β'. Ποσάκις ἠχεῖ Ὡρολόγιόντι ἠχοῦν, ἐν 24 ὥραις; Ὧδε πρόκειντα δύω πρόοδοι ἀλλήλαις ἴσαι. Τουτ: ἡ ἑτέρα ἀπὸ τῆς 1 μέχρι 12. Ὡσαύτως καὶ ἡ ἑτέρα ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι 12. Τὴν ἑτέραν οὖν τούτων ὑπολογιςεύσαντες πολλαπλασιάσομεν τὸ εὑρεθὲν μετὰ 2. $K = a\pi + \frac{(\pi - 1)\pi\delta}{2}$. Ἔνθα $a = 1$. $\pi = 12$. $\delta = 1$.

Ὥςε $1.12 + \frac{(12-1)\ 12.1.}{2} = 12 + \frac{11.12}{2} = 12 + 11.6 = 12 + 66 = 78$. Ὥςε ἑβδομηκονταεπτάκις ἐν 12, καὶ 156 ἐν 24. Εἰ δὲ καὶ ποσάκις τὰ τεταρτημόρια ἠχοῦσι προσαριθμήσομεν, δεκάκις ἐν ἑκάςῃ ὥρᾳ ἠχοῦντα, 240 ἐν 24 ὥραις, ἔςαι $156 + 240 = 396$.

Περὶ Γεωμετρικοῦ Λόγου.

§. 227. Τὸ ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου διὰ τῆς διαιρέσεως (§. 212.) τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἑτέρου προκύπτον πηλίκον. Ἤτοι τὸν ἀριθμὸν, ὅς ποσάκις ὁ ἕτερος τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριέχεται, ἐμφαίνει, Ἐκθέτην, ἢ Ὄνομα τοῦ λόγου ὀνομάζουσιν. Οἷον, ἐὰν 18 πρὸς 6 Γεωμετρικῷ τῷ λόγῳ παρεξετάζωμεν, διελοῦσι 18 διὰ 6, τὸ πηλίκον 3 (ἢ ὁ ἐκθέτης) δείξει, ποσάκις ὁ 18 περιέχει τὸν 6. Σημειοῦται δ' οὗτος ὁ λόγος τῷ ἑτέρῳ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, (§. 83.) μεταξὺ τῶν παραβαλλομένων παρεντιθεμένῳ. Ὡς 7: 21. ἢ 48: 12. Ἢ καὶ οὕτως $\frac{7}{21}$, ἢ $\frac{48}{12}$. Καὶ ἐν γένει $a : \beta$, ἢ $\frac{a}{\beta}$. Τὸ δὲ σημεῖον ἀπαγγέλλεται, α πρὸς β.

Ὁ δὲ τοῦ λόγου ἐκθέτης ἤτοι ὁλοσχερής ἐςιν ἀριθμὸς, ἢ κεκλασμένος. Οὗτος δὲ (ὁ κεκλ.) ἤτοι γνήσιον κλάσμα, ἢ νόθον. Ὥσπερ γὰρ, ποσάκις ὁ ἐλάσσων σιν ἀριθμὸς τῷ μείζονι ἐμπεριέχεται ζητοῦμεν, οὕτω καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ποσάκις ὁ ἐλάσσων τὸν μείζονα περιέχει ζητῆσαι δυνάμεθα, ὅτε καὶ ὁ ἐκθέτης ἐλάσσων ἔςαι τῆς 1, ἤτοι κλάσμα. Οὐμὴν ἀλλὰ καὶ εἰ Γεωμετρικῶς τὸν ἐλάσσονα πρὸς τὸν μείζονα παραβάλλομεν; οὐκ ἀεὶ ἐκεῖνος οὕτως ἀκριβῶς τούτῳ περιληφθήσεται, ὥςε τὸν ἐκθέτην, ἤτοι τὸ, ποσάκις, δι᾽ ὁλοσχεροῦς ἀποδίδοσθαι. Ἐὰν τοίνυν ὁ ἡγούμενος (§. 212.) ὅρος τοῦ λόγου ἐλάσσων ᾖ τοῦ ἑπομένου, ὁ ἐκθέτης ἔςαι ἀεὶ κεκλασμένος. Ὡς 12 : 48. οὗ ὁ ἐκθέτης $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$. ἢ 48 περιέχεται ἐν 12 μόνον $\frac{1}{4}$: κις. Τοῦ 24 : 18. ἢ $\frac{24}{18}$ ὁ ἐκθέτης $= \frac{24}{18}$ $= 1\frac{6}{18} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. ἢ 18 περιέχεται ἐν 24 πλέον, ἢ ἅπαξ, ἤτοι $1\frac{1}{3}$, ἢ $\frac{4}{3}$: κις.

Σχόλιον.

Οἱ λόγοι διαφέρουσιν ἀλλήλων, διαφόρους ἔχοντες ἐκθέτας. Καὶ ἔσονται ἄρα τοσαῦτα εἴδη λόγων διάφορα, ὅσοι διάφοροι ἐκθέται δίδονται. Καὶ α΄. μὲν εἶδος λόγων ἀναμφιβόλως θέλομεν εἰπεῖ, ἔνθα ἄμφω οἱ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις ἴσοι. Ὡς 3 : 3. 4 : 4. α : α. Ὧν ἐκθέτης ἡ 1. (§. 84. σχ.) Διὸ καὶ τὸ τοιόνδε εἶδος καλεῖται Λόγος τῆς Ἰσότητος. Τούτῳ δ᾽ ἕπονται οἱ ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν ἐκθέτην ἔχοντες λόγοι. Ὡς 4 : 2. Ἔνθα ἐκθέτης ὁ 2. Καὶ 12 : 4. Ἔνθα ἐκθέτης ὁ 3. μεθ᾽ οὓς, οἱ κλασματικὸν ἐκθέτην ἔχοντες.

§. 228. Ἔςω α ὁ ἡγούμενος ὅρος. β ὁ ἑπόμενος, καὶ ε ὁ ἐκθέτης. Ἐὰν οὖν δύω ἐκ τούτων δοθῶσιν, εὑρήσομεν ῥᾷςα τὸν γ΄. Ἔςι γὰρ $\alpha = \beta.\ \varepsilon$. Καὶ $\beta = \frac{\alpha}{\varepsilon}$. Καὶ $\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}$.

§. 229. Ἐκ τοῦ σημείου τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου, (§. 227.) καὶ τῆς τούτου ἰδιότητος ἕπεται, ὅτι ὡς κλάσμα τοῦτον θεωρῆσαι δυνάμεθα. Εἰ δὲ τοῦτο, ἐφαρμόσει ἄρα τῷ λόγῳ καὶ τὰ παντὶ κλάσματι ἐφαρμόζοντα. Ὅθεν τοι ὁ ἡγούμενος, καὶ ἑπόμενος ὅρος τοῦ λόγου μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντες, ἢ διαιρεθέντες, τὸν λόγον ἥκιςα μεταβαλοῦσι. (§. 122.) π. χ. $12 : 48 = \frac{12}{12} : \frac{48}{12}$, ἢ $= 1:4$. Ἔςι γὰρ $\frac{12}{48} = \frac{12}{48} : \frac{12}{12} = \frac{1}{4}$. (§. αὐτ.) Αὖθις $12 : 48 = 12 . 6 : 48 . 6$. ἢ $= 72 : 288$. Ἔςι γὰρ $\frac{12}{48} = \frac{12 . 6}{48 . 6} = \frac{72}{288}$. Ὥςε τὸ πηλίκον, ἢ ὁ ἐκθέτης τοῦ λόγου μένει ἀμετάβλητος. Καὶ ἐν γένει

$$\alpha : \beta = \alpha . \gamma : \beta . \gamma. \text{ ἢ καὶ } \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\beta}{\gamma}.$$

(§. 114. ε΄.) Εἰ λόγος τις πάρεςιν, οὗ τοὺς ὅρους εἰς ἐλάσσονας ἀναγαγεῖν ἔχομεν, ποιήσομεν τοῦτο, κατὰ τὸ (§. 125. σχ.). Οἷον προκειμένου τοῦ λόγου $137 : 548 = \frac{137}{548}$. Ἄμφω τοὺς ὅρους διαιρήσομεν τῷ 137. Ἤτοι $\frac{137}{548} = \frac{137}{548} : \frac{137}{137} = \frac{1}{4}$. Ὥςε ὁ λόγος $137 : 548 =$ τῷ $1 : 4$. Ὅςπερ ῥᾷον κατανοηθήσεται, ἢ ὁ $137 : 548$.

