γράφουσι τὸ $(\alpha+\beta)^2$ ἀντὶ τοῦ $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$. ἢ καὶ ἀντὶ τοῦ $(\alpha+\beta)^3$ τὸ $(\alpha+\beta).(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)$ κτ. Οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. Ὡσαύτως καὶ αἱ τῷ — σημείῳ συνημμέναι. π. χ. $(\alpha-\beta)^2$. Ὅπερ $= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$. ἐὰν ἀμέλει $\alpha-\beta$ μετὰ τοῦ $\alpha-\beta$ πολλαπλασιασθῇ.

Σχόλιον.

Ὅταν δείχνωμεν, ὅτι πρέπει νὰ ἐξαρθῇ εἰς δύναμιν μία διὰ τοῦ +, ἢ — συμπεπλεγμένη (§. 44.) ποσότης, πάντοτε εἶναι ἀναγκαῖον νὰ κλείηται ἐν παρενθέσει, καὶ ὁ ἐκθέτης νὰ βάνηται ἐπάνω πρὸς τὰ δεξιὰ, ὡς σύνηθες· διότι ἀλλέως ἠμπορεῖ νὰ ἀκολουθήσῃ ἀπάτη. π. χ. ἄλλο σημαίνει τὸ $(\alpha+\beta)^2$ ἀπὸ τὸ $\alpha+\beta^2$. Τὸ α΄. θέλει νὰ εἰπῇ, ὅτι ἡ ποσότης $\alpha+\beta$ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ μεθ᾽ ἑαυτῆς. Τὸ δὲ β΄. ὅτι εἰς τὴν ποσότητα α πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ β· Ἄς τεθῇ τὸ $\alpha=5$: καὶ τὸ $\beta=10$. καὶ ἔσαι $(\alpha+\beta)^2 = (5+10)^2 = 15^2 = 15 . 15 = 225$. Ἀλλὰ τὸ $\alpha+\beta^2$ ἔσαι $= 5+10^2 = 5+10.10 = 5+100 = 105$. Τὸ οὖν 225 πάντῃ διάφορον τοῦ 105.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Δυνάμεων.

§. 194. Δυνάμεις ὁμόῤῥιζαι (ὅ ἐςι τὴν αὐτὴν ποσότητα ῥίζαν ἔχουτες) διαιροῦνται δι᾽ ἀλλήλων, ἐὰν οἱ τούτων ἐκθέται ἀφαιρῶνται ἀπ᾽ ἀλλήλων·

ἡ Δεῖξις τούτου γενέσθω διὰ γραμμάτων.

Ἀξία, κατὰ τὰ εἰρημ. καλεῖται ἡ προκύψασα ποσότης διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μετ᾽ ἀλλήλων ὁμοειδῶν ποσοτήτων. Οὕτως α. α. α. α. ἐςὶν ἡ δ΄. ἀξία, ἢ δύν. τοῦ α, ἢ α^4. γραφείη δ᾽ ἂν καὶ αααα. Ἀλλὰ διὰ τῆς διαιρέσεως τὰ γράμματα χωρίζονται αὖθις ἀπ᾽ ἀλλήλων.

λων, καὶ ἀφαιροῦνται τοσαῦτα, ὅσα ὁμοειδῆ γράμματα περιέχει ὁ διαιρέτης. (§. 99. σχ. β'.) Οἷον, εἰ αααα $= \alpha^4$ διαιρεθῆναι δέοι διὰ αα, ὑπολειφθήσεται αα· Ἀλλὰ τὸ αὐτό ἐστι τοσαῦτα γράμματα ἀφαιρεῖν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τῷ ἐν τῷ ἐκθέτῃ δεικνύναι, πόσα τούτων ἀφαιρετέα· Τοῦτο δὲ γένοιτο διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφαιρέσεως οὕτως. α^4 διὰ α^2 διαιρεθὲν γραφήσεται $\alpha^4 : \alpha^2$, ἢ $\frac{\alpha^4}{\alpha^2} = \alpha^{4-2} = \alpha^2$. Ἐφαρμόσει δὲ ὁ κανὼν καὶ τοῖς διὰ γραμμάτων ἐκθέταις, ὡς καὶ τούτων διορισθῆναι δι' ἀριθμῶν δυναμένων. οἷον $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$. Ἐὰν δὲ αἱ ῥίζαι τῶν δυνάμεων μὴ ὁμοειδεῖς ὦσιν. (τουτ: μὴ τὰ αὐτὰ γράμ. ἢ) ὁ κανὼν χώραν οὐκ ἔχει, ὡς παντίπου ἐκ τῆς διαιρέσεως δῆλον· $\alpha^{\mu}\beta^{\nu}$ οὐκ ἔστιν $= \alpha^{\mu-\nu}$. Ἀλλὰ δηλώσομεν τὴν τούτων διαίρεσιν ἤτοι $\alpha^{\mu} : \beta^{\nu}$, ἢ $\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\nu}}$.

