Ταύτης τῆς σειρᾶς οἱ ὅροι πάντες εἰσὶ καταφατικοὶ, καὶ ἡ σειρὰ χωρεῖ ἐπ' ἄπειρον.

$$\frac{\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3}+\frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4}+\frac{\alpha\gamma^4}{\beta^5}+\frac{\alpha\gamma^5}{\beta^6}\text{ κτ.}$$

Τὸ ἑξῆς παράδειγμα δι' ἀριθμιῶν ἀναπτύξει τὸ λεγόμενον. Ἔςω ζητητέα ἡ σειρὰ τοῦ $\frac{1}{2}$. Ἔςω $\alpha=1$. $\beta=4$. καὶ $\gamma=2$. Καὶ ἔςαι $\frac{\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{1}{4-2}$; ὅ ἐςιν $\frac{1}{2}$. Ἀντὶ τῶν γραμμάτων τεθήτωσαν οἱ ἀριθμοί. ὡς

$$\frac{1}{4-2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1.2}{4^2}+\frac{1.2^2}{4^3}+\frac{1.2^3}{4^4}+\frac{1.2^4}{4^5}\ldots$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{4}{64}+\frac{8}{256}+\frac{16}{1024}\ldots.$$

Ἐὰν οὖν τὰ κλάσματα ταῦτα ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομ. ἀναχθέντα προςεθῶσι, δώσουσι κεφάλαιον σχεδὸν $\frac{1}{2}$. Ἔςι γὰρ τὸ κεφάλ. $\frac{31}{64}$, ἤτοι τοῦ $\frac{1}{2}$ διάφορα ἔτι κατὰ $\frac{1}{64}$. Καὶ τῆς σειρᾶς προαχθείσης, οὕτως ἀκριβῶς ἐξενεχθήσεται, ὥςε τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ δοθέντος κλάσματος, καὶ τοῦ ἐκ τῆς προσθέσεως τῆς σειρᾶς προκύψαντος, ἀπειροςὴν εἶναι, ἤτοι ἀπείρως μικρὰν, καὶ ἀσφαλῶς τὴν σειρὰν ἀντὶ τοῦ κλάσματος ἀντικαταςῆναι δύνασθαι.

Περὶ Λόγων.

§. 212. Ἡ δύω ἀριθμῶν ὁμοειδῶν, (ἢ ποσοτήτων ἐν γένει) πρὸς ἀλλήλους παράθεσις, τὴν τούτων ταὐταυτότητα, ἢ διαφορὰν ἀφορῶσα, Λόγος ἀκούει· αὐτοὶ δὲ οἱ παραβαλλόμενοι ἀριθμοὶ, Ὅροι τοῦ Λόγου. ὧν ὁ μὲν προτιθέμενος, Ἡγούμενος, ὁ δ᾽ ἐπιτιθέμενος, Ἑπόμενος καλοῦνται. Ὁ δὲ λόγος διττός. ἤτοι γὰρ, ὅσαις μονάσιν ὁ ἕτερος ὅρος τοῦ ἑτέρου διαφέρει, θεωροῦμεν, (ὅ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἀνακαλύπτομεν) ὅτε καὶ ὁ λόγος Ἀριθμητικός. ἢ ποσάκις ὁ ἕτερος τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριέχεται, (ὅ διὰ τῆς διαιρέσεως εὑρίσκομεν) ἔνθα ὁ λόγος Γεωμετρικὸς κέκληται·

Σχόλιον α᾽.

Ὁ α᾽. τρόπος τῶν Λόγων ὠνομάσθη ἀριθμητικὸς, ὅτι ἡ παράθεσις γίνεται δι᾽ ἀριθμήσεως τῶν μονάδων, εἰς τὰς ὁποίας κυρίως ἡ Ἀριθμητικὴ καταγίνεται· ἐν δὲ τῷ Γεωμετρικῷ ἡ παράθεσις τῶν δύω ἀριθμῶν γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθὼς παραβάλλομεν ἓν Γεωμετρικὸν ἀντικείμενον. π. χ. μίαν γραμμὴν πρὸς ἑτέραν. τουτ. ἔνθα ζητοῦμεν, ποσάκις ἡ ἐλάττων γραμμὴ, ὡς μέτρον λαμβανομένη, ἐφαρμόζει τῇ μείζονι, ὡς μετρητῷ.

Σχόλιον β᾽.

Τὸ, Γεωμετρικὸς, παραλιμπάνεται πολλάκις· Ὅθεν ἔνθα τὸ, λόγος, μόνον ἀπαντᾷ, νοητέον τὸν Γεωμετρικόν.

Περὶ Ἀριθμητικοῦ Λόγου.

§. 213. Ὁ ἐν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ (§. ἀνωτ.) τὴν μεταξὺ τῶν δύω ἀριθμῶν διαφορὰν παριςῶν ἀριθμὸς, Διαφορὰ εἴρηται. Ἐὰν οὖν οἱ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις ἴσοι ὦσιν, ἡ τούτων διαφορὰ ἐςὶ τὸ μηδενικόν. ὡς 6 =

 2. 3.

2. 3. Ἐὰν δὲ ἄνισοι, ὡς 9 καὶ 16, τούτους ἀριθμητικῶς παραβάλλουσιν, ἔσονται διάφοροι ἀλλήλων ἑπτὰ μονάσιν. Ἡ δὲ διαφορὰ εὑρίσκεται, τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθέντος, ὡς ἐνταῦθα τοῦ 9 ἀπὸ τοῦ 16. Σημεῖον δὲ τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου, τὸ τῆς ἀφαιρέσεως. (—) (§. 28.) Οἷον $+ 16 - 9$ ἢ $+ 5 - 3$. ἢ $7 - 5$. σημαίνει τὸν ἀριθμητικὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν· ἢ ἐν γένει, $\alpha - \beta$. Ἐπὶ τούτου τοῦ λόγου θεωρητέον γ΄. τινά. α΄.) τὸν μείζω ἀριθμόν. β΄.) τὸν ἐλάσσω. καὶ γ΄.) τὴν τούτων διαφοράν· ταῦτα δὲ οὕτως ἀλλήλοις συνῆπται, ὥςε τῶν δύω δοθέντων, τὸ τρίτον ῥᾳδίως εὑρήσομεν. Κληθήτω ὁ μείζων α. ὁ ἐλάσσων β. καὶ ἡ διαφορὰ δ. Καὶ ἔςαι ὁ μείζων $\alpha = \beta + \delta$. ὁ ἐλάττων $\beta = \alpha - \delta$· καὶ ἡ διαφορὰ $\delta = \alpha - \beta$. Τεθήτω $\alpha = 10$. $\beta = 6$. $\delta = 4$. καὶ ἔςαι $\alpha = \beta + \delta$. ἤτοι $10 = 6 + 4$. $\beta = \alpha - \delta$. $6 = 10 - 4$. καὶ $\delta = \alpha - \beta$. ἢ $4 = 10 - 6$. Ὅτι αἱ δὲ παραβαλλόμεναι ποσότητες ὁμοειδεῖς (§. ἀνωτ.) εἶναι ὀφείλουσι, δῆλον. 5 γὰρ ὧραι π. χ. οὐκ ἂν παραβληθεῖεν πρὸς 7 δραχμάς.