§. 230. Ἐὰν οἱ ὅροι δύω, ἢ πλειόνων Γεωμετρικῶν λόγων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιαθῶσιν, ἡγούμενοι μεθ' ἡγουμένων, καὶ ἑπόμενοι μεθ' ἑπομένων, τὸ παραγόμ. ῥηθήσεται Λόγος Σύνθετος. Οἱ δ' ἁπλοῖ λόγοι, Λόγοι Συντιθέντες. Ὡς, ἐκ τῶν λόγων $\alpha : \beta$, $\gamma : \delta$, $\varepsilon : \zeta$ προκύπτει διὰ τῆς συνθέσεως ὁ λόγος $\alpha\gamma\varepsilon : \beta\delta\zeta$. Καὶ $2 : 8$, καὶ $4 : 16$ δώσουσι τὸν λόγον $8 : 128$. Ὁ δ' ἐκθέτης τοῦ Συνθέτου λόγου τὸ παραγόμενόν ἐςιν ἐκ τῶν ἐκθετῶν τῶν συντιθέντων. Ὡς ὁ 16 τοῦ $4 . 4$.

§. 231. Ἐὰν οἱ λόγοι, οἱ οὕτω συντιθέμενοι ἴσοι ἀλλήλοις ὦσιν, ἀναφύονται ἐκ τούτων Λόγοι πολ-

Πολλαπλασίονες. τουτ: ἐκ δύω ἴσων ὁ Διπλασίων, ἢ Τετραγωνικὸς Λόγος. Ἐκ τριῶν ἴσων, ὁ Τετραπλασίων, ἢ Κυβικὸς, κτ. Ὧςε, τῶν λόγων α : β καὶ α : β, ὁ σύνθετος λόγος ἐςὶν $α^2 : β^2$. Ὅθεν λέγεται ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τὰ τετράγωνα ἴςανται ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν κατ' αὐτὰ πλευρῶν. Καὶ ἐκ τοῦ λόγου α : β τρὶς τεθέντος, ἀνακύπτει ὁ λόγος $α^3 : β^3$. Ὅθεν οἱ κύβοι, ἢ αὐτόθι λέγεται, εἰσὶν ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῶν κατ' αὐτοὺς πλευρῶν.

Περὶ Γεωμετρικῆς ἀναλογίας.

§. 232. Ἡ Γεωμετρικὴ ἀναλογία ἐκ δύω σύγκειται Γεωμετρικῶν λόγων, (§. 212.) ἀλλήλοις ἴσων· Ἴσοι δὲ λέγονται, εἰ ἐκθέτης (§. 227.) ὁ αὐτὸς ἀμφοῖν πάρεςιν. Οἷον τοῦ λόγου (§. 212.) 2 : 8 ὁ ἐκθέτης = 4. Ληφθήτω καὶ ἕτερος λόγος 5 : 20. Οὗ ὁ ἐκθέτης αὖθις = 4. Ἐνθέντοι, ὡς ἴσοι, τὴν Γεωμετρικὴν, ὡς εἴρηται, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, καὶ ταύτην τῷ τῆς ἰσότητος δεικνυμένην σημείῳ. (=) Καὶ ἐκκείσεται ἄρα ἡ Γεωμετρικὴ ἀναλογία οὕτω. 2 : 8 = 5 : 20. Ἣν οὕτως ἀπαγγελοῦμεν· 2 πρὸς 8, ὡς 5 πρὸς 20. Τὸν δ' ἐκθέτην τοῦ λόγου (§. 227.) οὐκ ἀεὶ ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν εἶναι συμβαίνει, ἀλλ' ἐνίοτε καὶ κλάσμα, γνήσιον, ἢ νόθον. Ἀλλ' οὐδεὶς τούτου λόγος, ὡς τῆς ἀναλογίας σῳζομένης· Ἐπὶ γὰρ δυοῖν λόγων, ἴσων ἀλλήλοις, ζητεῖται, εἰ ἐφ' ἑκατέρου ὁ ἕτερος ὅρος ἐπίσης τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριέχεται. Τὸ δ' ἐπίσης τοσάκις ἐμπεριέχεσθαι, εἴτε δι' ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, εἴτε διὰ κλάσματος ἐκφέρεται, πάντῃ ἀδιάφορον. Οὕτως ἂν εἴη 6 : 5 = 12 : 10 ὡσαύτως ἀναλογία. Ἧς ὁ ἐκθέτης $\frac{5}{6}$. Ὁ 6 γὰρ τῷ 5 οὐδὲ ἅπαξ ἐμπεριέχεται, ἀλλὰ μόνον $\frac{5}{6}$: ις. Ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθὲς, ἡ βάσανος τῆς διαιρέσεως δείξει (§ 98.) $\frac{5}{6} \times 6 = \frac{30}{6} = 5$ = τῷ διαιρετέῳ· Παραπλησίως καὶ 12 ἐν 10, $\frac{10}{12}$: 12, ἢ $\frac{5}{6}$: 12 ἐμπεριέχεται. Ὥςε ἡ ἀναλογία ὀρθή.

§. 233. Ἀκριβῶς τὴν ἀναλογίαν θεωροῦσιν εὔδηλον ἐκ τεσσάρων συγκροτεῖσθαι ὅρων. Τοῦ μὲν α΄. καθ' ἑαυτό· Τοῦ δὲ β΄. ἐκ τοῦ α΄. ἐπὶ τὸν ἐκθέτην πολλαπλασιασθέντος. Τοῦ δὲ γ΄. πάλιν καθ' ἑαυτόν· Τοῦ δὲ δ΄. ὡσαύτως ἐκ τοῦ γ΄. ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῶν δύω α΄. ὅρων. Ἐὰν οὖν ὁ α΄. ὅρος = α κληθῇ, ὁ δὲ γ΄. (ὅς ὁ α΄. ἐςιν ἐπὶ τοῦ β΄. λόγου) = β, ὁ δ' ἐκθέτης τῶν δύω πρώτων ὅρων = μ, ἔςαι ἡ ἑξῆς Γεωμετρικὴ ἀναλογία ἡ καθολικωτάτη. $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. Ὡς δι' αὐτῆς ἁπασῶν τῶν ἀναλογιῶν παριςαμένων. Ἐν ᾗ ὁ ἐκθέτης μ σημαίνει ὡσαύτως ἕκαςον ἀριθμὸν, εἴτε ὁλοσχερὴς, εἴτε κεκλασμένος εἴη.