§. 195. Ἐπὶ τῶν ὁμοειδῶν ὁ κανὼν κρατεῖ, καὶ ἐὰν ἡ δύναμις μὴ μόνη, ἀλλὰ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεθ' ἑτεροειδῶν συνημμένη ἦ· μόνον εἰ ὁ διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης ὁμοειδεῖς εἶεν δυνάμεις, τουτ: δυνάμεις τὰς αὐτὰς ἔχουσαι ῥίζας. π. χ. $\alpha^3\chi^4 : \alpha^2\chi^2 = \alpha^{3-2}\chi^{4-2} = \alpha^1\chi^2 = \alpha\chi^2$ (§. 185.) Καὶ $\alpha^5\chi^4 : \alpha = \alpha^{5-1}\chi^4 = \alpha^4\chi^4$. Εἰ δὲ τῷ διαιρέτῃ καὶ δύναμις οὐχ ὁμοειδὴς πρόσεστιν, ἐν τῷ πηλίκῳ οὐκ ἂν μία ἐκ τῶν δύω ποσότης προκύψειεν, ἀλλ' ἐν μέρει καὶ τὴν ἑτέραν δεικτέον. π. χ. $\alpha^5\chi^4 : \alpha^2\psi^2 = \alpha^{5-2}\chi^4 : \psi^2$, ἢ $\frac{\alpha^3\chi^4}{\psi^2}$.

§. 196. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης του διαιρέτου ἐν ὁμοειδέσι δυνάμεσι μείζων ἢ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου, ἀνάγκη

ἀνάγκη πᾶσα τὸν ἐκθέτην τοῦ πηλίκου ἀποφατικὸν εἶναι. Οἷον εἰ α^{μ} διελεῖν δέον διὰ α^{ν}, καὶ ν ἐςὶ μεῖζον τοῦ μ, ἔςαι μ — ν ἀναγκαίως ἀποφατικὴ ποσότης, ὅπερ ἐμφαίνουσι καὶ οἱ ἀριθμοί. π. χ. $\alpha^3 : \alpha^7 = \alpha^{3-7} = \alpha^{-2}$. ἢ α ἐν τῇ δυνάμει -2. Καὶ $\alpha\chi\upsilon : \alpha^3 \chi^2 \upsilon^4 = \alpha^{1-3} \chi^{1-2} \upsilon^{1-4} = \alpha^{-2} \chi^{-1} \upsilon^{-3}$. Τί δὲ τοῦτό ἐςιν, εἰ ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ἀποφατικὴ ποσότης γίνεται, δειχθήσεται αὐτίκα, καὶ ὅπως ἀντὶ ταύτης ἑτέραν ἔκφρασιν εὑρεῖν ἔχομεν.

§. 197. Τὰ ἑξῆς παραδείγμ. παριςῶσι τὰ ῥηθέντα σαφέςερον $\chi^4 : \chi^3 = \chi^{4-3} = \chi^1 = \chi$. Καὶ $\chi^5 : \chi^7 = \chi^{5-7} = \chi^{-2}$.

Καὶ $\chi^3 \upsilon^2 : \chi\upsilon = \chi^{3-1} \upsilon^{2-1} = \chi^2 \upsilon$. $\chi^3 \upsilon^5 : \chi^4 \upsilon^2 = \chi^{3-4} \upsilon^{5-2} = \chi^{-1} \upsilon^3$.

Καὶ $\chi^5 \upsilon^4 \alpha : \chi^7 \upsilon^5 \alpha^2 = \chi^{5-7} \upsilon^{4-5} \alpha^{1-2} = \chi^{-2} \upsilon^{-1} \alpha^{-1}$.

Καὶ $\alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$.

Καὶ $\alpha^{\nu+1} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+1-\mu}$.

Καὶ $\alpha^{\nu-1} : \alpha^{\mu+1} = \alpha^{\nu-1-(\mu+1)} = \alpha^{\nu-1-\mu-1} = \alpha^{\nu-\mu-2}$.

$\alpha^{\nu} \chi^{\mu} \upsilon : \alpha^{\rho} \chi^5 \upsilon^2 = \alpha^{\nu-\rho} \chi^{\mu-5} \upsilon^{1-2} = \alpha^{\nu-\rho} \chi^{\mu-5} \upsilon^{-1}$.

Καὶ $\chi^{\rho} \upsilon^{\varsigma} : \chi^{\mu} = \chi^{\rho-\mu} \upsilon^{\varsigma-1}$

$$(\chi^4 \upsilon^2 - \upsilon^3 \chi^3) : \alpha\chi^3\upsilon = \frac{\chi^{4-3}\ \upsilon^{2-1} - \upsilon^{3-1}\chi^{3-3}}{\alpha}$$

$$= \frac{\chi\upsilon - \chi^2\ \upsilon^2}{\alpha}.$$

$$(\alpha\chi^2\ \upsilon^3 - \alpha\beta\chi^2\ \upsilon^2 - \alpha\chi^2\ \upsilon^2) : \alpha\chi\upsilon$$

$$= \chi\upsilon^2 - \beta\chi\upsilon - \chi\upsilon = (\upsilon - \beta - 1)\ \chi\upsilon.$$