Σχόλιον.

Σημείωσαι, ὅτι ἐν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ $\alpha - \beta$, ἐὰν καὶ εἰς τοὺς δύω ὅρους ἤτοι προςεθῇ ἀριθμός τις, οἷον ὁ γ, ἤτοι ἀφαιρεθῇ, ἡ διαφορὰ μένει ἡ αὐτή· Ὥςε ἐὰν δ ἦναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ α καὶ β, ἔςαι ὡσαύτως δ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν $\alpha + \gamma$, καὶ $\beta + \gamma$, καὶ τῶν $\alpha - \gamma$, καὶ $\beta - \gamma$. Καὶ ἂν οἱ δύω ἀριθμοὶ α, καὶ β διπλασιασθῶσι, θέλει διπλασιασθῆ καὶ ἡ διαφορά. ἤτοι ἐὰν $\alpha - \beta = \delta$, ἔςαι καὶ $2\alpha - 2\beta = 2\delta$.

Περὶ

Περὶ Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας.

§. 214. Δύω ἀριθμητικοὶ λόγοι, ἀλλήλοις ἴσοι, συςήσουσι σειρὰν ἀριθμῶν, ἐκ δ΄. ὅρων συγκειμένην, ἥτις Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία καλεῖται. Ἴσοι δὲ οἱ λόγοι ἔσονται, ἑκατέροις τῆς αὐτῆς διαφορᾶς ἐνούσης. ὡς 4 — 7. καὶ 8 — 11. ἔνθα ἐπ' ἀμφοῖν ἡ διαφορὰ, ἡ δ = 3. Ὥςε οἱ δύω λόγοι, ὡς χρὴ, τεταγμένοι, ἀναλογία λέγονται, ἧς σημεῖον τὸ τῆς ἰσότητος, (=) (§. 17.) μεταξὺ ἐκείνων ἐμπῖπτον. Οἷον, 5 – 7 = 6 — 8· Καὶ 4 — 12 = 10 — 18 εἰσὶν ἀναλογίαι δύω, ὧν τῆς α΄. ἡ διαφορὰ = 2. Τῆς δὲ β΄. = 8. Τοὺς δὲ ὅρους τῆς ἀναλογίας οὕτω διατακτέον, ὥςε τοῦ μείζονος ὅρου ἐν τῷ α΄. λόγῳ ἡγουμένου, τὸν μείζονα καὶ ἐπὶ τοῦ β΄. λόγου ἡγεῖσθαι, καὶ ἀνάπαλιν.

§. 215. Ἐπειδὴ ἐπὶ παντὸς ἀριθμητικοῦ λόγου ὁ μείζων ὅρος ἐκ τοῦ ἐλάσσονος, πλέον τῆς διαφορᾶς, σύγκειται. (§. 213.) εἰς α΄. δὲ ὅρον τοῦ λόγου, ἑκάτερος γενέσθαι δύναται, ὡς τοῦ λόγου σῴου διὰ τοῦτο τηρουμένου. ἐὰν ὁ ἐλάσσων κληθῇ α, καὶ α΄. ὅρος γένηται, ἡ δὲ διαφορὰ δ. ὁ λόγος ἐξενεχθείη ἂν οὕτως α — α + δ· ἢ α — (α + δ). Ἐὰν δὲ καὶ ὁ α΄. τοῦ β΄. λόγου, β, ῥηθῇ· ἀνάγκη πᾶσα καὶ τὸν β΄. ὅρον τούτου ἐκ τοῦ α΄· συνίςασθαι, καὶ τῆς διαφορᾶς· ὡς, β — (β + δ). Ὥςε τῶν δύω λόγων, ὡς χρὴ, διαταχθέντων, ἔςαι α — (α + δ) = β — (β + δ γενικὴ ἀναλογία, οἱανοῦν ἀριθμητικὴν παριςῶσα ἀναλογίαν. Οὐδὲν δὲ τὸ κωλύον τὸ τὸν ἑπόμενον ὅρον ἐλάττονα εἶναι τοῦ ἡγουμένου ἐν τῷ α΄. λόγῳ. (ὅτε καὶ ἐν τῷ β΄. λόγῳ ὁ ἑπόμ. ἐλάττων ἔςαι τοῦ ἡγουμένου. (§. ἀνωτ.).) Τότε γὰρ ἡ διαφορὰ, δ, ἔςαι ποσότης ἀποφατική· ὅπερ τὴν γενικὴν οὐ περιτρέπει ἀναλογίαν. π. χ. 12 — 8 = 15 — 11. ἀριθμηριθμητικὴ ἀναλογία, ἧς ὁ β'. καὶ ὁ δ'. ὅρος ἐλάσσων τοῦ α'. καὶ γ'. Ἡ διαφορὰ, ἡ, δ, μεταξὺ ἑκατέρας τῶν ὅρων δυάδος = — 4. Ὥςε + δ γίνεται = — 4. Ἄρα τὸ σχῆμα ἔςαι 12 —(12 — 4) = 15 — (15 — 4.). Ἐπεὶ δὲ ἡ διαφορὰ = 4, ἔξεςι τοὺς ὅρους ἀντιςρέφειν, καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη ἡ αὐτὴ μενεῖ, 4. Ἡ ἀναλογία οὖν ἔςαι 8 — 12 = 11 — 15, κατὰ πάντα σύμφωνος τῷ γενικῷ σχήματι α —(α + δ) = β — (β + δ).