§. 234. Ἡ ἀναλογία, ἐφ' ἧς ὁ γ΄. ὅρος διάφορος τοῦ β΄. Διακεκριμένη ἀκούει. Ὡς ἡ ἐν §. ἀνωτ. Ἔςω $\alpha = 4$. $\beta = 6$. $\mu = 5$. Καὶ ἔςαι $4 : 4 . 5 = 6 : 6 . 5$. ἢ $4 : 20 = 6 : 30$. Διακεκριμένη ἀναλογία. Ἢ $\alpha = 6$. $\beta = 12$. $\mu = \frac{1}{3}$. Καὶ ἔςαι $6 : 6 . \frac{1}{3} = 12 : 12 . \frac{1}{3}$. ἢ $6 : 2 = 12 : 4$ αὖθις Διακεκριμένη. Ἐφ' ἧς δ' ὁ γ΄. ὅρος ὁ αὐτὸς τῷ β΄. ἢ $\alpha\mu = \beta$. Συνεχής. Ὅθεν ἐὰν ἐν τῇ καθόλου ἀναλογίᾳ ἀντὶ τοῦ β τὸ αμ ἀντικατασῇ, ἡ ἑξῆς ἀνακύψει συνεχὴς ἀναλογία. $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu . \mu$. ἢ $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2$. Ἢ καὶ ἐὰν $\alpha = 5$. $\mu = 3$. τεθῇ, ἔςαι $5 : 5 . 3 = 5 . 3 : 5 . 3 . 3$. ἢ $5 : 15 = 15 : 45$. Καὶ $12 : 6 = 6 : 3$. Ἄμφω συνεχεῖς.

Σχόλιον.

Ἀντίςροφος Γεωμετρικὴ Ἀναλογία, ἢ Ἀντίςροφος Γεωμετρικὸς Λόγος λέγεται,

ται, ἐὰν ἀπὸ δ'. ποσότητας ἡ α'. πρὸς τὴν β'. λόγον ἔχει, ὃν ἡ δ'. πρὸς τὴν γ'. Οἷον 4, 6, 15, 10. ἵσανται ἐν ἀντισρόφῳ Γεωμετρικῷ λόγῳ. Ὅτι 4 ἔχει πρὸς 6, οὐχὶ ὡς 15 πρὸς 10, ἀλλ' ὡς 10 πρὸς 15.

§. 235. Ἐφ' οἱασοῦν Γεωμετρικῆς ἀναλογίας, εἴτε διακεκριμένης. $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. εἴτε συνεχοῦς $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2$, τὸ ἐκ τῶν δύω ἄκρων ὅρων παραγόμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν δύω μέσων. Ἐπ' ἐκείνης γὰρ $\alpha\beta\mu = \alpha\mu\beta$. Ἐπὶ δὲ ταύτης $\alpha\alpha\mu^2 = \alpha\mu\alpha\mu = \alpha^2\mu^2$. Ἐὰν δὲ καὶ τῶν δύω ἡγουμένων ὅρων διὰ τοῦ ἰδίου ἑπομένου (§. 212) ἑκάτερος διαιρεθῇ, ἢ καὶ ἀνάπαλιν, τὰ πηλίκα ἔσαι ἴσα.

Καὶ ἐν μὲν τῇ διακεκριμένῃ. $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$, ἔσαι $\frac{\alpha}{\alpha\mu} = \frac{\beta}{\beta\mu}$. ἢ $\frac{\alpha\mu}{\alpha} = \frac{\beta\mu}{\beta}$. (Ἔνθα τῶν α'. δύω κλασμάτων τὸ πηλίκον $= \frac{1}{\mu}$. Τὸ γὰρ α τοῦ ἀριθμητοῦ διαιρεθὲν διὰ τοῦ α τοῦ παρονομ: δίδωσι πηλίκον τὴν 1 (§. 84. σχ.) ἐν τῷ ἀριθμ: Τὸ δὲ μ μένει παρονομασής. Ὡσαύτως καὶ τὸ $\frac{\beta}{\beta\mu}$ δίδ. πηλίκον τὴν 1 ἐν τῷ ἀριθμ. καὶ μ ἐν τῷ παρον: Τῶν δὲ β'. δευτέρων τὸ πηλίκον ἴσον μ. (§. 124. δ'.) (Σημειώσῃ ἐνταῦθα, ὅτι οἱ ὁμόλογοι ὅροι γίνονται διαιρέται. Ὁμόλογοι δὲ, ὁ α'. τῷ γ'. καὶ ὁ β'. τῷ δ'.) Ἐν δὲ τῇ συνεχεῖ $\alpha : \alpha\mu = \alpha\mu : \alpha\mu^2$. ἔσαι $\frac{\alpha}{\alpha\mu} = \frac{\alpha\mu}{\alpha\mu^2}$. ἢ $\frac{\alpha\mu}{\alpha} = \frac{\alpha\mu^2}{\alpha\mu}$. (Ἔνθα τῶν α'. δύω κλα μ πηλίκον τὸ $\frac{1}{\mu}$, τῶν δὲ β'. δευτέρων τὸ μ). Βάσανος δὲ τῆς ἀναλογίας (εἰ ἀκριβὴς εἴη) εὐχε-

εὐχερεστέρα, ἡ ἰσότης τῶν παραγομένων ἐκ τῶν δύω ἄκρων ὅρων. καὶ ἐκ τῶν δύω μέσων, κατὰ τὸν κανόνα, ἢ ἡ εὕρεσις τοῦ ἐκθέτου τῶν δύω λόγων. Τοῦτον γὰρ ἐνίοτε καὶ κλάσμα εἶναι συμβαίνει. Οὕτω π. χ. $2 : 9 = 4 : 18$ Γεωμετρική ἐστιν ἀκριβὴς ἀναλογία. Ὅτι $4 \cdot 9 = 2 \cdot 18$. Ἄμφω $= 36$.

Αὖθις, ἐπειδὴ τὰ ἐκ τῶν ὁμολόγων ὅρων πηλίκα ἴσα ἀλλήλοις, ἢ $\frac{\alpha}{\alpha\mu} = \frac{\beta}{\beta\mu}$. Καὶ $\frac{\alpha\mu}{\alpha} = \frac{\beta\mu}{\beta}$ ἕπεται, ὅτι καὶ δύω κλάσματα ἴσα ἀλλήλοις (§. 125.) ἀναλογίαν συστήσουσι. Καὶ ἀνάπαλιν, οἱ δύω λόγοι ἀναλογίας οἱασοῦν διὰ κλασμάτων ἐξενεχθήσονται. Εἰ οὖν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ἔσαι καὶ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Καὶ $\alpha\delta = \beta\gamma$. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς. Εἰ $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, ἔσαι καὶ $3 : 5 = 9 : 15$. Καὶ $5 \cdot 9 = 3 \cdot 15$.

§. 236. Ὁ λόγος δύω κλασμάτων, ὡς $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ δι᾿ ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν ἐξενεχθῆναι δύναται. Εἰ γὰρ ἄμφω μετὰ τῶν παρονομ. $\beta\delta$ πολλαπλασιάσεις, προκύψει $\frac{\alpha\beta\delta}{\beta} : \frac{\gamma\beta\delta}{\delta} = \alpha\delta : \beta\gamma$. Καὶ $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = \frac{15 \cdot 24 \cdot 36}{24} : \frac{25 \cdot 24 \cdot 36}{36} = 15 \cdot 36 : 24 \cdot 25 = 9 : 10$.