§. 198. Τὴν τῶν ὁμοειδῶν δυνάμεων δι' ἀλλήλων διαίρεσιν μαθοῦσι, ῥᾴδιαν ἔςαι δεῖξαι, καὶ ὅπως αἱ δυνάμεις, αἱ δι' ὁμοειδοῦς α'· δυνάμεως διαιρούμεναι, διηνεκῶς μειοῦνται, καὶ ὅπως ἐκ τούτου σειράτις τῶν δυνάμεων εἰς τοὐπίσω ἀναφύεται· Εἰς γὰρ τὸ πρόσω αὔξονται ἀεὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὁμοειδοῦς α. δυνάμεως· μέμνησο δὲ κἀνταῦθα τοῦ (§. 84. σχ.), ὅτι ἡ δι' αὐτῆς διαιρουμένη ποσότης $= 1$. Ὥςε καὶ $\frac{\chi}{\chi} = 1$, ὡς ἡμῖν ἤδη τοῦτο ἀναγκαῖον εἰδέναι· Τὰ λοιπὰ δὲ δῆλον, ὅτι τὸ χ γενική ἐςι ποσότης· καὶ ὅ, τι κατ' αὐτῆς ἀληθεῦον εὑρεθήσεται, ἀληθεύσει καὶ κατὰ πάσης ποσότητος διωρισμένης·

Ἐὰν χ ἐν τῇ α'· δυνάμει παρῇ, (ὅ ἐςιν, εἴπερ ἡ δοθεῖσα ποσότης εἰς οὐδεμίαν ἔτι ἐξῆρται δύναμιν, ἥντινα καὶ οὕτω δηλῶσαι δυνάμεθα, χ^1) καὶ πολλαπλασιασθῇ μετὰ χ, καὶ τὸ ἐκ τούτων παραγόμενον αὖθις μετὰ χ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δῆλον, ἡ ἑπομένη ἀνακύψει σειρὰ τῶν δυνάμεων. χ, χ^2, χ^3, χ^4, χ^5, χ^6, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον.

Ἀλλ' ἀπὸ τοῦ χ^6 τῆς διαιρέσεως διὰ χ ἀρξαμένοις, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον, ἀναφανήσεται ἥδε ἡ σειρά.

$$\frac{\chi^6}{\chi}$$

$\frac{\chi^6}{\chi} = \chi^{6-1} = \chi^5$. Καὶ $\frac{\chi^5}{\chi} = \chi^{5-1} = \chi^4$. Καὶ $\frac{\chi^4}{\chi} = \chi^{4-1} = \chi^3$. Καὶ $\frac{\chi^3}{\chi} = \chi^{3-1} = \chi^2$. Καὶ $\frac{\chi^2}{\chi} = \chi^{2-1} = \chi^1$, ἢ χ. ὅτι χ^1 καὶ χ ἰσοδυναμεῖ· (§.185.)

Αὖθις $\frac{\chi}{\chi} = \chi^{1-1} = \chi^0$, ἢ $= 1$. (ἐπειδὴ γὰρ $\frac{\chi}{\chi} = 1$. (§.84.σχ.) τὸ δὲ $\frac{\chi}{\chi} = \chi^{1-1} = \chi^0$. ἄρα καὶ (48.δ'.) $\chi^0 = 1$.) Ὥστε ἀντὶ τοῦ χ^0 ἀντικαθιστᾶν τὴν 1 ἔξεστιν, ὡς ἴσην αὐτῷ.

Αὖθις $\frac{\chi^0}{\chi}$ ἢ $\left(\frac{1}{\chi}\right) = \chi^{0-1} = \chi^{-1}$. Ὅτι $0 - 1 = -1$.

Καὶ $\frac{\chi^{-1}}{\chi}$, ἢ $\frac{1}{\chi} : \chi$ (ὅτι, ὡς ἤδη δέδεικται, $\frac{1}{\chi} = \chi^{-1}$. ὅθεν ἀντὶ τοῦ διαιρετέου χ^{-1}, ἀντικατασταίη ἂν τὸ $\frac{1}{\chi}$) $= \frac{1}{\chi^2}$. Ὅτι τὸ $\frac{1}{\chi}$ ἔτι χ:ις μειωθῆναι χρή· (τοῦτο γὰρ δηλοῖ ἡ διαίρεσις ἡ διὰ τοῦ χ) Ἀλλὰ $\frac{1}{\chi}$ μειωθήσεται κατὰ τὸ χ, ἐὰν ὁ διαιρέτης χ:ις αὐξηθῇ· τοῦτο δ' ἔσται, ἐὰν τὸν διαιρέτην μετὰ τοῦ χ πολλαπλασιάσωμεν. Ἀλλ' ἐπεὶ, ὡς δέδεικται, $\frac{1}{\chi} = \chi^{-1}$. τοῦτο δὲ τὸ χ^{-1} διαιρεθὲν διὰ τοῦ χ ἔσται $\chi^{-1-1} = \chi^{-2}$. Ἂν τι τὶ τοῦ $\frac{1}{\chi^2}$ χρησόμεθα τῷ χ^{-2}. Καὶ $\frac{1}{\chi^2} : \chi$ $= \frac{1}{\chi^3} = \chi^{-3}$. Καὶ $\frac{1}{\chi^3} : \chi = \frac{1}{\chi^4} = \chi^{-4}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Προτεθείσθωσαν ἤδη αἱ δύω ἴσαι σειραὶ τῶν μειουμένων δυνάμεων, καὶ τὰ σχήματα τὰ ἀλλήλοις ἴσα γραφήτω ὑπάλληλα· Ἀρκτέον δ' ἀπὸ τοῦ χ^6. ἡ β'. σειρὰ ἐςὶ κατὰ πάντα ἴση τῇ α'. π. χ.