§. 216. Διττὴ δὲ ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία, ἤτοι Συνεχὴς, ἢ Διακεκριμένη· Καὶ τοῦτο μὲν, εἰ ὁ γ'. ὅρος διάφορος τοῦ β'. οἷα τὰ προτεθέντα παραδείγματα. Ἐκεῖνο δὲ, τοῦ γ'. ὅρου τοῦ αὐτοῦ τῷ β'. ὄντος. Ὡς, 9 — 13 = 13 — 17. Τὸ δὲ γενικὸν σχῆμα (§. ἀνωτ.) καὶ τῇ συνεχεῖ ἐφαρμόσαι ἀναλογίᾳ, εἰ μόνον β = α + δ, ἤτοι ὁ γ'. ὅρος ἴσος τῷ β'. τεθῇ· Εἰ οὖν, ἐπὶ τοῦ γενικοῦ σχήματος, τὸ α + δ ἀντικαταςῇ τοῦ β, τραπήσεται εἰς τόδε· α — (α + δ) = (α + δ) — (α + δ + δ). ἢ α — (α + δ) = (α + δ) — (α + 2δ). Ὅπερ ὁ τύπος τῶν συνεχῶν ἀναλογιῶν. Παράδ. δι' ἀριθμῶν. 9 — 16 = 16 — 23. Ἡ κατὰ τὸν τύπον, (ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ = 7) 9 — (9 + 7) = (9 + 7) — (9 + 2. 7.)

Σχόλιον α'.

Ἂν ὁ α'. ὅρος παράγηται ἐκ τοῦ β'. ὡς ὁ δ'. ἐκ τοῦ γ'. ὀνομάζεται Ἀντίςροφος ἡ ἀναλογία· ἢ λόγος Ἀντίςροφος. ἢ Ἀντιπεπονθώς· οἷον 9, 5, 7, 11. ἔνθα 9 ἀνακύπτει ἐκ τοῦ 5, οὐχὶ ὡς 7 ἐκ τοῦ 11, ἀλλ' ὡς 11 ἐκ τοῦ 7. τουτ. διὰ προσθέσεως τῆς διαφορᾶς 4. Ὥςε οἱ ἀριθμοὶ 9, 5, 7, 11 εἶναι ἐν ἀντιςρόφῳ λόγῳ, ἢ ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ, ἢ ἐν ἀντιςρόφῳ ἀναλογίᾳ.

Σχόλ.

Σχόλιον β'·

Εἰς διαφορὰν, ἡ ἀναλογία ἡ μὴ ἀντίςροφος λέγεται Ὀρθὴ, καὶ ὁ λόγος Ὀρθὸς, ἢ Ἐνθὺς, ἢ Εὔθετος εἰς ἣν ὀρθὴν ἀναλ. δύναται νὰ μεταβῇ κάθε ἀντίςροφος, ἐὰν μεταξῇ τοῦ ἑτέρου λόγου ὁ ἕτερος ὅρος.

§. 217. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι, ἐπὶ πασῶν τῶν ἀριθμητικῶν ἀναλογιῶν, (συνεχῶντε, καὶ διακεκριμένων (§. ἀνωτ.)) τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων ὅρων ἴσον ἐςὶ τῷ κεφαλαίῳ τῶν δύω ἄκρων. π. χ. $4 - 9 = 16 - 21$. Ἔνθα $4 + 21 = 9 + 16$, ἄμφω $= 25$. Καὶ ἐν συνεχεῖ. $7 - 13 = 13 - 19$. κἀνταῦθα $7 + 19 = 13 + 13 = 26$. Τοῦτο δ' ἕπεται ἐκ τῶν γενικῶν τύπων. (§. ἀνωτ.) Τῆς γὰρ διακεκριμένης ἀναλογίας ὁ γενικὸς τύπος ἦν $\alpha - (\alpha + \delta) = \beta - (\beta + \delta)$. Ἔνθα οἱ δύω ἄκροι ὅροι $\alpha + \beta + \delta = \alpha + \delta + \beta$ τοῖς δύω μέσοις. Τῆς δὲ συνεχοῦς ὁ $\alpha - (\alpha + \delta) = (\alpha + \delta) - (\alpha + 2\delta)$. Οὗ οἱ ἄκροι $\alpha + \alpha + 2\delta = \alpha + \delta + \alpha + \delta = \alpha\alpha + 2\delta = (\alpha + \delta) 2$, τοῖς μέσοις. Τοῦτο δὲ καὶ βάσανον ἕξομεν τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Τοῦ γὰρ κεφαλαίου τῶν δύω μέσων ἴσου τῷ κεφαλαίῳ τῶν δύω ἄκρων ὄντος, ἡ ἀναλογία ἔςαι Ἀριθμητική. ἄλλως δ' οὐχί.

§. 218. Ἐφ' οἱασοῦν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας, ἔξεςι τοὺς ὅρους καὶ εἰς ἀλλήλους μεταμείβεσθαι, ὥςε τὸν α'. εἰς β'. καὶ τοῦτον αὖθις εἰς α'. γίνεσθαι· ὅπερ ἅμα καὶ τοῖς τοῦ β'. λόγου ὅροις συμβαίνειν ἀνάγκη, τῆς ἀναλογίας διὰ τοῦτο μὴ οἰχομένης. Καὶ πᾶσαν τὴν ἀναλογίαν ἀντιςρέφεσθαι. Οἷον ἥδε ἡ ἀναλογία $5 - 7 = 9 - 11$ μεταμειφθείη ἂν εἰς τήνδε. $7 - 5 = 11 - 9$. καὶ εἰς τήνδε. $9 - 11 = 5 - 7$. Ἐφ' ἑκατέρων τὰ κεφάλαιον τῶν μέσων, ἢ τῶν ἄκρων

ἄκρων ὅρων $= 16$. Ὥςε ἄμφω ἀριθμητικαὶ ἀναλογίαι.

§. 219. Ἀλλὰ καὶ ἐναλλὰξ τῶν ὅρων λαμβανομένων, (τουτ: α΄. καὶ γ΄. β΄. καὶ δ΄.) τὰ τῆς ἀναλογίας αὖθις σώζεται· $5 - 9 = 7 - 11$· τοῦτο δὲ καὶ τῇ συνεχεῖ ἁρμόζει ἀναλογίᾳ· ὅπερ ἐκ τῶν καθόλου τύπων, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κατατεχθέντων, σαφῶς πρόδηλον.