§. 237. Ἐὰν δύω κλάσμασιν ἡ μονὰς, ἢ ὁ αὐτὸς προσῇ ἀριθμητὴς, ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα ἀντίστροφον τῶν παρονομαστῶν. Ὡς $\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha} : \frac{\alpha\beta}{\beta}$ (§. ἀνωτ.) $= \beta : \alpha$. Καὶ

$\frac{1}{6}$

$\frac{\varepsilon}{\alpha} : \frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{\varepsilon\alpha\beta}{\alpha} : \frac{\varepsilon\alpha\beta}{\beta} = \varepsilon\beta : \varepsilon\alpha = \beta : \alpha$. Ἐὰν δὲ δύω κλάσματα τὸν αὐτὸν ἔχωσι παρονομαςὴν, ὡς $\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\beta}{\gamma}$. ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα τὸν τῶν ἀριθμητῶν, δηλ: ὡς $\alpha : \beta$. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς παραδ. ἀμφοῖν τῶν τρόπων. $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$. Καὶ $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$. ἢ $2 : 3$.

§. 238. Δύω ἀλλήλοις ἴσα παραγόμενα Γεωμετρικὴν παρίζουσιν ἀναλογίαν, ἐν ᾗ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ α'. παραγομένου ἕξει πρὸς τὸν ἕτερον τοῦ β'., ὡς ὁ ἕτερος τοῦ β'. πρὸς τὸν ἕτερον τοῦ α'. Ἔςω $\mu\rho = \nu\pi$. Δίελε ἄμφω διὰ $\nu\rho$, καὶ ἔςαι $\frac{\mu\rho}{\nu\rho} = \frac{\nu\pi}{\nu\rho}$. (§.114.α') ἤτοι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\pi}{\rho}$. ἤτοι ἔςαι $\mu : \nu = \pi : \rho$. (§. 235.)

§. 239. Ἡ δὲ βάσιμος ἀναλογία. $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$, ἐφ' ἧς αἱ λοιπαὶ πᾶσαι ἐρείδονται, ἥτις καὶ ὡς συνεχὴς ἂν ληφθείη, τοῦ $\beta = \alpha\mu$ τεθέντος, διαφόρως ἀμείβεσθαι δύναται.

1) Διὰ τῆς τῶν ὅρων μεταςάσεως. $\alpha\mu : \alpha = \beta\mu : \beta$. Καὶ ἐπεὶ τὰ παραγόμενα ἐκ τῶν ἄκρων, καὶ μέσων ὅρων ἴσα ἀλλήλοις, ἔςαι καὶ τόδε τὸ σχῆμα ἀναλογία ἀκριβής. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς $5 : 6 = 10 : 12$. Καὶ $6 : 5 = 12 : 10$.

Καὶ ἐναλλάξ. $\alpha : \beta = \alpha\mu : \beta\mu$. Καὶ $5 : 10 = 6 : 12$. Καὶ τῶν ὅρων ἀντιςραφέντων, ἔςαι $\beta : \alpha = \beta\mu : \alpha\mu$. Καὶ $10 : 5 = 12 : 6$.

Καὶ ὅλης τῆς ἀναλογίας ἀντιςραφείσης, ἔςαι $\beta\mu : \alpha\mu = \beta : \alpha$. ἢ $12 : 6 = 10 : 5$.

2) Διὰ

2) Διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ β'. ὅρου τῷ α'. καὶ τοῦ δ'. τῷ γ'. Ἢ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ β'. ἀπὸ τοῦ α'. καὶ τοῦ δ'. ἀπὸ τοῦ γ'. Ὡς $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. ἢ $5 : 6 = 10 : 12$. Ἔςι δὲ καὶ $\alpha + \alpha\mu : \alpha\mu = \beta + \beta\mu : \beta\mu$. ἢ $5 + 6 : 6 = 10 + 12 : 12$. τουτ: $11 : 6 = 22 : 12$.

Καὶ $\alpha - \alpha\mu : \alpha\mu = \beta - \beta\mu : \beta\mu$. ἢ $5 - 6 : 6 = 10 - 12 : 12$. τουτ: $-1 : 6 = -2 : 12$.

Ἀλλὰ καὶ τῷ β'. καὶ δ'. Ὅρῳ ἔξεςι τὸν α'. καὶ γ'. προςιθέναι, ἢ ἀπ' ἐκείνων τούτους ἀφαιρεῖν. Ὡς $\alpha : \alpha\mu + \alpha = \beta : \beta\mu + \beta$. ἢ $5 : 6 + 5 = 10 : 12 + 10$. Τουτ. $5 : 11 = 10 : 22$.

Καὶ $\alpha : \alpha\mu - \alpha = \beta : \beta\mu - \beta$. ἢ $5 : 6 - 5 = 10 : 12 - 10$. τουτ: $5 : 1 = 10 : 2$.

3) Διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὅτε ἤτοι πάντας τοὺς τῆς ἀναλογίας ὅρους τῇ αὐτῇ πολλαπλασιάζομεν ποσότητι, ἢ μόνον δύω, δηλαδὴ 1) τὸν α'. καὶ τὸν β'. 2) Τὸν γ' καὶ τὸν δ'. 3) Τὸν α'. καὶ τὸν γ'. ἢ 4) τὸν β'. καὶ τὸν δ'. Ἀεὶ γὰρ ἀληθὴς ἡ ἀναλογία, εἰ τὸ παραγόμενον τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων ὅρων. Πολλαπλασιασθήτωσαν οὖν πάντες οἱ ὅροι τῆς καθόλου ἀναλογίας μετὰ τοῦ γ καὶ ἔςαι $\alpha\gamma : \alpha\mu\gamma = \beta\gamma : \beta\mu\gamma$. ἢ $5 . 2 : 6 . 2 = 10 . 2 : 12 . 2$. τουτ. $10 : 12 = 20 : 24$.

Αὖθις $\alpha\gamma : \alpha\mu\gamma = \beta : \beta\mu$. ἢ $5 . 3 : 6 . 3 = 10 : 12$. τουτ. $15 : 18 = 10 : 12$.
Καὶ $\alpha : \alpha\mu = \beta\gamma : \beta\gamma\mu$. ἢ $5 : 6 = 10 . 3 : 12 . 3$.

Καὶ $\alpha\gamma : \alpha\mu = \beta\gamma : \beta\mu$. ἢ $5 . 4 : 6 = 10 . 4 : 12$. τουτ. $20 : 6 = 40 : 12$.

Καὶ

Καὶ $\alpha : \alpha\mu\gamma = \beta : \beta\mu\gamma$. ἢ $5 : 6 \cdot 4 = 10 : 12 \cdot 4$. τουτ. $5 : 24 = 10 : 48$.

Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ Θεώρημα. Ἐὰν οἱ δύω ὅροι τοῦ ἑτέρου λόγου τῆς ἀναλογίας, ἢ δύω ὁμόλογοι ὅροι τῆς ἀναλογίας, ἢ καὶ ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς Ἀναλογίας, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῶσιν, ἡ ἀναλογία οὐ μεταβάλλεται. Ὃ καὶ κατωτ. δειχθήσεται.

4) Διὰ τῆς διαιρέσεως. ὅτε ἤτοι ἅπαντας τοὺς τῆς ἀναλογίας ὅρους, διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ἢ μόνον δύω διαιροῦμεν. 1) Τὸν α΄. καὶ β΄. 2) Τὸν γ΄. καὶ δ΄. 3) Τὸν α΄. καὶ γ΄. Καὶ 4) τὸν β΄. καὶ δ΄. Ἔνθα ἡ Γεωμετρικὴ ἀναλογία τηρεῖται.