$$\chi^6,\ \chi^5,\ \chi^4,\ \chi^3,\ \chi^2,\ \chi^1,\ \chi^0,\ \chi^{-1},\ \chi^{-2},\ \chi^{-3},\ \chi^{-4}\ \ldots\ \chi^{-\nu}.$$

$$\chi^6,\ \chi^5,\ \chi^4,\ \chi^3,\ \chi^2,\ \chi^1,\ 1\ \ \frac{1}{\chi},\ \frac{1}{\chi^2}\ \ \frac{1}{\chi^3}\ \ \frac{1}{\chi^4}\ \ldots\ \frac{1}{\chi^\nu}.$$

Ἡ ἀντικατάςασις τῶν ἴσων σχημάτων οὐ μικρὸν ἐν διαφόροις ὑπολογισμοῖς συμβάλλεται, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς σαφῶς ὀψόμεθα· π. χ. ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{\chi}$ ἀντικαταςῆναι δύναται τὸ ἴσον χ^{-1}, καὶ ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{\chi^\nu}$ τὸ $\chi^{-\nu}$. Ἀντὶ δὲ τοῦ $\frac{1}{\chi^\upsilon}$ τὸ χ^{-1} υ^{-1}, κτ.

Σχόλιον.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς μετὰ ἐκθετῶν καταφ. καὶ ἀποφ. παρελείφθη ἀνωτέρω. διότι ἠγνοοῦμεν τὴν σημασίαν τῶν τοιούτων σχημάτων. ὡς α^{-1}, α^{-2} κτ. Οὐ χαλεπὸν δὲ ταῦτα εἰδόσι κἀκείνους πολλαπλασιάζειν. οἷον α^{-1} μετὰ τοῦ α^2 πολλαπλ. δίδωσιν α^1. ὅ ἐςιν α· Φανερὸν δὲ καὶ ἐκ τούτου. $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$.

$= \frac{1}{α}$ τοῦτο πολλαπλ. μετὰ τοῦ αα ἔσται $\frac{αα}{α}$, (§. 140.) ἤτοι α. Ὡσαύτως καὶ $α^{-2}$ μετὰ $α^2$ πολλαπ. $= α^{-2+2} = α^0 = 1$. Καὶ $α^{-3}$ τῷ $α^2$ πολλ. $= α^{-3+2} = α^{-1}$.

§. 199. Πᾶσα ποσότης ἐν τῇ δυνάμει 0 ἐστὶν $= 1$. (§. ἀνωτ.) Καὶ ἐπειδὴ τὸ χ ὡς ἀόριστον, οἱανοῦν σημαίνει ποσότητα, δύναται σημαίνειν καὶ $(α+β)$. Ἐπεὶ οὖν $χ^0 = 1$, ἔσται καὶ $(α+β)^0 = 1$. Καὶ τοῦτο ἀληθεύει καθόλου· καὶ 0^0 γάρ ἐστιν $= 1$. Καίτοι γὰρ τὸ μηδενικὸν εἰς οὐδεμίαν ὑψωθῆναι δύναμιν ἔχει (ὅτι τὸ μηδὲν ἀεὶ μηδέν) ἀλλὰ τὸ 0^0 ὡς $\frac{0}{0}$ νοεῖν ἔξεστι καὶ μάλα. καὶ τὸ μηδὲν ἐμπεριέχεται τῷ μηδενὶ ἅπαξ, ἵνα τι καὶ ἀφῃρημένως φθεγξώμεθα.

Προκείσθω καὶ ἕτερα παραδείγματα, εἰς διαίρεσιν ἐν (§. 197.) μὴ προχειρισθέντα.

$α^4 χ^ρ υ^5 : α^4 χ^ρ υ = α^{4-4} χ^{ρ-ρ} υ^{5-1} = α^0 χ^0 υ^{5-1} = 1.1. υ^{5-1} = υ^{5-1} = υ^4$.

$α^{5+1} χ^2 : α^{5+1} χ = α^{5+1-(5+1)} χ^{2-1} = α^0 χ^1 = 1 . χ^1 = χ^1 = χ$.

$(α^2 χ^2 υ^2 - αβχυ - αχυ) : αχυ = αχυ - β - 1$.

§. 200. Ὅπως ἡ δοθεῖσα δύναμις εἰς ἑτέραν δύναμιν ζητουμένην ἐξαίρεται, εἴρηται. (§. 192.) συνορᾶν δὲ πάρεστιν, ὅτι οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων διὰ τῆς ἐνεργείας διαιρέσεως καταίρονται· Ἐν τῷ (§. 186.) δέδεικται προηγουμένως, καὶ τί ἐστι ῥίζα· ἢ $\sqrt{}$ ἐν γένει καὶ τί ταῦτα $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[ν+1]{}$, κτ. σημαίνει.

