς ἐκ τῶν μέσων. Ἄρα καὶ $5 \cdot 44\frac{4}{5} = 32 \cdot 7$.

§. 252. Ἐν ἀντιστρόφῳ τῇ τῶν τριῶν μεθόδῳ, (§. 229) οἱ ὅροι οὐ τὴν αὐτὴν τηροῦσι τάξιν, ἣν καὶ ἐν τῇ ὀρθῇ, ἀλλ' ἐξενεχθήσονται, ὡς καὶ ἐν τῇ ἀντιστρόφῳ ἀναλογίᾳ. (§. 234. σχ.) Τὸ αὐτὸ ἔργον ὑπὸ πλειόνων ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ πληρωθήσεται, ἢ ὑπ' ἐλαττόνων

νων. Ὥςε ὁ χρόνος, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν εἰσὶν ἐν ἀντιςρόφῳ λόγῳ. τουτ: ὅσῳ πλείους ἐργάζονται, τοσούτῳ καὶ ἐλάσσονος αὐτοῖς χρόνου χρεία. Ἡ δὲ βάσανος ἡ αὐτὴ, ὡς καὶ ἡ τῆς ὀρθῆς. (§. ἀνωτ.)

Σχόλιον.

Σημείωσαι καθόλου, ὅτι τὴν ὀρθὴν τῶν τριῶν μέθοδον τὴν μεταχειριζόμεθα, ὅτε δυνάμεθα νὰ εἰπῶμεν, ὅσῳ πλέον τοῦτο, τοσούτῳ πλέον ἐκεῖνο· ἢ ὅσῳ ἔλαττον τοῦτο, τοσούτῳ ἔλαττον ἐκεῖνο. ὅσῳ πλείων ὁ πόνος, τοσούτῳ πλείων καὶ ὁ μισθὸς, καὶ ἀνάπαλιν· ἡ δ' ἀντίςροφος χωρεῖ, ὅτε πρέπει νὰ εἰπῶμεν. ὅσῳ πλέον τοῦτο, τοσούτῳ ἔλαττον ἐκεῖνο. ἢ καὶ, ὅσῳ ἔλαττον τοῦτο, τοσούτῳ πλέον ἐκεῖνο. ὡς δηλοῖ τὸ παράδ. τοῦ ἀνωτ. §.

§. 253. Ἐπὶ τῶν προβλημάτων, ἔνθα τῇ τῶν τριῶν μεθόδῳ δὶς χρῆσθαι ἀνάγκη, ἐν οἷς καὶ δύω μὴ ὁμόλογοι ὅροι ἐπ' ἀμφοῖν ταῖς ἀναλογίαις ἀλλήλοις ἴσοι, (§. 246.) ἡ μέθοδος, τῶν Πέντε Μέθοδος ἀκούει. τουτ: πέντε τινῶν δοθέντων, τὸν ς'. ζητεῖν πρόκειται. Οἷον 8 ἄνθρωποι ἐν ἡμέραις 12 κτίζουσι τείχους πόδας 4. πόσους πόδας κτίσουσι 36 ἄνθρωποι ἐν 18 ἡμέραις; Ῥητέον οὖν $8 : 36 = 4 : \chi$. καὶ $\chi = \frac{4 \cdot 36}{8} = 18$. ὡσαύτως καὶ $12 : 18 = 18 : \psi$. καὶ $\psi = \frac{18 \cdot 18}{12} = 27$. Ἀλλὰ τὰς δύω ἀναλογίας οὕτω τακτέον.

$$
\begin{array}{ccccccc}
8 & : & 36 & = & 4 & : & \chi \\
12 & : & 18 & = & \chi & : & \psi \\
\hline
8 \cdot 12 & : & 36 \cdot 18 & = & 4 & : & \psi \\
2 \quad 3 & & 9 \quad 9 & & 1 & & \\
1 & & 3 & & & &
\end{array}
$$

Ἐπειδὴ τοὺς ὅρους δύω ἀναλογιῶν πολλαπλασιάζει., καὶ δύω ὁμολόγους ὅρους τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρεῖν ἔξεςι

ἔξεσι, τῆς ἀναλογίας αὖθις τηρουμένης, διὰ τῆς ἐξασκήσεως τοὺς πολυαρίθμους πολλαπλασιασμοὺς τῶν δύω ἀναλογιῶν φυγεῖν δυνάμεθα, τῷ δύω ὅρους τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύω προκύψαντας ἀναλογιῶν, τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ διαιρεῖν. Οὕτως ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγμ. ὁ α'. καὶ γ'. ὅρος διῄρηνται διὰ τοῦ 4. Ὅθεν ὑπὸ τὸν 4 ἐτέθη τὸ πηλίκον, ἡ 1, καὶ ὑπὸ τὸν 8 ἐν τῷ α'. ὅρῳ, ὁ 2. Εἶτα οὗτος ὁ 2. καὶ ὁ 18 ἐν τῷ β'. ὅρῳ αὖθις διὰ τοῦ 2, εἶτα ὁ 12 καὶ 36 ἄμφω διὰ τοῦ 4, καὶ τελευταῖον τὰ ἐκ τούτων πηλίκα 3, καὶ 9 ἐν τῷ α'. ὅρῳ ἄμφω διὰ τοῦ 3. Ὥςε ὑπολείπεται ἥδε ἡ ἀναλογία $1 : 3 . 9 = 1 : \psi$. ὥςε $\psi = \frac{1 . 3 . 9}{1} = 27$. Κατὰ τοῦτο τὸ διεξοδικῶς ἀναπτυχθὲν παράδειγμα, καὶ ἕτερα ἡμῖν προβαλλόμενα παραδείγματα ἐπιτομώτερον ἐπιλύσομεν. Δίδονται δ' ἐνίοτε καὶ προβλήματα, ὧν ἡ λύσις ἐν τῇ τῶν πέντε μεθόδῳ τὴν ἀντίςροφον τῶν τριῶν μέθοδον ἀπαιτεῖ, ἐξοῦ ἐκείνῃ καὶ τὸ ὄνομα, Μέθοδος τῶν Πέντε Ἀντίςροφος, ἁρμόζει. Πότε δὲ ταύτῃ χρησόμεθα, αὐτὰ διδάξει τὰ προβλήματα.