§. 220. Τριῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας δοθέντων, ῥᾷςα ὁ δ΄. εὑρεθήσεται· Ἔςι γὰρ οὗτος ἡ διαφορὰ τοῦ α΄. ὅρου ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τοῦ β΄. καὶ γ΄. ἀφαιρεθέντος. Ἢ ἐὰν ὁ πρῶτος, α, κληθῇ, ὁ δεύτερος β. καὶ ὁ τρίτος γ, ἔςαι ὁ δ΄. ὁ ζητούμενος, ὃς χ ῥηθήτω, $\chi = \beta + \gamma - \alpha$. Δείκνυται δὲ οὕτως. Ἡ ἀναλογία ἐςὶν $\alpha - \beta = \gamma - \chi$. Ἐπεὶ δὲ

$$\alpha + \chi = \beta + \gamma \quad (\text{§. 217.})$$
$$\alpha = \alpha \quad \text{ἀφαιρ. ἔςαι}$$
$$\overline{\chi = \beta + \gamma - \alpha\cdot}$$

Παράδειγμα. $5 - 12 = 16 - \chi$. ἔνθα $\chi = 16 + 12 - 5 = 28 - 5 = 23$. Ὅθεν ἡ ἀναλογία $5 - 12 = 16 - 23$. Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὸ (§. 218.) πᾶς ὅρος τῆς ἀναλογίας ἔσχατος ἂν γένοιτο, ἀληθεύει ἄρα ἐν γένει, ὅτι τριῶν ὅρων δοθέντων, εὑρήσομεν τὸν δ΄. διὰ τούτων. Ἀπέςω π. χ. ὁ α΄· ὥςε $23 - 16 = 12 - \chi$. ἔνθα $\chi = 12 + 16 - 23 = 28 - 23 = 5$. ἢ ὁ β΄. ὥςε $16 - 23 = 5 - \chi$. καὶ $\chi = 5 + 23 - 16 = 12$. ἢ ὁ γ΄. $12 - 5 = 23 - \chi$. ἔνθα $\chi = 23 + 5 - 12 = 16$. αἰτία δὲ, τὸ πάντα ὅρον ζητούμενον εἰς ἔσχατον γίνεσθαι· Καὶ ἐν γένει. Ὁ γενικὸς τύπος ἐςὶν $\alpha - \alpha + \delta = \beta - (\beta + \delta.)$ Ἀπέςω ὁ α΄· ὅρος α, καὶ ἡ ἀναλογία μενεῖ, ἐὰν τὸ α ἔσχατος ὅρος γένηται· τηνικαῦτα γὰρ

γὰρ ἔςαι $(\beta + \delta) - \beta = (\alpha + \delta) - \chi$. καὶ $\chi = (\beta + \alpha + \delta) - (\beta + \delta)$, ὃ ἀφαιρεθὲν ὑπολείψει α΄. Ἀπέςω ὁ β΄ καὶ ἔςαι $\beta - (\beta + \delta) = \alpha - \chi$. Καὶ $\chi = (\alpha + \beta + \delta) - \beta = \alpha + \delta$. Ὁ γ΄ καὶ ἔςαι $(\alpha + \delta) - \alpha = (\beta + \delta) - \chi$. καὶ $\chi = (\beta + \delta + \alpha) - (\alpha + \delta) = \beta$. Τὰ αὐτὰ ποιήσομεν κἀπὶ τῶν συνεχῶν ἀναλογιῶν.

§. 221. Τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας τρεῖς ὅρους κυρίως ἐχούσης, ἐὰν οἱ δύω ἄκροι δεδομένοι ὦσιν, αὐτίκα τὸν μέσον εὑρήσομεν, τῇ διαιρέσει τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω ἄκρων διὰ 2. Ἡ δὲ τοιαύτη ἀναλογία ἐςὶ $\alpha - \chi = \chi - \delta$.

καὶ $\alpha + \delta = \chi + \chi = 2\chi$. διαιρ. διὰ 2.

$$\frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{2\chi}{2} = \chi.$$

Παράδειγμα $3 - \chi = \chi - 19$. Ἔνθα $\chi = \frac{19 + 3}{2} = \frac{22}{2} = 11$. Ἡ δ΄ ἀναλογία $3 - 11 = 11 - 19$.

Περὶ Ἀριθμητικῆς Προόδου.

§. 222. Ἐὰν συνεχεῖς ἀριθμητικαὶ ἀναλογίαι (§. 216.) οὕτω συγκροτῶνται, ὥςε τὸν α΄. ὅρον λόγον ἔχειν πρὸς τὸν β΄, ὃν ὁ β΄. πρὸς τὸν γ΄. ὃν ὁ γ΄. πρὸς τὸν δ΄. κτ. Ἢ ἐὰν ἐφ᾽ οἱασοῦν συνεχοῦς ἀναλογίας ὁ γ΄. ὅρος αὖθις εἰς α΄. γένηται, καὶ ὁ δ΄. εἰς β΄. καὶ γ΄. ἑτέρας καινῆς συνεχοῦς ἀναλογίας, κἀκ τούτων αὖθις ὁ δ΄. ὅρος ζητῆται, καὶ διηνεκῶς οὕτω χωρῶμεν, ἀνακύψει σειρὰ ἀριθμῶν Ἀριθμητικὴ Πρόοδος καλουμένη· ὡς $2 - 4 = 4 - 6$. Αὖθις $4 - 6 = 6 - 8$. Καὶ $6 - 8 = 8 - 10$. Καὶ $8 - 10 = 10 - 12$. Ἔνθα οἱ α΄.

δύω

δύω ὅροι, (2, καὶ 4,) καὶ πάντες οἱ μετὰ τούτους εὑρεθέντες, Ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς Προόδου ἀκούουσιν. Ἡ δὲ προκειμένη πρόοδος σύγκειται ἐκ τῶν ἀριθμῶν, 2, 4, 6, 8, 10, 12. Ἐὰν δὲ καὶ καθόλου θεωρηθῇ, ἐκκείσονται οὕτως αἱ ἀναλογίαι ἀλλήλαις ἑπόμεναι. $\alpha \div (\alpha + \delta) = (\alpha + \delta) - (\alpha + 2\delta)$. Αὖθις $(\alpha + \delta) \div (\alpha + 2\delta) = (\alpha + 2\alpha\delta) - (\alpha + 3\delta)$. Καὶ $(\alpha + 2\delta) - (\alpha + 3\delta) = (\alpha + 3\delta) - (\alpha + 4\delta)$ κτ. Οἱ ὅροι οὖν τῆς προόδου, ὧν δ τὴν διαφορὰν ἐμφαίνει, εἰσὶν ὧδε.