Ὡς $\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} : \frac{\beta\mu}{\gamma}$. Ἢ $\frac{8}{2} : \frac{16}{2} = \frac{20}{2} : \frac{40}{2}$. τουτ. $4 : 8 = 10 : 20$.

Αὖθις $\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \beta : \beta\mu$. ἢ $\frac{8}{2} : \frac{16}{2} = 20 : 40$. τουτ: $4 : 8 = 20 : 40$.

Καὶ $\alpha : \alpha\mu = \frac{\beta}{\gamma} : \frac{\beta\mu}{\gamma}$. ἢ $8 : 16 = \frac{20}{2} : \frac{40}{2}$. τουτ. $8 : 16 = 10 : 20$.

Καὶ $\frac{\alpha}{\gamma} : \alpha\mu = \frac{\beta}{\gamma} : \beta\mu$. ἢ $\frac{8}{2} : 16 = \frac{20}{2} : 40$. τουτ. $4 : 16 = 10 : 40$.

Καὶ $\alpha : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \beta : \frac{\beta\mu}{\gamma}$. ἢ $8 : \frac{16}{2} = 20 : \frac{40}{2}$. τουτ. $8 : 8 = 20 : 20$.

5) Διὰ τῆς τῶν ὅρων εἰς δυνάμεις ἐξάρσεως, καὶ δι᾽ ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν. Ἐπεὶ δὲ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξα-

ἐξαγωγῆς οὔπω λόγος ἐγένετο, διὰ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου (§. 186.) αὐτὴν ἐκδηλώσομεν· Ἀλλὰ σημειωτέον, ὅτι ἤτοι πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας εἰς ὁμοβαθμίους δυνάμεις, ἤτοι εἰς δυνάμεις τοὺς αὐτοὺς ἐχούσας ἐκθέτας ἀνυψωθῆναι, ἢ ἀπὸ πάντων ῥίζαι, τῶν αὐτῶν ἐκθετῶν, ἐξαχθῆναι ὀφείλουσιν. ἄλλως γὰρ τὰ τῆς ἀναλογίας οὐ σώζεται. Οἷον $\alpha^2 : \alpha^2 \mu^2 = \beta^2 : \beta^2 \mu^2$. ἢ $4^2 : 16^2 = 9^2 : 36^2$. Τουτ. $16 : 256 = 81 : 1296$.

Καὶ $\alpha^\nu : \alpha^\nu \mu^\nu = \beta^\nu : \beta^\nu \mu^\nu$. Ἔστι γὰρ $\alpha^\nu \beta^\nu \mu^\nu = \alpha^\nu \mu^\nu \beta^\nu$. Ἐνταῦθα ἐφαρμόζουσι καὶ τὰ ἀπὸ 1 μέχρι 5 ῥηθέντα, τῆς ἀναλογίας αὖθις τηρουμένης.

Ὡς $\alpha^\nu \pm \alpha^\nu \mu^\nu : \alpha^\nu \mu^\nu = \beta^\nu \pm \beta^\nu \mu^\nu : \beta^\nu \mu^\nu$. Τὸ γὰρ παραγόμενον $\alpha^\nu \beta^\nu \mu^\nu \pm \alpha^\nu \mu^\nu \beta^\nu \mu^\nu$ = τῷ παραγομ. $\alpha^\nu \mu^\nu \beta^\nu \pm \mu^\nu \mu^\nu \alpha^\nu \beta^\nu$.

Ἐπεὶ δὲ καὶ δυνάμεις δίδονται, ὧν ὁ ἐκθέτης ἀποφατικὸς, ἕξομεν καὶ τοιάσδε ἀναλογίας $\alpha^{-\nu} : \alpha^{-\nu} \mu^{-\nu} = \beta^{-\nu} : \beta^{-\nu} \mu^{-\nu}$. ἢ $4^{-2} : 16^{-2} = 9^{-2} : 36^{-2}$. Καὶ ἐπειδὴ $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, (§. 198.) τὰς τοιαύτας τῶν ἀναλογιῶν ἐκδηλώσομεν καὶ οὕτως.

$\frac{1}{\alpha^\nu}$

$\frac{1}{\alpha^\nu} : \frac{1}{\alpha^\nu \mu^\nu} = \frac{1}{\beta^\nu} : \frac{1}{\beta^\nu \mu^\nu}$. Ἢ

$\frac{1}{4^2} : \frac{1}{16^2} = \frac{1}{9^2} : \frac{1}{36^2}$.

Ὡσαύτως καὶ δι' ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης.

$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\alpha\mu} = \sqrt{\beta} : \sqrt{\beta\mu}$. ἢ $\sqrt{4} : \sqrt{16} = \sqrt{9} : \sqrt{36}$.
Τουτ. $2 : 4 = 3 : 6$.

Ἢ καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\nu]{\alpha\mu} = \sqrt[\nu]{\beta} : \sqrt[\nu]{\beta\mu}$. Καὶ διὰ τὸ §. 200. ἐξενεχθείη ἂν καὶ οὕτω.

$\alpha^{\frac{1}{\nu}} : \alpha^{\frac{1}{\nu}} \mu^{\frac{1}{\nu}} = \beta^{\frac{1}{\nu}} : \beta^{\frac{1}{\nu}} \mu^{\frac{1}{\nu}}$.

§. 240. Δύω ὅρων τῆς ἀναλογίας διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθέντων, ἢ διαιρεθέντων, ἡ ἀναλογία οὐ μεταβάλλεται. Δείκνυται δὲ οὕτως. $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. κατὰ τὸ §. 235. $\frac{\alpha}{\alpha\mu} = \frac{\beta}{\beta\mu}$. Ἄμφω κλάσματα ἰσοδύναμα. Ἀλλὰ καὶ $\frac{\alpha\gamma}{\alpha\mu\gamma}$. ἢ $\frac{\alpha : \gamma}{\alpha\mu : \gamma} = \frac{\alpha}{\alpha\mu}$. (§. 122.) Ὡσαύτως, καὶ $\frac{\beta\gamma}{\beta\mu\gamma}$. ἢ $\frac{\beta : \gamma}{\beta\mu : \gamma} = \frac{\beta}{\beta\mu}$. Ὥςε καὶ $\alpha . \gamma : \alpha\mu\gamma = \beta : \beta\mu$. ἢ $\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma} = \beta : \beta\mu$. Τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ κατὰ τῶν ἐσχάτων δύω ὅρων. Ἄρα περὶ ἁπάντων τῶν τεσσάρων, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

§. 241. Ἐὰν τρεῖς ὅροι τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ἤτοι συνεχοῦς, ἢ διακεκριμένης, δοθῶσιν, εὑρήσομεν ἀεὶ καὶ τὸν

τὸν δ'. Ἔςι γὰρ οὗτος τὸ ἐκ τῶν δύω μέσων ὅρων παραγόμενον, διὰ τοῦ α'. ὅρου διαιρεθέν. Ἢ ἐὰν ὁ δ'. ῥηθῇ χ, ἡ δὲ $\alpha : \alpha\mu = \beta : \chi$. Ἔςαι ὁ ζητούμενος ὅρος $\chi = \frac{\alpha\mu\beta}{\alpha} = \mu\beta$. Ἡ δὲ δεῖξις εὐχερής.