ἀλλ'

ἀλλ' ἑκάστην δύναμιν (ἢ μᾶλλον πάντα ἐκθέτην τῆς δυνάμεως) νοεῖν ἔχομεν, ὡς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεθ' ἑτέρας ποσότητος προκύψασαν, καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὴν παροῦσαν δύναμιν ἀρθεῖσαν. (§. 192.) ἡ ποσότης δὲ, δι' ἧς εἰς τὴν προκειμένην ὑψώθη δύναμιν, ἣν ἡ ῥίζα· εἰ γὰρ π. χ. α^4 εἰς τὴν γ. ἀρθῆναι προὔκειτο δύναμιν, ἐπολλαπλασιάζετο $\alpha^{4\cdot 3} = \alpha^{12}$. (§. αὐτ.) Εἰ οὖν τὴν τούτου τριπλῆν ῥίζαν λαβεῖν βουλόμεθα, ποιήσομεν τοῦτο διὰ τῆς ἀντικειμένης τῷ πολλαπλ. μεθόδου, τουτ: διὰ τῆς διαιρέσεως. ὥστε ἀναγκαῖον τὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ α^{12} διὰ τοῦ 3 διελεῖν· ὡς $\alpha^{\frac{12}{3}}$. Καὶ τούτου ἐνεργείᾳ διαιρεθέντος, προκύψει α^4, ὃ τῷ ὄντι ἡ $\sqrt[3]{}$ ἐστι τοῦ α^{12}. ὅτι α^4 τρὶς μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθὲν δίδωσιν α^{12}. Εἰδέναι τοίνυν δέον, ὁποία ῥίζα τῆς δυνάμεως ζητεῖται, ὅ ἐστι, τὸν ἐκθέτην (§. 186.) τῆς ῥίζης δεδομένον εἶναι χρή. Ἄλλως γὰρ μυρίας ῥίζας ποιῆσαι δυνάμεθα· π. χ. Ἔστω α^{12}. ἡ $\sqrt[12]{}$ τούτου ἔσται $\alpha^{\frac{12}{12}} = \alpha^1 = \alpha$· τὸ γὰρ α δωδεκάκις μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθὲν δίδωσιν α^{12}. Ἡ $\sqrt[4]{}$ τοῦ α^{12} ἐστιν $\alpha^{\frac{12}{4}}$, ἢ α^3. ἡ $\sqrt[3]{}$ τοῦ $\alpha^{12} = \alpha^{\frac{12}{3}} = \alpha^4$. ἡ $\sqrt[2]{}$ τούτου, ἥτις ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον $\sqrt{}$ ἄνευ ἐκθέτου γράφεται, (§. αὐτ.) $= \alpha^{\frac{12}{2}} = \alpha^6$, κτ. Ὁ οὖν κανὼν τοῦ τὰς ῥίζας τῶν ἐκθετῶν εὑρίσκειν, τὰς εἰς εὕρεσιν προκειμένας, ἐστὶν ὁ ἑξῆς. Δίελε τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως διὰ τοῦ δοθέντος ἐκθέτου τῆς ῥίζης, καὶ τὸ ἐκ τῶν ἐκθετῶν πηλίκον, τὸ διὰ τῆς διαιρέσεως προελθὸν, δείξει σοι τὴν ζητουμένην ῥίζαν. Ἐνθέντοι $\sqrt{\alpha^6} = \alpha^{\frac{6}{2}} = \alpha^3$. Καὶ $\sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha^{\frac{4}{4}} = \alpha$. $\sqrt[2]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{2}}$.

Σημειωτέον, ὅτι τοῦ ἐκθέτου τῆς ῥίζης ὑπὸ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τεθέντος, τὸ ῥιζικὸν σημεῖον $\sqrt{}$ ἐκπίπτει· Ὁ δὲ κανὼν κρατεῖ ἐπὶ πάντων. Καὶ ἐὰν ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς ῥίζης διαιρέσιμος μὴ ᾖ, ὁ ὀρθὸς λόγος διδάσκει οὕτω χωρεῖν ἀναγκαῖον εἶναι. π. χ. $\sqrt[5]{\chi^3} = \chi^{\frac{3}{5}}$. Καὶ $\sqrt[3]{\chi} = \chi^{\frac{1}{3}}$. Ὡσαύτως καὶ εἰ οἱ ἐκθέται εἰσὶ γράμματα, ὡς $\sqrt[\mu]{\chi^{\varrho}} = \chi^{\frac{\varrho}{\mu}}$. $\sqrt[\nu+\iota]{\chi^{\varrho+\mu}} = \chi^{\frac{\varrho+\mu}{\nu+\iota}}$. Τὰ τοιαῦτα τῶν σχημάτων, καίτοι περαιτέρω ἐκτεθῆναι, καὶ ἀναπτυχθῆναι μὴ δυνάμενα, ἔχουσι μέντοι αὐτόθεν τὸ ἐναργὲς, καὶ ἀκριβές.

§. 201. Καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡνωμέναι ἁπαντῶσι ποσότητες, ἐξ ὧν τὴν ῥίζαν ἐξάγειν ἐπιταττόμεθα· Τότε οὖν ἐξάγεται ἡ ῥίζα ἑκάστης ποσότητος, ὡς τοῦ ἐκθέτου αὐτῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ προκύψαντος. π. χ. $\sqrt[3]{\alpha^2\ \chi^4\ \upsilon} = \alpha^{\frac{2}{3}}\chi^{\frac{4}{3}}\upsilon^{\frac{1}{3}}$. Καὶ $\sqrt[3]{\alpha^6\ \chi^9\ \upsilon^3} = \alpha^{\frac{6}{3}}\ \chi^{\frac{9}{3}}\ \upsilon^{\frac{3}{3}} = \alpha^2\ \chi^3\ \upsilon$. ὅτι ἐν τούτῳ τῷ παραδ. ἡ διαίρεσις χωρεῖ· Ἡ $\sqrt{\alpha^4\chi^2\upsilon} = \alpha^{\frac{4}{2}}\chi^{\frac{2}{2}}\ \upsilon^{\frac{1}{2}} = \alpha^2\ \chi\upsilon^{\frac{1}{2}}$. Καὶ $\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}\ \upsilon^{\nu}} = \chi^{\frac{\mu}{\nu}}\ \upsilon^{\frac{\nu}{\nu}} = \chi^{\frac{\mu}{\nu}}\upsilon$: ὅτι $\frac{\nu}{\nu} = 1$.