$\alpha, \ \alpha + \delta, \ \alpha + 2\delta, \ \alpha + 3\delta, \ \alpha + 4\delta$ κτ. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι σειράτις ποσοτήτων, ἢ ἀριθμῶν, κατάτινα κοινὸν νόμον ἐπίσης αὐξουσῶν, ἢ μειουμένων, ἐξ ὅσων ἂν συγκροτῆται ὅρων, ἀριθμητικὴ ἀκούει Πρόοδος. αἱ δὲ ποσότητες, ἢ οἱ ἀριθμοί, ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου. Ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθεύει λεγόμενον, καὶ εἰ ἐπίσης μειοῦνται, ῥάδιον κἂν ἐκ τούτου συνιδεῖν, ὅτι τὴν τῶν ποσοτήτων σειρὰν καὶ εἰς τοὐπίσω (τουτ: δεξιόθεν πρὸς ἀριστερὰ) θεωρεῖν ἔχομεν. ἢ ὅτι δ καὶ ἀποφατικὴ ποσότης εἶναι δύναται, ἑκάστου ὅρου κατὰ δ ἐλαττουμένου. Ἡ οὖν Πρόοδος ἤτοι Αὔξουσά ἐστιν, ἢ Μειουμένη, ἥπου ἂν οἱ κατ᾽ αὐτὴν ὅροι ἔχοιεν· κἀκεῖνο μὲν ἔσται, ἐὰν οἱ ὅροι διηνεκῶς αὔξωσι. τοῦτο δέ, τῶν ὅρων ἀεὶ ἐλαττουμένων. Οὕτως ἂν εἴη 2, 4, 6, 8, 10 κτ. αὔξουσα πρόοδος. Καὶ 12, 9, 6, 3, 1, μειουμένη. ἧς (μειουμένης) ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων $= 3$.

§. 223. Ὁ ἀριθμός, καθ᾽ ὃν οἱ ὅροι τῆς ἀριθμ: προόδου αὔξονται, ἢ μειοῦνται, καλεῖται ὡσαύτως Διαφορά. (§. 213.) Ἐὰν οὖν ὁ α΄. ὅρος, καὶ ἡ διαφορὰ δοθῶσιν, ἐφ᾽ ὅσον βουλώμεθα, τὴν ἀριθμητικὴν προάξομεν πρόοδον· ἕκαστος γὰρ ὅρος εὑρεθήσεθήσεται, τῆς διαφορᾶς τῷ προηγουμένῳ ὅρῳ προσεθείσης. ὡς 2, 5, 8, 11, 14 κτ.

§. 224. Γράφομεν δὲ καὶ ἐπὶ τοὺς ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου τοὺς φυσικῇ τάξει ἀλλήλους διαδεχομένους χαρακτῆρας, ἵν' ἡ τάξις ἑκάςου τούτων ῥαδίως ἐπιγινώσκηται, οὓς (χαρακτ:) τὸν Δείκτην ἀποκαλοῦσιν. Ἀλλ' ἵνατὶ τὸ ἐκ τούτου ἑπόμενον ἴδωμεν, προκείσθω ἔτι ἅπαξ ἡ σειρά·

$\overset{1}{\alpha}$, ${}_{6}\,\alpha \overset{2}{+} \delta$, $\alpha \overset{3}{+} 2\delta$, $\alpha \overset{4}{+} 3\delta$. $\alpha \overset{5}{+} 4\delta$, $\alpha + 5\delta$, κτ. ἔνθα οἱ ἀριθμοί, 1, 2, 3, κτ. οἱ δεῖκται εἰσίν· Ἐν ταύτῃ ἔπεσι καθορᾶν, ἐφ' ἑκάςου ὅρου τὸ δ, ἢ τὴν διαφοράν, μονάδι ἐλάσσονα εἶναι τῆς κατὰ τὸν ὅρον πληθύος, ἢ τοῦ Δείκτου· οὕτω π. χ. τῷ ε'. ὅρῳ 4δ. ἔνεισι, τῷ ς'. 5δ, κτ. Ἐξ ὧν συνάγεται, ὅτι, ἐὰν ὁ α'. ὅρος $= \alpha$, καὶ ἡ διαφορὰ $= \delta$, δοθῶσιν, ἕκαςος ζητούμενος ὅρος ῥαδίως εὑρεθήσεται. ἔςι γὰρ $\alpha +$ τοῦ μονάδι ἐλάττονος δ τῆς κατὰ τὸν ζητούμενον ὅρον πληθύος, ἢ τοῦ δείκτου· οὕτως ἂν εἴη ὁ κ'. ὅρος $\alpha + 19\delta$. ὁ δὲ μ'. $\alpha + 39\delta$. διὰ τῆς τούτων θεωρίας, καὶ καθόλου τύπον εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἑκάςης ἀριθμητικῆς εὑρεῖν δυνάμεθα προόδου. ἐὰν γὰρ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων ἐν γενει $= \pi$ τεθῇ, ἀνάγκη πᾶσα ἐν τῷ ἐσχάτῳ ὅρῳ τὸ δ μονάδι ἔλαττον εἶναι τῆς κατὰ τὸν ὅρον πληθὺς, ἤτοι ἔςαι $(\pi - 1)\,\delta$. Ὁ οὖν ἔσχατος ὅρος ἐπὶ πάντων ἔςαι $\alpha + (\pi - 1)\,\delta$.

Παράδειγμα. Ἔςω ὁ α'. ὅρος, ἢ τὸ $\alpha = 1$. καὶ δ ὡσαύτως $= 1$. ἤτοι ἔςωσαν οἱ ὅροι μονάδι ἀλλήλων διαφέροντες· Ἡ τῶν ὅρων πληθὺς, ἤτοι τὸ π, ἔςω 12. ἔςαι οὖν ὁ π : ος ὅρος, ἤτοι ἐνταῦθα ὁ ἔσχατος δωδέκατος ὅρος, ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀντικαταςῶσιν, $= 1 + (11.)\,1$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μονὰς οὐ πολλαπλασιάζει $= 1 + 11 = 12$. Καὶ αὕτη ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶχεν ἂν οἱ φυσι-

Φυσικοὶ χαρακτῆρες. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. οἵτινες ἐν ἀριθμητικῇ τῷ ὄντι προόδῳ, ὧν ἡ διαφορὰ = 1, ἴσανται.