Ἔςι γὰρ (§. 235.)

$$\alpha\chi = \alpha\mu\beta \quad : \alpha$$

$$\frac{\alpha\chi}{\alpha} = \frac{\alpha\mu\beta}{\alpha} \quad (\S.\ 114.\ \alpha'.)$$

$$\chi = \mu\beta.$$

Ἐπειδὴ κατὰ τὸ §. 239. ἕκαςος ὅρος εἰς δ'. γενέσθαι δύναται, ἐκ τριῶν δοθέντων ὅρων ἀείποτε ὁ ἀπὼν εὑρεθήσεται. π. χ. τεθήτω μὴ παρεῖναι τὸν γ'. ὅρον. Ὡς $\alpha : \alpha\mu = \chi : \beta\mu$. Ἀμειψαμένοις τοίνυν τοὺς ὅρους, ἔςαι, $\alpha\mu : \alpha = \beta\mu : \chi$. Καὶ $\chi = \frac{\beta\mu\,.\,\alpha}{\alpha\mu} = \beta$. Ἐν ἀριθμοῖς. $6 : 18 = \chi : 12$. ἢ $18 : 6 = 12 : \chi$. Καὶ $\chi = \frac{12\,.\,6}{18} = \frac{72}{18} = 4$. Ὥςε $6 : 18 = 4 : 12$.

Τοῦτο δὲ κρατεῖ καὶ ἐπὶ τῶν συνεχῶν ἀναλογιῶν ἐν τῷ α'. καὶ ἐσχάτῳ ὅρῳ· Τῆς δὲ εὑρέσεως τοῦ μέσου ὅρου ζητητέα ἑτέρα μέθοδος, περὶ ἧς ἐνταῦθα διαλαβεῖν ἀκριβῶς οὐχ οἷόντε, τὴν τῆς ῥίζης ἐξαγωγὴν μὴ εἰδότας. Ἐροῦμεν μέντοι καὶ περὶ ταύτης τινά. Μετὰ δὲ τὸ διδαχθῆναι τὴν τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγὴν, ἣν οὐκ ἀλόγως μετὰ τὴν περὶ τῶν ἀναλογιῶν διδασκαλίαν ὑπερεθέμεθα, ῥαδίως ἐνεργείᾳ γενήσεται, ὅπερ ἤδη μόνον διὰ σημείων ἐμφαίνομεν. π. χ. Ἔςω ζητητέος ὁ μέσος ὅρος τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας. Ἤτοι $\alpha : \chi = \chi : \alpha\mu^2$ Ἐπειδὴ τοίνυν $\alpha^2\mu^2 = \chi\chi$. ἔςαι καὶ, αμ. οὖν τῆς ῥίζης ληφθείσης $\sqrt{\alpha^2\mu^2} = \sqrt{\chi^2}$. ἄρα καὶ $\alpha\mu = \chi$. Εἰ πρόκειται ζητῆσαι τὸν μέσον ἀναλοἀνάλογον ἀριθμὸν τοῦ 4 καὶ 9 ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔςαι $4 : \chi = \chi : 9$. ὥςε $4 \cdot 9$, ἢ $36 = \chi^2$. Καὶ $\sqrt{36} = \sqrt{\chi^2}$. Καὶ ἐπεὶ ἡ ῥίζα τοῦ 36 $= 6$, ἢ δῆλον. Ἄρα $6 = \chi$. ἤτοι $4 : 6 = 6 : 9$.

Προκείσθω καὶ ἕτερα παραδείγματα τῆς τοῦ δ'. ὅρου εὑρέσεως.

Ἔςω δεδομένη ἡ ἀναλογία $5 : 15 = 9 : \chi$. ἡ ζητηθήτω ὁ δ'. ὅρος. Ἔςιν οὖν $\chi = \frac{9 \cdot 15}{5} = 27$. ἡ δὲ ἀναλογία $5 : 15 = 9 : 27$. Οὗτος ὁ τρόπος τοῦ τὸν δ'. ζητεῖν ὅρον καθόλου τυγχάνει, εἴτε ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ, εἴτε κλασματικοὶ οἱ τρεῖς εἶεν ὅροι. Ὡς καὶ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 3 : \chi$. ὁ δ'. ὅρος ἔςαι $\chi = \frac{3 \cdot 3}{8} : \frac{1}{4} = \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{1}$ (§. 148.) $= \frac{36}{8} = 4\frac{1}{2}$. ἡ δ' ἀναλογία $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 3 : 4\frac{1}{2}$.

§. 242. Ἔςω ἡ μονὰς ὁ α'. ὅρος. β ὁ δεύτερος, καὶ γ ὁ τρίτος. ὁ δὲ δ'. (§. ἀνωτ.) $\beta \times \gamma : 1$, ἤτοι $\beta \times \gamma$. Ἔνθεντοι ἔςαι $1 : \beta = \gamma : \beta \times \gamma$, ὅ ἐςιν, ἡ μονὰς, ὁ πολλαπλασιαςέος, ὁ πολλαπλασιαςὴς, καὶ τὸ παραγόμ. συνιςῶσιν ἀεὶ Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἀριθμὸν δι' ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζειν ἐςὶ πρὸς τὴν μονάδα, καὶ τοὺς δύω δοθέντας ἀριθμοὺς τὸν δ'. Γεωμετρικὸν ζητεῖν ἀνάλογον. Ἐὰν δὲ ὁ β'. καὶ γ'. ὅρος οἱ αὐτοὶ εἶεν, π. χ. β. ὁ ἔσχατος ὅρος εἴη ἂν $\beta \times \beta : 1$, ὅ ἐςι β^2. Ὥςε $1 : \beta = \beta : \beta^2$. Τουτέςιν, ἡ μονὰς, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, καὶ ὁ Τετράγωνος ποιοῦσι Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν. Καὶ ἡ τετρ. ῥίζα ἔςιν ἄρα ὁ μέσος ἀνάλογος μεταξὺ μονάδος, καὶ τετραγώνου.

§. 243. Ἔςω α ὁ α'. β ὁ β'. καὶ 1 ὁ γ'. ὅρος. ὁ δὲ δ'. $= \beta \times 1 : \alpha$, ἤτοι $\beta : \alpha$. Ὥςε $\alpha : \beta = 1 : \frac{\beta}{\alpha}$ Τουτ. τὸ πηλίκον ἐςὶν ὁ δ'.

γεινγεωμετρικὸς ἀνάλογος πρὸς τὸν διαιρέτην, διαιρετέον, καὶ τὴν μονάδα. Εἰ τοίνυν πρὸς δύω δοθέντας ποσότητας, καὶ τὴν μονάδα, ὁ δʹ. ἀνάλογος ζητεῖται, ἐγένετο ἡ διαίρεσις.

§. 244. Συμβαίνει δὲ καὶ ἀναλογίαν πρὸς ἄλλην δοθεῖσαν παραβάλλεσθαι, ἐνίοτε δὲ καὶ ἀπαιτεῖσθαι τοῦτο. Ἐξ ὧν αὖθις καινήτις ἀνακύπτει ἀναλογία. Ἔνθεντοι ἐκκείσθω καὶ τούτων τὰ κυριώτατα, καὶ ἀναγκαιότατα, ὧν ἡ δεῖξις παρὰ πόδας, ὡς τῶν παραγομένων ἴσων (§. 235.) ὄντων.

1) Ἐὰν δύω διαφόρων ἀναλογιῶν οἱ τῶν πρώτων, ἢ οἱ τῶν ἐσχάτων λόγων ὅροι, ἴσοι ἀλλήλοις ὦσιν, ἔσονται καὶ οἱ λοιποὶ τῶν ὅρων πρὸς ἀλλήλους ἀνάλογοι π. χ.