§. 202. Ὁ τρόπος τοῦ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον παραλείπειν, καὶ ἀντὶ τούτου τὸν ἐκθέτην τοῦ ῥιζικοῦ σημείου ὑπὸ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τιθέναι, καὶ π. χ. ἀντὶ τοῦ $\sqrt{\alpha^4}$, $\alpha^{\frac{4}{2}}$ γράφειν, λίαν ἐν χρήσει, καὶ συντελεῖ τὰ μέγιστα, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς ὀψόμεθα· Τὰς οὕτω γραφομένας ποσότητας, ὁμοειδεῖς οὔσας, καὶ ὁμοειδεῖς ἐκθέτας τῆς ῥίζης ἐχούσας, πολλαπλασιάσομεν,

σομεν, καὶ διαιρήσομεν κατὰ τὰ. (§. §. 191. 194.) Οἷον $a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \mp \frac{1}{2} = a^{\frac{2}{2}}$. Καὶ $υ^{\frac{3}{4}} : υ^{3} = υ^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}$. Ἀλλὰ περὶ τούτων κατωτέρω πλατύτερον.

§. 203. Παραδείγματα διαιρέσεως τῶν δυνάμεων, ἐς τόδε ἀποταμιευθέντα, ὡς τὸν τρόπον τῆς τούτων ἀγνοοῦσι διαιρέσεως.

Δίελε $a^6 + \beta^6$ διὰ τοῦ $a^2 + \beta^2$

$$
\begin{array}{l|l}
(a^2+\beta^2)\ a^6 + \beta^6 & a^4 - a^2\beta^2 + \beta^4 \\
\qquad\quad a^6 + a^4\beta^2 & \\
\hline
\qquad\quad - a^4\beta^2 + \beta^6 & \\
\qquad\quad - a^4\beta^2 - a^2\beta^4 & \\
\hline
\qquad\qquad + a^2\beta^4 + \beta^6 & \\
\qquad\qquad + a^2\beta^4 + \beta^6 &
\end{array}
$$

Καὶ

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 6\gamma^2 - \beta^4\gamma + 4a^2 \\
\hline
30\gamma^4 - 5\beta^4\gamma^3 + 20a^2\gamma^2 - 18a\gamma^2 + 3a\beta^4\gamma - 12a^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (5\gamma^2 - 3a) \\
30\gamma^4 \qquad\qquad\qquad\qquad - 18a\gamma \\
\hline
\quad - 5\beta^4\gamma^3 + 20a^2\gamma^2 \qquad + 3a\beta^4\gamma - 12a^3 \\
\quad - 5\beta^4\gamma^3 \qquad\qquad\quad + 3a\beta^4\gamma \\
\hline
\qquad + 20a^2\gamma^2 \qquad\qquad\qquad - 12a^3 \\
\qquad + 20a^2\gamma^2 \qquad\qquad\qquad - 12a^3
\end{array}
$$

§. 204. Ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων κλάσματα ὦσι, (§. 200.) μεταχειρισθησόμεθα καὶ ταῦτα, ὡς καὶ τὰ λοιπὰ τῶν κλασμάτων· τουτ: ἐὰν καὶ τούτων ἄμφω τοὺς ὅρους μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάσωμεν, ἢ διέλωμεν, τὸ κλάσμα οὐδόλως μεταβάλραβάλλεται· π. χ. $x^{\frac{3}{4}} =$ τῷ $x^{\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}} = x^{\frac{6}{8}}$. Καὶ ἐπεὶ $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$. Τὸ δὲ $= x^{\frac{6}{8}} = \sqrt[8]{x^6}$, (§. αὐτ.) ἔςαι καὶ $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[8]{x^6}$ (§. 48. δ′.) Ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἄμφω οἱ ὅροι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρεθῶσι, τὸ κλάσμα μένει αὖθις ἀμετάβλητον. $x^{\frac{6}{4}} = x^{\frac{6:2}{4:2}} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3}$. Ὥςε $x^{\frac{6}{4}}$, ἢ $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt[2]{x^3}$