Ἕτερον παράδειγμα· Ἔςω α = 3. δ = 2. καὶ π, ἤτοι ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων = 11. Ἡ δὲ σειρὰ ἔςαι 3 + 5 + 7. κτ. Ὁ δ' ἑνδέκατος ἐνταῦθα ζητούμενος ὅρος = α + (π − 1)δ = 3 + (11 − 1)2 = 3 + 10. 2 = 3 + 20 = 23.

Ἔςω αὖθις α = 1. δ = 6. π = 36. Ἡ οὖν σειρὰ εἴη ἂν 1, 6, 12, κτ. καὶ ὁ ἔσχατος, ἤτοι ἐνταῦθα ὁ λς'. ὅρος = 1 + (36 − 1) 6 = 1 + 35. 6 = 211.

Ἔνθεντοι ἐκ τοῦ α'. ὅρου, καὶ τῆς διαφορᾶς, εὑρεῖν δυνάμεθα τὸν ζητούμενον ὅρον. Ἀεὶ γὰρ ὁ τύπος τούτῳ ἐφαρμόζει, ὡς τὸν ζητούμενον ὅρον ἀντὶ τοῦ π. ἤτοι τοῦ ἐσχάτου θεωρεῖν ἐχόντων.

§. 225. Ἐφ' οἱασοῦν ἀριθμητικῆς προόδου δ'. τινὰ θεωρητέα.

1) Ὁ πρῶτος ὅρος. ὃς α κληθήτω.

2) Ὁ ἔσχατος. ὅς τις = ω τεθήτω.

3) Ἡ διαφορὰ = δ.

4) Ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων = π. Τριῶν οὖν ἐκ τούτων δοθέντων, ῥᾷςα τὸ τέταρτον εὑρήσομεν.

1) Ἔςωσαν δεδομένα α, ω, καὶ δ. ἤτοι ὁ α'. ὅρος, καὶ ὁ ἔσχατος μετὰ τῆς διαφορᾶς, καὶ ζητηθήτω π, ἤτοι ἡ τῶν ὅρων πλῆθύς. ὁ ἔσχατος ὅρος ἦν (§. ἀνωτ..) = α + (π − 1)δ. ὥςε ω = α + (π − 1) δ· ἢ ἐνεργείᾳ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γεγονότος.

$\omega = \alpha + \pi\delta - \delta.$ Ἐνταῦθα ζητεῖται τὸ π.
$\alpha = \alpha.$ ἄφελε ἀπ' ἀμφοῖν τὸ α.

$$\omega - \alpha = \pi\delta - \delta.$$

$: \delta.$ δίελε ἄμφω διὰ δ.

$$\frac{\omega - \alpha}{\delta} = \pi - 1$$

$+ 1 = + 1$ πρόσθες ἀμφοῖν $+ 1.$

$$\frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1 = \pi.$$

Ὥςε π, ἤτοι ἡ πλῆθυς τῶν ὅρων, ἐςὶν ὁ ἔσχατος ὅρος, πλὴν τοῦ πρώτου, διαιρεθεὶς διὰ τῆς διαφορᾶς, καὶ μονάδος τῷ πηλίκῳ προςεθείσης.

Παράδειγμα. Ἔςω ὁ α'. ὅρος τῆς προόδου $= 4.$ ὁ ἔσχατος 34, καὶ ἡ διαφορὰ 3. Ὥςε ζήτησον τὴν πλῆθυν τῶν ὅρων οὕτως. $\alpha = 4.$ $\omega = 34.$ $\delta = 3.$ Καὶ ἔςαι $\pi = \frac{34 - 4}{3} + 1 = \frac{30}{3} + 1 = 10 + 1 = 11.$ Ἡ δὲ σειρὰ χωρήσειεν οὕτω.

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34.

Ἕτερον παράδειγμα. $\alpha = 216.$ $\omega = 6.$ $\delta = 5.$ Ὁ οὖν ἔσχατος ὅρος, ἢ $\pi = \frac{6 - 216}{5} + 1 = -\frac{210}{5} + 1 = -43.$ Ὅτι δὲ ἂ διαιρετέος ἐνταῦθα ἀποφατικὸς, διὸ καὶ τὸ πηλίκον ἀποφατικὸν προέκυψε, (§. 77.) μηδένα εἰς ἀπάτην παρατρεπέτω· Ἔςι γὰρ ἡ σειρὰ μειουμένη (§. 222.) ὡς τοῦ α'. ὅρου μείζονος ληφθέντος τοῦ ἐσχάτου· Ἔξεςι δὲ, τοῦ α'. καὶ ἐσχάτου ὅρου δοθέντων, τὴν σειρὰν καὶ ἀνάπαλιν θεωρεῖσθαι, καὶ τὸν α'. ὅρον, εἰς τὸν ἔσχατον, ὃ τὴν τοῦ ὅρων πλῆθυν ἥκιςα μεταβάλλει· καὶ τηνικαῦτα ἔςαι $\pi = \frac{216 - 6}{5} + 1 = 43.$

Σχόλ.

Σχόλιον.

Ἂς μὴ ξενίσῃ τινὰ τὸ ἐν τῷ β'. παραδ. $-\frac{210}{5}+1=43$. διότι ἀγκαλὰ καὶ κατὰ τὸ φαινόμενον ὤφειλεν εἶναι -41. Ὅτι $-\frac{210}{5}=-42$ $+1=-41$. Ἀλλὰ τὸ ἄτοπον οἴχεται, ἐὰν ληφθῇ 5, ὅ ἐςιν ἡ διαφορὰ ἀποφατική. Ἐπὶ γὰρ τῆς μειουμένης σειρᾶς ἀεὶ ἡ διαφορὰ τοιαύτη. Ὅθεν $\frac{-210}{-5}=+42$. (§. 77.) $+1=43$. ἢ -43. ὡς τῆς προόδου μειουμένης οὔσης·

2) Δοθέντων τοῦ α, ω, καὶ π, ἤτοι τοῦ α', καὶ ἐσχάτου ὅρου, καὶ τῆς τῶν ὅρων πληθύος, ζητηθήτω δ, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων, ἥτις ὡσαύτως διὰ τοῦ προτέρου τύπου εὑρίσκεται.

$\underline{\omega=\alpha+\pi\delta-\delta}$. ἀφαιρεθήτω ἑκατέρωθεν α.

$\omega-\alpha=\pi\delta-\delta$. ἢ

$\omega-\alpha=(\pi-1)\delta$. διαιρεθ. ἄμφω διὰ π — 1.