	$\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$	$3 : 6 = 4 : 8$
	$\alpha : \alpha\mu = \gamma : \gamma\mu$	$3 : 6 = 5 : 10$
ἄρα καὶ	$\beta : \beta\mu = \gamma : \gamma\mu$	καὶ $4 : 8 = 5 : 10$
Ἢ καὶ	$\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$	$3 : 6 = 4 : 8$
	$\gamma : \gamma\mu = \beta : \beta\mu$	$8 : 16 = 4 : 8$
ἄρα καὶ	$\alpha : \alpha\mu = \gamma : \gamma\mu$	$3 : 6 = 8 : 16$

Τοῦτο δ᾽ ἕπεται καὶ ἐκ τοῦ ἀξιώματος. (§. 48. δʹ.)

Τὸ τοιόνδε τοῦ συνάγειν εἶδος ὅροις τεχνικοῖς Ἁπλῶς Δι᾽ ἴσου ἀποκαλοῦσιν.

2) Ἐὰν δὲ ὁ αʹ. καὶ γʹ. ὅρος, ἢ ὁ βʹ. καὶ δʹ. ἐν δυσὶν ἀναλογίαις ἴσοι ὦσιν,

ὡς	$\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$	$3 : 6 = 4 : 8$
	$\alpha : \alpha\nu = \beta : \beta\nu$	$3 : 12 = 4 : 16$
ἔςαι καὶ	$\alpha\mu : \alpha\nu = \beta\mu : \beta\nu$	$6 : 12 = 8 : 16$

Αὖθις

Λύσις
$$\begin{array}{rl} & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \\ & \alpha\nu : \alpha\mu = \beta\nu : \beta\mu \\ \hline \text{ἄρα καὶ} & \alpha : \alpha\nu = \beta : \beta\nu. \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 : 6 = 4 : 8 \\ 9 : 6 = 12 : 8 \\ \hline 3 : 9 = 4 : 12 \end{array}$$

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἀναλογίας ὁ β'. ὅρος τῷ α'. τῷ ἐπὶ τῆς ἑτέρας, καὶ ὁ δ'. τῷ γ'. ἴσοι ὦσι. π. χ.

$$\begin{array}{rl} & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \\ & \alpha\mu : \alpha\nu = \beta\mu : \beta\nu \\ \hline \text{ἴσαι καὶ} & \alpha : \alpha\nu = \beta : \beta\nu \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 : 6 = 4 : 8 \\ 6 : 9 = 8 : 12 \\ \hline 3 : 9 = 4 : 12 \end{array}$$

Τοῦτο καλεῖται Τεταγμένως Δι' Ἴσου.

3) Ἐὰν α') οἱ δύω ἄκροι ὅροι δύω διαφόρων ἀναλογιῶν ἀλλήλοις ἴσοι ὦσιν. ἢ β') οἱ δύω μέσοι. ἢ γ') ἐὰν ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἀναλογίας ὁ β'. ὅρος τῷ α'. τῷ ἐπὶ τῆς ἑτέρας. καὶ ὁ γ'. τῆς α'. τῷ δ'. τῆς β'. ἢ ὁ β'. καὶ γ'. τῆς α'. τῷ α'. καὶ δ'. τῆς β'. ἴσοι ὦσιν. Οἷον

α')
$$\begin{array}{rl} & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \\ & \alpha : \alpha\mu\nu = \frac{\beta}{\nu} : \beta\mu. \\ \hline \text{ἴσαι καὶ} & \alpha\mu : \alpha\mu\nu = \frac{\beta}{\nu} : \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 : 6 = 8 : 16 \\ 3 : 12 = 4 : 16 \\ \hline 6 : 12 = 4 : 8 \end{array}$$

β')
$$\begin{array}{rl} & \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu \\ & \alpha\mu\nu : \alpha\mu = \beta : \frac{\beta}{\nu} \\ \hline \text{ἄρα καὶ} & \alpha : \alpha\mu\nu = \frac{\beta}{\nu} : \beta\mu \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 : 6 = 8 : 16 \\ 4 : 6 = 8 : 12 \\ \hline 3 : 4 = 12 : 16 \end{array}$$

γ') $\alpha : \alpha\mu$

γ.) $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$ $\qquad$ $3 : 6 = 8 : 16$

$\alpha\mu : \alpha\mu\nu = \frac{\beta}{\nu} : \beta$ $\qquad$ $6 : 4 = 12 : 8$

ἄρα καὶ $\alpha : \alpha\mu\nu = \frac{\beta}{\nu} : \beta\mu$ $\qquad$ $3 : 4 = 12 : 16$

ἀκούει δὲ Δι' Ἴσου Τεταραγμένως συνάγειν.

§. 245. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν οἱ ὁμόλογοι ὅροι πάντη διαφόρων δοθεισῶν ἀναλογιῶν μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι, καιναὶ προκύψουσιν ἀναλογίαι.

Ἔςω ἀναλογία $\alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu$. Τῶν ὁμολόγων
Ἔςω καὶ ἑτέρα $\gamma : \gamma\nu = \delta : \delta\nu$. πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιασθέντων, ἔςαι. $\alpha\gamma : \alpha\gamma\mu\nu = \beta\delta : \beta\delta\mu\nu$.

Οὕτω καὶ τοὺς ὅρους τριῶν, τεσσάρων, πέντε, καὶ πλειόνων ἔτι ἀναλογιῶν πολλαπλασιάζειν μετ' ἀλλήλων δυνάμεθα.

Π.χ. ἐν ἀριθμοῖς $2 : 4 = 6 : 12$

$3 : 9 = 5 : 15$

$5 : 2 = 10 : 4$

$2.3.5 : 4.9.2 = 6.5.10 : 12.15.4.$ ἢ

$30 : 72 = 300 : 720.$

Παραπλησίως, καὶ ἐὰν οἱ ὅροι τῆς δοθείσης ἀναλογίας διὰ τῶν ὅρων ἑτέρας διαιρεθῶσι, προελεύσεται ὡσαύτως ἀληθὴς Γεωμετρικὴ ἀναλογία. Φανερὸν, ὅτι κἀνταῦθα τοὺς ὁμολόγους ὅρους δι' ἀλλήλων διαιρεῖν χρή.

α:αμ

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \alpha\mu = \beta : \beta\mu & \quad & 8 : 24 = 7 : 21 \\ \gamma : \gamma\nu = \delta : \delta\nu & & 3 : 9 = 4 : 12 \\ \hline \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha\mu}{\gamma\nu} = \frac{\beta}{\delta} : \frac{\beta\mu}{\delta\nu} & & \frac{8}{3} : \frac{24}{9} = \frac{7}{4} : \frac{21}{12} \end{array}$$

§. 246. Πολλάκις ἐπὶ δύω, ἢ καὶ πλειόνων ἀναλογιῶν, ὧν οἱ ὅροι δι' ἀλλήλων πολλαπλασιαςέοι, δύω ὅροι τῶν μὴ ὁμολόγων ἴσοι ἀλλήλοις. Ἐὰν τοῦτο δυσὶ συμβαίνῃ ἀναλογίαις, καινὴ προκύψει ἀναλογία διὰ τοῦ τῶν ὅρων πολλαπλασιασμοῦ, ἐν ᾗ ὁ α'. ὅρος πρὸς τὸν β'. λόγον ἔχει, ὃν ὁ γ'. τῆς β'. πρὸς τὸν δ'. τῆς α'. οἷον, ἐὰν

$$\begin{array}{c} \alpha : \alpha\mu = \beta . \beta\mu \\ \gamma\nu : \gamma = \beta\nu : \beta \\ \hline \end{array}$$

ἔςαι καὶ $\alpha\gamma\nu : \alpha\gamma\mu = \beta\nu : \beta\mu$. Ἐὰν γὰρ ἐνεργείᾳ τοὺς ὅρους μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς ἀναλογίαν τάξωμεν, ἔςαι

$\alpha\gamma\nu : \alpha\gamma\mu = \beta\beta\nu : \beta\beta\mu$. καὶ διὰ β τῶν ὅρων τοῦ β'. λόγου διαιρεθέντων, ἔςαι

$\alpha\gamma\nu : \alpha\gamma\mu = \beta\nu : \beta\mu$ (§. 240.)

