ται αὕτη· Ὅθεν ὁ εὐκόλως προχωρῆσαι βουλόμενος ἂς προσέχῃ εἰς τοὺς κανόνας, καὶ παραδείγματα.

Περὶ Λύσεως τῶν κλασμάτων εἰς Ἀπείρους Σειράς.

§. 210. Ἕκαστον κλάσμα οὐ μόνον γράφοντες, ἀλλὰ καὶ διὰ σειρᾶς ὅρων παραστῆσαι δυνάμεθα, ἧς τὸ πέρας, ἐφ' ὅσον ἂν βούλῃ, τοῦ ὑπολογισμοῦ προαγομένου, οὐχ εὑρίσκεται· καὶ τοῦτό ἐστιν, ὃ Ἄπειρος Σειρὰ καλεῖται· ἔνθα μᾶλλον, καὶ μᾶλλον τῇ ἀληθείᾳ προσεγγίζουσι, πάντῃ αὐτῆς ἐφικέσθαι οὐχ οἷόν τε· ἡ δὲ τούτων χρῆσις ἐπίσημος, ὡς κατωτέρω δειχθήσεται.

§. 211. Πᾶς ἀριθμὸς τῆς 1 μείζων, οὐ μόνον ὡς τῇ προσθέσει δύω ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν προκύψας, ἔχει θεωρηθῆναι, ἀλλὰ καὶ δυσὶν ἀριθμοῖς τοῦτον ἔνι παραστῆσαι· π. χ. τὸν 3 παραστήσομεν ὡς ἐκ $2+1$, καὶ τὸν 5 ὡς ἐκ $3+2$, ἢ ἐκ $4+1$ συγκείμενον· Ἀλλὰ τοὺς αὐτοὺς καὶ ὡς διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπ' ἀλλήλων δύω ποσοτήτων ἀναφυέντας ἂν θεωρήσαιμεν. Οἷον τὸν 3 ἐκ τοῦ $5-2$, καὶ τὸν 5 ἐκ τοῦ $6-1$, ἢ καὶ καθ' ὀντιναοῦν ἕτερον τρόπον. Ὥστε κλάσμα δι' ἀπείρου σειρᾶς παραστῆσαι βουλόμενος ἀπόδος τὸν παρον. διὰ ποσότητος, ἐκ β'. μερῶν συνισταμένης, ἤτοι τῷ τῆς προσθέσεως, ἢ τῷ τῆς ἀφαιρέσεως συνημμένων σημείῳ. Ὡς $\frac{2}{3}$ παράστησον διὰ $\frac{2}{2+1}$, ἢ $\frac{2}{4-1}$. καὶ ἐνεργείᾳ διαιρῶν εὑρήσεις πηλίκον τὴν ἄπειρον σειράν. Ἵνα δὲ τοῦτο ἐν γένει δηλωθῇ, παραληπτέον ἐπ' ἀμφοῖν τῶν τρόπων ἀλγεβραϊκὸν κλάσμα, ὡς διὰ τούτου ἁπάντων τῶν κλασμάτων σημαινομένων. Γράψον οὖν κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, καὶ τὸ μὲν α παριστάτω πάντα ἀριθμὸν, καὶ αὐτὴν τὴν 1, τὸ δὲ $\beta+\gamma$ ὡσαύτως οἱουσοῦν δύω ἀριθμοὺς, μείζους τῆς 1, ἅμα ληφθέντας· π. χ. ἐν τῷ κλ. $\frac{5}{8}$. α ἔσται $=5$. καὶ

ἐὰν

ἐὰν τὸ $\beta = 4$ τεθῇ, ἔσαι $\gamma = 2$. Παραπλησίως καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\beta-\gamma}$ παρασήσει πᾶν δυνατὸν κλάσμα· Προκείσθω τοίνυν ἄμφω τὰ παραδειγ. ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, καὶ $\frac{\alpha}{\beta-\gamma}$, ὧν τὴν ἄπειρον σειρὰν εὑρόντες, ἀντικαταςήσαμεν ῥαδίως ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀριθμούς.