$\frac{\omega-\alpha}{\pi-1}=\frac{(\pi-1)\delta}{\pi-1}$. ἢ $=\delta$. Ὅτι τὸ π — 1 τοῦ διαιρετέου ἀναιρεῖται ὑπὸ τοῦ π — 1, τοῦ διαιρέτου· ὥςε ὁ ἔσχατος ὅρος, πλὴν τοῦ α'. διαιρεθεὶς διὰ τῆς μονάδι μειωθείσης πληθύος τῶν ὅρων, παρέξει σοι τὴν διαφοράν.

Παράδειγμα. Ἔςω ὁ α'. ὅρος 5. ὁ ἔσχατος 97. καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων 19. Ὥςε $\alpha=5$. $\omega=97$. καὶ $\pi=19$. Ἔςαι οὖν $\delta=\frac{97-5}{19-1}=\frac{92}{18}=5\frac{1}{9}$.

Ἡ δὲ πρόοδος ἂν εἴη 5. $10\frac{1}{9}$, $15\frac{2}{9}$, $20\frac{3}{9}$, $25\frac{4}{9}$, $30\frac{5}{9}$, $35\frac{6}{9}$, κτ. μέχρι τῶν 97. ἣν ἕκαςος συγκρατήσει, εἰ μόνον ἀεὶ ἑκάςῳ ὅρῳ προηγηθέντι τὴν διαφορὰν, ἢ $5\frac{1}{9}$, προςίθησι.

3) Εἰ δέδονται α,′ δ, π, ἤτοι ὁ α′. ὅρος, ἡ διαφορὰ, καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων, ζητηθήτω ὁ ἔσχατος. Κατὰ τὸ (ἀρ. 1.) ὁ ἔσχατος, ἤτοι $\omega = \alpha + (\pi - 1)\,\delta$.

Παράδειγμα. Ἔςω $\alpha = 2$. $\delta = 3$. $\pi = 12$. Ἐςὶν ἄρα $\omega = 2 + (12 - 1)\,3 = 2 + 11.3 = 2 + 33 = 35$. Ἡ δὲ πρόοδος ; ωροίη ἂν οὕτω. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35.

4) Ἐὰν ὦσι γνωςὰ ω, δ, π. ἤτοι ὁ ἔσχατος ὅρος, ἡ διαφορὰ, καὶ ἡ πληθὺς τῶν ὅρων, εὑρήσομεν α, ἤτοι τὸν α′. ὅρον, κατὰ τὸν ἐγνωσμένον τρόπον.

$\omega = \alpha + (\pi - 1)\,\delta$ ἀφαιρ. ἴσον ἀπ' αμφοῖν τὸ

$$\frac{\begin{array}{l}\omega = \alpha + (\pi - 1)\,\delta \\ (\pi - 1)\,\delta = (\pi - 1)\,\delta\end{array}}{\omega - (\pi - 1)\,\delta = \alpha}$$

ἤτοι ὁ ἔσχατος ὅρος, πλὴν τῆς μονάδι μειωθείσης πληθύος τῶν ὅρων, πολλαπλασθιασθεὶς ἐπὶ τὴν διαφορὰν, δίδωσι τὸν α′.

Παράδειγμα. $\omega = 72$. $\pi = 11$. $\delta = 2\frac{1}{2}$. Ὁ α′. ὅρος $\alpha = 72 - (11 - 1)\,2\frac{1}{2} = 72 - 10 \cdot \frac{5}{2}$. (133.) $= 72 - 25 = 47 =$ τῷ α′. ὅρῳ. Ἡ δὲ πρόοδος ἔςαι 47, $49\frac{1}{2}$, 52, $54\frac{1}{2}$, 57, $59\frac{1}{2}$, 62, $64\frac{1}{2}$, 67, $69\frac{1}{2}$, 72.

Εἰς μνήμης ἐπιβοήθημα ἐκκείσθωσαν τὰ τέσσαρα τῶν σχημάτων ἐν τῷ ἑξῆς πινακιδίῳ.

Ἐὰν δοθῇ α, ω, καὶ δ, ἔςαι $\pi = \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1$.

Ἐὰν δὲ α, ω, καὶ π, ἔςαι $\delta = \frac{\omega - \alpha}{\pi - 1}$

Ἐὰν δὲ α, δ, καὶ π, ἔςαι $\omega = \alpha + (\pi - 1)\,\delta$

Ἐὰν δὲ δ, π, καὶ ω, ἔςαι $\alpha = \omega\,(\pi - 1)\,\delta$.

§. 226.

§. 226. Ἡ ἀριθμητικῆς οἱασοῦν προόδου καθόλου σειρὰ ἦν. §. 224.

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+\delta},\ \overset{3}{a+2\delta},\ \overset{4}{a+3\delta},\ \overset{5}{a+4\delta},\ \overset{6}{a+5\delta},\ \ldots$$

Ἐὰν οὖν δύω τῶν τυχόντων ὅρων ἀριθμητικῆς οἱασοῦν προόδου, τῶν ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφιςαμένων, προςεθῶσιν, ἀεὶ τὸ αὐτὸ προκύψει κεφάλαιον· Οἷον ἐπὶ τοῦ προκειμ. παραδ. ὁ α΄. καὶ ς΄. ὁ β΄. καὶ ε΄. ὁ γ΄. καὶ δ΄. παρέξουσι $2a+5\delta$. τὸ δὲ οὐδὲν ἔχει δυσξύμβλητον. Οἱ γὰρ ὅροι, ἀπὸ τέλους ἀριθμούμενοι, μειοῦνται διηνεκῶς κατὰ δ. ἀπ' ἀρχῆς δὲ, αὔξουσι κατὰ δ. Ὥς ἐξ ἀνάγκης ἀληθεύει ὁ κανών. π. χ. ἐν τῇδε τῇ προόδῳ 3, 5, 7, 9, 11, 13, τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ δύω ἐπίσης ἀπ' ἀλλήλων, καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφιςαμένων ὅρων ἔςαι = 16.