Σχόλιον.

Εἶναι καὶ ἄλλαι μέθοδοι τῶν Ἑπτά, τῶν Ἐννέα, κτ. ὀνομαζόμεναι. καὶ ἄλλα εἴδη ὑπολογισμῶν, τὰ ὁποῖα ἔλαβον τὴν ὀνομασίαν ἐκ τῶν πραγμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα προσαρμόζονται, ὡς ὁ τοῦ Τόκου ὑπολογισμός, ὁ τοῦ Κέρδους, καὶ τῆς Ζημίας, ὁ τῆς Κοινωνίας, ἢ Συντροφίας, ὁ τῆς Μίξεως πραγμάτων ἑτεροειδῶν, κτ. οἵτινες τῷ ὄντι εἰς τὴν ἀναλογίαν ἐρείδονται. Περὶ τούτων οὐδὲν ἀναφέρομεν. διότι ἓν παράδειγμα δὲν ἀρκεῖ εἰς τὸ νὰ εὐχαριςήσῃ τὸν περίεργον, τὰ δὲ πολλὰ ἤθελαν ἦναι ἔξω τοῦ σκοποῦ.

Ἀλλὰ πρὸ τοῦ νὰ μεταβῶμεν εἰς ἑτέραν διδασκαλίαν, πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι δίδονται καὶ ἰδιαίτερα εἴδη ὑπολογισμῶν περίτινων πραγμάτων. Ὅθεν εἰς ἐκεῖνον ὁποῦ θέλει νὰ λύσῃ προβλήματα περὶ τῶν τοιούτων, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἰξεύρῃ τοῦτο τὸ εἶδος τῶν Λόγων· διότι ἀλλέως, ἂν ἰξεύρῃ καὶ τὴν Ἀριθμητικὴν, δὲν θέλει δυνηθῇ νὰ τὰ λύσῃ· διὰ παράδειγμα ἂς ἀναφέρωμεν μόνον ἕν.

Ἡ τιμὴ τῶν Ἀδαμάντων δὲν διευθύνεται κατὰ τὸ βάρος των, ὥςε τὸ δύω φοραῖς π. χ. βαρύτερον νὰ ἦναι ἄξιον καὶ διπλῆς τιμῆς. ἀλλὰ κατὰ Λόγον πολλῷ μείζονα τούτου. Ἐπὶ τῶν Ἀδαμάντων αἱ τιμαὶ ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ τοῦ βάρους. ςαθμῶνται δὲ κατὰ κεράτιον, καὶ κόκκον. τὸ δὲ κεράτιον $=$ 4 κόκκοις. Ἀδάμαντος οὖν προκειμένου, ςαθμοῦ κόκκων δύω, τοῦ δ' ἑνὸς κόκκου ἀδάμαντος 5 μνῶν τιμωμένου, διὰ νὰ μάθωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀδάμαντος δὲν πρέπει νὰ συνάξωμεν 1 κόκκος : 2 κόκ. $=$ 5 μναῖ : χ μνᾶς. ἀλλ' ὡς $1^2 : 2^2 = 5 : \chi$ ἤτοι ὡς $1 : 4 = 5 : \chi$. Ὥςε ὁ δύω κόκκων ἀδάμας 20 μνῶν ἄξιος. Εἰ δὲ δύω Ἀδάμαντες πρόκεινται, οὓς πρὸς ἀλλήλους παραβαλεῖν βουλόμεθα, καὶ ὧν ἑκατέρων τὸ βάρος, τὴν δὲ τιμὴν τοῦ ἑτέρου μόνον οἴδαμεν. Οἷον ὁ ἕτερος ἐςὶ τριῶν κόκκων, 45 μνῶν ἄξιος, ὁ δ' ἕτερος 5 κόκκων, συνάξομεν. $3^2 : 5^2 = 45 : \chi$. ἢ $9 : 25 = 45 : \chi$. Καὶ χ, ἤτοι ἡ τιμὴ τοῦ β'. $=$ 125 μναῖς. Ἀλλ' ἐπὶ τῶν Ἀδαμάντων θεωρητέον καὶ ἄλλας ἰδιότητας αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν ἐνταῦθα. Ὡς τὴν τούτων πυκνότητα, κτ.

Περὶ