Καὶ α΄. τὸ α· ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$ οὕτως ἐκκείμενον.

$$
\begin{array}{l}
\beta+\gamma)\ \alpha\ \Big|\ \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\gamma}{\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta\beta} - \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta\beta},\ \text{κτ.} \\
\quad \alpha + \frac{\alpha\gamma}{\beta} \\
\quad \overline{\quad - \frac{\alpha\gamma}{\beta}} \\
\quad\quad - \frac{\alpha\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta} \\
\quad\quad \overline{\qquad + \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}} \\
\qquad\qquad + \frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta} \\
\qquad\qquad \overline{\qquad - \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta}} \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta} - \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta} \\
\qquad\qquad\qquad \overline{\qquad + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta} + \frac{\alpha\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}{\beta\beta\beta\beta\beta}
\end{array}
$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Του.

Τουτέςι, τὸ β τοῦ διαιρέτου περιέχεται ἐν τῷ α (τῷ διαιρετέῳ) $\frac{\alpha}{\beta}$ ις. Τεθήτω τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἰς τὸ πηλίκον, καὶ πολλαπλασιασθήτω μετὰ τοῦ διαιρέτου. (μέμνησο, ὅπως τὰ κλάσματα πολλαπλασιάζ. καὶ διαιροῦνται). Τὸ γ τοῦ διαιρέτου μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ πολλαπλ. δίδωσιν $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$. Καὶ τὸ β τοῦ διαιρ. μετὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ αὖθις, δίδ. α. τεθήτωσαν ἄμφω ὑπὸ τὸν διαιρετέον α. Καὶ ἄφελε α ἀπὸ τοῦ α. Ταῦτα τοίνυν ἀναιροῦσιν ἄλληλα. Ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔςιν, ἀφ' ὅτου τὸ $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ ἀφαιρεθήσεται, τίθεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐναντίῳ τῷ σημείῳ· Ὅτι, ὡς εἴρηται, ἐν τῇ ἀφαιρέσει ὁ ἀφαιρετέος τρέπει τὰ ἑαυτοῦ σημεῖα εἰς τἀναντία. Αὖθις τὸ β τοῦ διαιρέτου ἐν τῷ λειψ. $-\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ περιέχεται $-\frac{\alpha\gamma}{\beta\beta}$. τεθήτω εἰς τὸ πηλίκον, καὶ πολλαπλ. μετὰ τοῦ διαιρέτου· $+\gamma$. $-\frac{\alpha\gamma}{\beta\beta} = -\frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}$. Καὶ $+\beta$. $-\frac{\alpha\gamma}{\beta\beta} = -\frac{\alpha\gamma}{\beta}$. Τεθὲν ὑπὸ τὸν διαιρετέον ἀφαιρεθήτω. Τὸ $-\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ τοῦ ἀφαιρετέου (ὡς τοῦ $-$ σημείου εἰς τὸ $+$ τρεπομένου, διὰ τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως.) ἀναιρεῖ τὸ $-\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ τοῦ μειωτέου· Καὶ $-\frac{\alpha\gamma\gamma}{\beta\beta}$, διὰ τὸ μὴ ἔχειν ἀπό τινας ἀφαιρεθῆναι, τίθεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῷ σημείῳ +. Καὶ οὕτω χωρούσης τῆς διαιρέσεως, καὶ τῶν κανόνων τῆς ἀφαιρ. πολλαπλ. διαιρέσ. καὶ τῶν + καὶ — σημείων παρατηρουμένων, προκύψει ἐν τῷ πηλίκῳ ἡ πρὸ ὀφθαλμῶν σειρά, ἣν καὶ περαιτέρω προάξεις ἐπ' ἄπειρον, τοὺς δὲ τοὺς κανόνος σημειῶν· 1) τὰ σημεῖα + καὶ — ἐν τῷ πηλίκῳ ἐναλλὰξ ἐπαμείβονται. 2) Ἐν πᾶσι τοῖς ὅροις τοῦ πηλίκου τὸ α ἐςὶν ἐν τῇ α' δυνάμει. 3) Τὸ γ ἐκ τῷ ἀριθμ. τοῦ β' ὅρου, τῆς α' ὂν δυνάμεως, ἐπὶ πάντων τῶν ἐπομένων ὅρων, εἰς τὰς φυσικῇ τῇ τάξει χωρούσας δυνάμεις ἐξαίρεται· τὸ δὲ β τοῦ παρονομαςοῦ εὐθὺς ἐν τῷ α'. ὅρῳ, τῆς α'. ὂν δυνάμεως, ἐν τοῖς ἐπομένοις διηνεκῶς κατὰ τάξιν εἰς τὰς ὑπερτέρας ἄνεισι δυνάμεις, ἐν πᾶσι τοῖς ὅροις μιᾷ δυνάμει ὑπερτεροῦν τοῦ γ. Τούτων τοίνυν κειμένων, ῥαδίως τὴν σειρὰν προάξεις ἐφ' ὅσον ἂν βούλῃ.