Ἐν ἀριθμοῖς.

$$\begin{array}{c} 4 : 6 = 8 : 12 \\ 16 : 4 = 32 : 8 \\ \hline 64 : 24 = 32 : 12 \end{array}$$

Τῶν δὲ ἀναλογιῶν οὕτως ἐκκειμένων.

$$\begin{array}{ccc} \alpha\mu : \alpha = \beta\mu : \beta & \text{ἢ} & \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \gamma : \gamma\nu = \beta : \beta\nu & & \rho : \sigma = \delta : \varepsilon \\ \hline \end{array}$$

ἔςαι καὶ $\alpha\gamma\mu : \alpha\gamma\nu = \beta\mu : \beta\nu$ $\qquad$ $\alpha\rho : \beta\sigma = \gamma\delta : \delta\varepsilon$

Ἐν ἀριθμοῖς

$$\begin{array}{c} 3 : 6 = 8 : 16 \\ 2 : 5 = 16 : 40 \\ \hline 2.3 : 5.6 = 8 : 40 \\ \text{ἢ} \quad 6 : 30 = 8 : 40 \end{array}$$

Εὐχερέςερον δὲ ἡ καινὴ προκύψει ἀναλογία, εἰ τὰς ποσότητας πρὸς ἀλλήλας ἐξαλείψομεν, ἃς προορῶμεν; καὶ ἐνεργείᾳ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθείσας, διὰ τῆς διαιρέσεως (ὅτι δύω ὅρους τῆς ἀναλογίας διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος διαιρεῖν ἔχομεν, τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦτο μηδεμίαν τροπὴν ὑφισαμένης) πάλιν ἐκπεσουμένας.

Π. χ. $3 : 6 = 8 : 16$
$2 : 5 = 16 : 40$

$6 : 30 = 8 : 40$. Ἄλλως γὰρ ἂν εἴη $6 : 30 = 8 \,.\, 16 : 16 \,.\, 40 = 6 : 30 = 8 : 40$. τοῦ 16 διὰ 16 διαιρεθέντος.

Ἐὰν οὕτως ἐν τῷ κοινῷ βίῳ δύω ἀναλογίαι συντεθῶσιν, ὡς ἐκ τούτων τὴν γ'. ἀνακύψαι, καλεῖται τοῦτο ἡ Μέθοδος τῶν Πέντε. Ζητεῖται γὰρ ἡ ς'. ποσότης, τῶν 5 δοθεισῶν, ὡς ἐνταῦθα ἐκ τοῦ 3, 6, 8, 2, 5 ζητοῦμεν τὸν 40. Εἰ γὰρ οὗτος ἀπῆν, εἶχεν ἂν οὐ δυσχερῶς εὑρεθῆναι. Καὶ γὰρ

$4 : 6 = 8 : 16$
$2 : 5 = 16 : \chi$

$6 : 30 = 8 : \chi$. Καὶ $\chi = \frac{30 \,.\, 8}{6} = 40$. (§. 241.)

§. 247. Ἀλλὰ καὶ πλείους ἀναλογίαι οὕτω διατάττεσθαι δύνανται, ὥς' ἀεὶ τῇ ἐγγὺς ἀναλογίᾳ κοινόν τινα τῇ προτέρᾳ ὅρον ἐνυπάρχειν, οὐχ ὁμόλογον μέντοι· ὡς ἐν ταῖς ἑξῆς ἀναλογίαις.

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$
$$\eta : \vartheta = \delta : \nu$$
$$\rho : \sigma = \nu : \varepsilon$$
$$\pi : o = \varepsilon : \tau$$
$\upsilon : \varphi = \tau : \psi$. Ἡ δ' ἐκ τούτων

καινὴ ἀναλογία $\alpha . \eta . \rho . \pi . \upsilon : \beta . \vartheta . \sigma . o . \varphi = \gamma : \psi$. Ἐὰν γὰρ ἐνεργείᾳ καὶ οἱ ὅροι τῶν ἐσχάτων λόγων τῆς ἀναλ. πολλαπλασιασθῶσιν, ἐν τῇ καινῇ ὅμως ἀναλογίᾳ οἱ δύω ἔσχατοι ὅροι διὰ τῆς διαιρέσεως (§. 240.) εἰς τοὺς $\gamma : \psi$ ἀναχθεῖεν. Οὕτω ποίησον καὶ ἐν ἀριθμοῖς.

Περὶ τῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου.

§. 248. Οὕτω κέκληται, ὅτι τριῶν δοθέντων ὅρων, ζητεῖται ὁ δ'. ἐν πράγμασι μάλιςα, ὧν πολλὴ ἐν τῷ κοινῷ βίῳ ἡ χρῆσις. Τὰ δὲ τῆς ἀναλογίας πράγματα Λόγον τινὰ πρὸς ἄλληλα ἔχειν ἐπάναγκες· Οὕτω π. χ. τὰ ὤνια, καὶ ἡ τούτων τιμὴ ἐν λόγῳ ἵςανται. Τουτ. ὅσῳ πλέον τις ὠνεῖται, τοσούτῳ πλέον καὶ καταβαλεῖ. Καὶ δὶς τοσαῦτα ὤνια, διπλῆν ἀπαιτοῦσιν ἄρα καὶ τὴν τιμήν. Παραπλησίως χρόνος, καὶ τόκος τῶν δανεισθέντων, καὶ μυρία ἄλλα, ὧν τίνα πρὸς ἄλληλα σχέσιν ἔχει, ὁ ὀρθὸς εὑρήσει λόγος, τὰ περὶ τούτων ἐπιλύσειν μέλλων προβλήματα.

§. 249. Διαιρεῖται δὲ εἰς Ὀρθὴν, καὶ Ἀντίςροφον· Καὶ ὀρθὴ μὲν, ἐὰν οἱ ὁμόλογοι ὅροι τῆς ἀναλογίας οὕτω πρὸς ἀλλήλους ἔχωσιν, ὥςε π. χ. τοῦ β'. ὅρου μείζονος, ἢ ἐλάττονος ὄντος, ἢ ὁ πρῶτος, καὶ τὸν δ'. οὕτως ἔχειν χρή. Ἐπὶ δὲ τῆς ἀντιςρόφου τοῦτο οὐκ ἔςι. Παράδειγμα τῆς μὲν α'. τὸ, Ἐάν τινος ὠνίου λίτραι 5, μνῶν πιπράσκωνται 7· πόσου ἄρα ἀπεμπωληθήσονται τοῦ αὐτοῦ ὠνίου λίτραι 13; τουτ: ἐπειδὴ αἱ 13 λ. πλείους τῶν 5, ὠνηθήσονται