Τούτῳ τῷ τρόπῳ δυνάμεις, τὰς κλασματικοὺς ἐχούσας ἐκθέτας, προςιθέναι, ἀφαιρεῖν, πολλαπλάσιαζειν, καὶ διαιρεῖν δυνάμεθα. Ἀλλὰ σημειωτέον, ὅτι ἡ τούτων πρόσθεσις, καὶ ἀφαίρεσις οὐ κατὰ πάντα ὁμοία τῇ τῶν κοινῶν κλασμάτων, ὧν οἱ ἀριθμηταὶ, μετὰ τὸ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομ. ἀναχθῆναι τὰ κλάσματα, προςίθενται, (§. 130.) ἀλλὰ μεταξὺ τῶν δυνάμεων τιθέαμεν μόνον τὸ σημεῖον +, ἢ —, ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομ. ταύτας μείζονος σαφηνείας χάριν, ἀναγκαίας οὔσης ἐνίοτε τῷ ὑπολογισμῷ, ἀνάγοντες. (ἡ γὰρ πρόσθεσις, καὶ ἀφαίρεσις τῶν ἐκθετῶν, ὁ τούτων πολλαπλασιασμός ἐςι, καὶ ἡ διαίρεσις μετ' ἀλλήλων) Οἷον, εἰ δέοι $\sqrt{x^3}$, καὶ $\sqrt[3]{x^4}$ προσθεῖναι, ἔςαι $x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{4}{3}}$. Ἀλλὰ καὶ ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρον. τὰς δύω κλασματικὰς ἀναγαγόντες δυνάμεις μεταχειρισθησόμεθα ταύτας, ὡς καὶ τὰς λοιπάς.

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3}} + x^{\frac{4\cdot 2}{3\cdot 2}} = x^{\frac{9}{6}} + x^{\frac{8}{6}} = \sqrt[6]{x^9} + \sqrt[6]{x^8}.$$

Τὸ δὲ $x^{\frac{9}{6}} + x^{\frac{8}{6}} = x^{\frac{9+8}{6}} = x^{\frac{17}{6}} = \sqrt[6]{x^{17}}$ οὐκ ὀρθόν. Δειχθήσεται δὲ, ὅτι ἐκείνως, καὶ οὐκ ἄλλως χαρητέον.

Καὶ

Καὶ ἐν γράμμασι·

$$\sqrt[\nu]{\upsilon^{\rho}} + \sqrt[\mu]{\upsilon^{\sigma}} = \upsilon^{\frac{\rho}{\nu}} + \upsilon^{\frac{\sigma}{\mu}} = \upsilon^{\frac{\rho\mu}{\nu\mu}} + \upsilon^{\frac{\sigma\nu}{\mu\nu}} = \sqrt[\nu\mu]{\upsilon^{\rho\mu}} + \sqrt[\mu\nu]{\upsilon^{\sigma\nu}}.$$

Ὡσαύτως καὶ εἰ αἱ ποσότητες ἀφαιροῦνται ἀπ' ἀλλήλων. ὡς $\chi^{\frac{3}{2}} - \chi^{\frac{4}{3}} = \chi^{\frac{3.3}{2.3}} - \chi^{\frac{4.2}{3.2}} = \chi^{\frac{9}{6}} - \chi^{\frac{8}{6}} = \sqrt[6]{\chi^{9}} - \sqrt[6]{\chi^{8}}$. Αὖθις $\chi^{\frac{1}{2}} - \chi^{\frac{1}{4}} = \chi^{\frac{1.4}{2.4}} - \chi^{\frac{1.2}{4.2}} = \chi^{\frac{4}{8}} - \chi^{\frac{2}{8}} = \sqrt[8]{\chi^{4}} - \sqrt[8]{\chi^{2}}$. Καὶ ἐν γράμμασι.

$$\chi^{\frac{\nu}{\mu}} - \chi^{\frac{\tau}{\rho}} = \chi^{\frac{\nu\rho}{\mu\rho}} - \chi^{\frac{\tau\mu}{\rho\mu}} = \sqrt[\mu\rho]{\chi^{\nu\rho}} - \sqrt[\rho\mu]{\chi^{\tau\mu}}$$

§. 205. Τὸ οὕτω τὰς δυνάμεις, ὧν οἱ ἐκθέται κλάσματα, μεταβάλλειν, χρησιμώτατον πολλάκις ἐν ὑπολογισμοῖς, ὅτε τὰς δυνάμεις εἰς ἕτερα σχήματα, εἰς πλείω ἀνάπτυξιν, τρέψαι βουλόμεθα· τοῦτο δ' ἀεὶ ἐγχωρεῖ, καὶ τῶν δυνάμεων κλασματικὸν ἐκθέτην μὴ ἐχουσῶν· ὑποτίθεται γὰρ ὁ ἐκθέτης, ὡς κλασματικός, οὗ παρον. ἢ 1. π. $\chi - \alpha^{\mu-1}$ νοηθείη ἂν καὶ οὕτως $\alpha^{\frac{\mu-1}{1}}$. Καὶ τότε, εἰ ἀναγκαῖον, καὶ τὸ κλάσμα ἄλλως γραφήσεται, τῆς ποσότητος ἥκιστα τροπὴν ὑφισαμένης. Οὕτω τὸ $\alpha^{\mu-1} =$ τῷ $\alpha^{\frac{\mu-1}{1}}$. τοῦτο δὲ $= \alpha^{\frac{(\mu-1)\nu}{1.\nu}} = \alpha^{\frac{\mu.\nu-\nu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\nu-\nu}}$.