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} - \frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\gamma^4}{\beta^5} - \frac{\alpha\gamma^5}{\beta^6} \text{ κτ.}$$

Ἐκ τούτου καθορᾷν πάρεςιν, ὅτι τὸ πηλίκον οὐκ ἐντελὲς, ἀλλ' ἀεὶ ἔγγιον τῆς ἀληθείας γίνεται· ὥςε καὶ τὸ λεῖψ. τῆς διαιρέσ. ὡς κλάσμα τῷ πηλίκῳ προςεθῆναι ἀνάγκη.

Ἔςω $\frac{1}{6}$ ἐξενεκτέον δι' ἀπείρου σειρᾶς· Ἐνταῦθα ἔςαι α = 1. ἔςω β = 4. ὥςε γ = 2. ἀντὶ τῶν γραμμάτων τεθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ ἐν τῇ ἀνωτ. σειρᾷ·

$$\frac{1}{4+2} = \frac{1}{4} - \frac{1.2}{4^2} + \frac{1.2^2}{4^3} - \frac{1.2^3}{4^4} + \frac{1.2^4}{4^5} \dots$$

Ἡ

Ἡ. τῶν δυνάμεων ἐνεργεία ἐκδηλωθεισῶν $= \frac{1}{4}$
$- \frac{2}{16} + \frac{4}{64} - \frac{8}{256} + \frac{16}{1024} \ldots$

Ἄθροισον ἐνταῦθα τὰ καταφατικὰς ποσότητας $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{64}$, $\frac{16}{1024}$, αἵτινες ὑπὸ τὴν αὐτὴν παρονομ. ἀναχθεῖσαι ἀποτελοῦσι $\frac{336}{1024} = \frac{21}{64}$. Ὡσαύτως καὶ τὰς ἀποφατικὰς $- \frac{2}{16} - \frac{8}{256} = \frac{5}{32}$. Καὶ ἄφελε $\frac{5}{32}$ ἀπὸ $\frac{21}{64}$, ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀ. παρονομ. τὰ κλάσματα ἀναγαγὼν, καὶ ἔςαι ἡ διαφορὰ $\frac{11}{64}$, ὅπερ οὐ πολλῷ μεῖζον τοῦ $\frac{1}{6}$ (§. 122.) Ἀλλ' ὅσῳ ἄντις τὴν σειρὰν προάγῃ διὰ τῶν $+$ καὶ $-$ σημείων, τοσούτῳ ἂν ἔγγιον τῆς ἀκριβείας γένοιτο.

Εἰ δέοι $\frac{2}{7}$ κατὰ τὸν ἀνωτ. τρόπον ἐκδηλῶσαι, ἔςαι $\alpha = 2$. Ἔςω $\beta = 4$. ὥςε $\gamma = 3$. ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta + \gamma} = \frac{2}{4 + 3}$. ἀντικατάςησον εἰς τὴν τῶν γραμμάτων σειρὰν τὰς διωρισμένας ποσότητας, καὶ ἔςαι ἡ σειρά.

$$\frac{2}{4+3} = \frac{2}{7} = \frac{2}{4} - \frac{2 \cdot 3}{4^2} + \frac{2 \cdot 3^2}{4^3} - \frac{2 \cdot 3^3}{4^4}$$
$$+ \frac{2 \cdot 3^4}{4^5} - \frac{2 \cdot 3^5}{4^6} + \frac{2 \cdot 3^6}{4^7} - \frac{2 \cdot 3^7}{4^8} \ldots$$
$$\text{κτ.} = \frac{2}{4} - \frac{6}{16} + \frac{18}{64} - \frac{54}{256} + \frac{162}{1024}$$
$$- \frac{486}{4096} + \frac{1458}{16384} - \frac{4374}{65536}.$$

Ἀφελὼν οὖν

οὖν τὰς — ποσότ. ἀπὸ τῶν +, μετὰ τὸ εἰς τὸν αὐτὸν αὐτὰς ἀναγαγεῖν παρονόμαςὴν, ἕξεις κλάσμα σοὺ πολλῷ ἔλαττον τοῦ $\frac{2}{3}$.