Ἐκ τούτου καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου ἁπάντων τῶν ὅρων ἑκάςης ἀριθμητικῆς προόδου ποδηγετούμεθα. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἐκ δύω ὅρων κεφάλ. ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφιςαμένων, καὶ ἀπ' ἀλλήλων, τὸ αὐτὸ ἐςι τῷ κεφαλαίῳ ἑτέρων δύω ὅρων, ὡσαύτως ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφιςαμένων. Ἀναγκαῖον ἄρα, τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ δύω τοιούτων ὅρων διὰ τῆς ἡμισείας πλήθυος τῶν ὅρων πολλαπλασιάζειν, τὸ ὁλικὸν τῆς προόδου κεφάλαιον εἰδέναι θέλοντας. Ὡς 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26. Τὸ κεφάλ. δύω ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφιςαμένων ὅρων = 31. Ἵν' οὖν τὸ ὁλικὸν τῆς προόδου εὕρωμεν κεφάλαιον, πολλαπλασιασθήτω 31 ἐπὶ τὸ 4. (Οἱ γὰρ ὅροι τῆς προόδου 8· ὧν τὸ ἥμισυ 4.) Καὶ ἔςαι = 124 = τῷ κεφαλαίῳ τῷ ὁλικῷ τῆς προόδου. Τὰ δὲ τοῦ κανόνος κρατήσει, καὶ τῆς πλήθυος τῶν ὅρων περιττῆς (§. 106.) οὔσης. Οἷον 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27.

27. Κἀνταῦθα τὸ κεφ. δύω ἐπ. ἀπὸ τῶν ἄκρ. ἀφις. ὅρ. $= 30$. Ἡ τῶν ὅρων πληθὺς $= 7$. Ἧς τὸ ἥμισυ $= \frac{7}{2}$. Ἢ $= 3\frac{1}{2}$ δυάσι. Ἐὰν οὖν 30 μετὰ τοῦ $\frac{7}{2}$ πολλαπλασιασθῇ, ἀνακύψει τὸ κεφάλ. τῆς προόδου. $30 . \frac{7}{2} = \frac{210}{2} = 105$.

Ἐν γένει. Ἔςω ὁ α΄. ὅρος $= \alpha$. Ἡ τῶν ὅρων πληθὺς $= \pi$. Ὥςε αἱ τῶν ὅρων δυάδες, εἴτε ἄρτιοι, εἴτε περιττοὶ εἶεν $= \frac{\pi}{2}$. ὁ ἔσχατος ὅρος $= \alpha + (\pi - 1)\delta$ (§.224.) Τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ δύω ὅρων ἐπίσης ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀφιςαμένων $= 2\alpha + (\pi - 1)\delta$. Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου τὸ κεφάλ. τῆς ὁλικῆς προόδου $= (2\alpha + (\pi - 1)\delta) . \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{2\alpha\pi}{2} + \frac{(\pi - 1)\delta\pi}{2} = \alpha\pi + \frac{(\pi - 1)\delta\pi}{2}.$$

Ἢ καὶ $\alpha\pi + \frac{(\pi^2 - \pi)\delta}{2}$.

Ἔνθεντοι ἐκ τοῦ α΄. Ὅρου, τῆς πληθύος τῶν ὅρων, καὶ τῆς διαφορᾶς, εὑρίσκομεν τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

Παραδείγματα, καὶ Προβλήματα· α΄. ἡλίκον τὸ κεφάλαιον τῶν φυσικῶν χαρακτήρων ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 50;

Ἐνταῦθα δέδοται ὁ α΄. Ὅρος $\alpha = 1$. Ἡ τῶν ὅρων πληθὺς $\pi = 50$. Καὶ ἡ διαφορὰ $\delta = 1$. Ὥςε τὸ κεφάλ. ἢ $K = \alpha\pi + \frac{(\pi - 1)\pi\delta}{2}$. Ἤτοι $= 1 . 50 + \frac{(50 - 1)50.1}{2} = 50 + \frac{49 . 50}{2} = 50 + 49 . 25 = 50 + 1222 = 1275$.

β΄. Ποσάβ'. Ποσάκις ἠχεῖ Ὡρολόγιόντι ἠχοῦν, ἐν 24 ὥραις; Ὧδε πρόκειται δύω πρόοδοι ἀλλήλαις ἴσαι. Τουτ: ἡ ἑτέρα ἀπὸ τῆς 1 μέχρι 12. Ὡσαύτως καὶ ἡ ἑτέρα ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι 12. Τὴν ἑτέραν οὖν τούτων ὑπολογιςεύσαντες πολλαπλασιάσομεν τὸ εὑρεθὲν μετὰ 2. $K = a\pi + \frac{(\pi - 1)\pi\delta}{2}$. Ἔνθα $a = 1$. $\pi = 12$. $\delta = 1$.

Ὥςε $1.12 + \frac{(12 - 1)\ 12.1.}{2} = 12 + \frac{11.12}{2} = 12 + 11.6 = 12 + 66 = 78$. Ὥςε ἑβδομηκονταεπτάκις ἐν 12, καὶ 156 ἐν 24. Εἰ δὲ καὶ ποσάκις τὰ τεταρτημόρια ἠχοῦσι προσαριθμήσομεν, δεκάκις ἐν ἑκάςῃ ὥρᾳ ἠχοῦντα, 240 ἐν 24 ὥραις, ἔςαι $156 + 240 = 396$.

Περὶ Γεωμετρικοῦ Λόγου.

§. 227. Τὸ ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου διὰ τῆς διαιρέσεως (§. 212.) τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἑτέρου προκύπτον πηλίκον. Ἤτοι τὸν ἀριθμὸν, ὅς ποσάκις ὁ ἕτερος τῷ ἑτέρῳ ἐμπεριέχεται, ἐμφαίνει, Ἐκθέτην, ἢ Ὄνομα τοῦ λόγου ὀνομάζουσιν. Οἷον, ἐὰν 18 πρὸς 6 Γεωμετρικῷ τῷ λόγῳ παρεξετάζωμεν, διελοῦσι 18 διὰ 6, τὸ πηλίκον 3 (ἢ ὁ ἐκθέτης) δείξει, ποσάκις ὁ 18 περιέχει τὸν 6. Σημειοῦται δ' οὗτος ὁ λόγος τῷ ἑτέρῳ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, (§. 83.) μεταξὺ τῶν παραβαλλομένων παρεντιθεμένῳ. Ὡς 7: 21. ἢ 48: 12. Ἢ καὶ οὕτως $\frac{7}{21}$, ἢ $\frac{48}{12}$. Καὶ ἐν γένει α: β, ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$. Τὸ δὲ σημεῖον ἀπαγγέλλεται, α πρὸς β.

Ὁ δὲ τοῦ λόγου ἐκθέτης ἤτοι ὁλοσχερής ἐςιν ἀριθμὸς, ἢ κεκλασμένος. Οὗτος δὲ (ὁ κεκλ.) ἤτοι γνήσιον κλάσμα, ἢ νόθον. Ὥσπερ γὰρ, ποσάκις ὁ ἐλάσ-

σων