§. 211. Δεικτέον ἤδη, ὅπως σειρὰ ποσοτήτων διὰ τῆς ἐνεργείᾳ διαιρέσεως τοιούτου κλάσματος $\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}$ ἀναφύεται. καὶ διὰ τούτου γὰρ, ὡς εἴρηται, πᾶν κλάσμα παρίςαται· παρατεθήτω κἀνταῦθα τὸ ἄνωτ. διαιρεθὲν παράδειγμα· Ὁ γὰρ τὴν διαίρεσιν ἐπιςάμενος οὐ χαλεπῶς καὶ τοῦτο κατανοήσει·

$$
\begin{array}{l|l}
\beta-\gamma)\ \alpha & \dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\dfrac{\alpha\gamma^2}{\beta^3}+\dfrac{\alpha\gamma^3}{\beta^4},\ \kappa\tau. \\
\quad \alpha-\dfrac{\alpha\gamma}{\beta} & \\
\hline
\qquad +\dfrac{\alpha\gamma}{\beta} & \\
\qquad +\dfrac{\alpha\gamma}{\beta}-\dfrac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} & \\
\hline
\qquad\qquad +\dfrac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} & \\
\qquad\qquad +\dfrac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}-\dfrac{\alpha\gamma^3}{\beta^3} & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad +\dfrac{\alpha\gamma^3}{\beta^3} & \\
\qquad\qquad\qquad +\dfrac{\alpha\gamma^3}{\beta^3}-\dfrac{\alpha\gamma^4}{\beta^4} & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad +\dfrac{\alpha\gamma^4}{\beta^4} &
\end{array}
$$

Ταύτης

Ταύτης τῆς σειρᾶς οἱ ὅροι πάντες εἰσὶ καταφατικοὶ, καὶ ἡ σειρὰ χωρεῖ ἐπ' ἄπειρον.

$$\frac{\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} + \frac{\alpha\gamma^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\gamma^4}{\beta^5} + \frac{\alpha\gamma^5}{\beta^6} \text{ κτ.}$$

Τὸ ἑξῆς παράδειγμα δἰ ἀριθμιῶν ἀναπτύξει τὸ λεγόμενον. Ἔςω ζητητέα ἡ σειρὰ τοῦ $\frac{1}{2}$. Ἔςω $\alpha = 1.$ $\beta = 4.$ καὶ $\gamma = 2.$ Καὶ ἔςαι $\frac{\alpha}{\beta - \gamma} = \frac{1}{4-2}$; ὅ ἐςιν $\frac{1}{2}$. Ἀντὶ τῶν γραμμάτων τεθήτωσαν οἱ ἀριθμοί. ὡς $\frac{1}{4-2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1 . 2}{4^2}$

$$+ \frac{1 . 2^2}{4^3} + \frac{1 . 2^3}{4^4} + \frac{1 . 2^4}{4^5} \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{4}{64} + \frac{8}{256} + \frac{16}{1024} \dots$$

Ἐὰν οὖν τὰ κλάσματα ταῦτα ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομ. ἀναχθέντα προςεθῶσι, δώσουσι κεφάλαιον σχεδὸν $\frac{1}{2}$. Ἔςι γὰρ τὸ κεφάλ. $\frac{31}{64}$, ἤτοι τοῦ $\frac{1}{2}$ διάφορα ἔτι κατὰ $\frac{1}{64}$. Καὶ τῆς σειρᾶς προαχθείσης, οὕτως ἀκριβῶς ἐξενεχθήσεται, ὥςε τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ δοθέντος κλάσματος, καὶ τοῦ ἐκ τῆς προσθέσεως τῆς σειρᾶς προκύψαντος, ἀπειροςὴν εἶναι, ἤτοι ἀπείρως μικρὰν, καὶ ἀσφαλῶς τὴν σειρὰν ἀντὶ τοῦ κλάσματος ἀντικαταςῆναι δύνασθαι.

Περὶ Λόγων.

§. 212. Ἡ δύω ἀριθμῶν ὁμοειδῶν, (ἢ ποσοτήτων ἐν γένει) πρὸς ἀλλήλους παράθεσις, τὴν τούτων ταύ-