Καὶ $\alpha^{\frac{1}{\mu}} = \alpha^{\frac{1.\nu}{\mu.\nu}} = \alpha^{\frac{\nu}{\mu\nu}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu}}$. Τὰ τοιαῦτα σχήματα μάλιστα χρήσιμα ἐν ταῖς Ἐξισώσεσι (περὶ ρὶ ὧν μετὰ ταῦτα) Ὅθεν ἐπιμελῶς παντὶ ἑαυτὸν ἀσκητέον·

§ 206. Ὅσα περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δυνάμεων εἴρηται, (§. 191) τῶν ταυτοῤῥίζων, κρατοῦσι καὶ περὶ τῶν κλασματικῶν ἐκθετῶν. ὅτι καὶ οὗτοι, ὡς ἀληθεῖς δυνάμεις, θεωρητέοι· α΄. μέντοι τοὺς ἐκθέτας ἀνακτέον ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ εἶτα προσθετέον τοὺς ἀριθμητὰς, τὸν κοινὸν παρονομ. ὑπογράφοντας, διὰ τὸ §. 130. π. χ. $\chi^{\frac{1}{2}} \cdot \chi^{\frac{2}{5}} = \chi^{\frac{1.5}{2.5}}\,\chi^{\frac{2.2}{5.2}} = \chi^{\frac{5}{10}}\,\chi^{\frac{4}{10}} = \chi^{\frac{5+4}{10}} = \chi^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{\chi^{9}}$. Αὖθις $\chi^{\frac{1}{2}} \cdot \chi^{\frac{\nu}{\mu}} = \chi^{\frac{1.\mu}{2.\mu}} \cdot \chi^{\frac{\nu.2}{\mu.2}} = \chi^{\frac{\mu+2\nu}{2.\mu}} = \sqrt[2\mu]{\chi^{\mu+2\nu}}$.

Πρὸς τούτοις, ὡς εἰδόσιν, ὅπως αἱ τοιαῦται ποσότητες, $\frac{1}{\chi}$, $\frac{1}{\chi^{2}}$, κτ. καὶ ἄλλως ἐκφέρονται, (§. 98.) προκείσθω καὶ τούτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ παραδ. Ὡς $\frac{1}{\sqrt{\chi}} = \frac{1}{\chi^{\frac{1}{2}}} = \chi^{-\frac{1}{2}}$. Τοῦτο πολλαπλ. διὰ τοῦ χ ἔσαι $\chi^{-\frac{1}{2}} \cdot \chi^{1} = \chi^{-\frac{1}{2}} \cdot \chi^{\frac{1}{1}} = \chi^{-\frac{1.1}{2.1}} \cdot \chi^{\frac{1.2}{1.2}} = \chi^{-\frac{1}{2}} \cdot \chi^{\frac{2}{2}} = \chi^{\frac{-1+2}{2}} = \chi^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\chi}$. Ὥστε $\frac{1}{\sqrt{\chi}} \cdot \chi = \sqrt{\chi^{1}} = \sqrt{\chi}$.

Αὖθις, ἐπειδὴ $\frac{1}{\sqrt[4]{\chi^{2}}} = \frac{1}{\chi^{\frac{2}{4}}} = \chi^{-\frac{2}{4}}$. Καὶ $\frac{1}{\sqrt[3]{\chi}} = \frac{1}{\chi^{\frac{1}{3}}} = \chi^{-\frac{1}{3}}$. Ἔσαι καὶ $\frac{1}{\sqrt[4]{\chi^{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\chi}} = \chi^{-\frac{2}{4}} \cdot \chi^{-\frac{1}{3}} = \chi^{-\frac{2.3}{4.3}} \cdot \chi^{-\frac{1.4}{3.4}} = \chi^{-\frac{6}{12}} \cdot \chi^{-\frac{4}{12}}$

$= \chi \ \frac{4}{12}$

$$= \chi^{-\frac{4}{12}-6} = \chi^{-\frac{10}{12}} = \sqrt[12]{\chi^{-10}} = \frac{1}{\sqrt[12]{\chi^{10}}}.$$

Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{\chi} \cdot \frac{3}{\sqrt{\chi^3}} \cdot \frac{1}{\upsilon} = \chi^{\frac{1}{2}} \cdot$

$$3\chi^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\upsilon} = 3\chi^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\upsilon} = 3\chi^{-\frac{2}{2}} \frac{1}{\upsilon}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{\chi^2}} \frac{1}{\upsilon} = \frac{3}{\chi\upsilon}.$$

Προσέτι $\frac{1}{\chi} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{\chi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\chi}}$

$$\chi^4 \cdot \sqrt{\chi^3} = \chi^{-1} \cdot 2\chi^{-\frac{2}{3}} \cdot \chi^{-\frac{1}{2}} \cdot \chi^{\frac{4}{1}} \chi^{\frac{3}{2}}$$

$$= \chi^{-\frac{6}{6}} \cdot 2\chi^{-\frac{4}{6}} \cdot \chi^{-\frac{3}{6}} \cdot \chi^{\frac{24}{6}} \cdot \chi^{\frac{9}{6}} = 2\chi^{-\frac{6}{6}-\frac{4}{6}-\frac{3}{6}+\frac{24}{6}+\frac{9}{6}} = 2\chi^{-\frac{13}{6}+\frac{33}{6}} = 2\chi^{\frac{20}{6}} = 2\chi^{\frac{10}{3}} = 2\sqrt[3]{\chi^{10}}.$$

Καὶ $\frac{1}{\chi^2} \cdot \frac{1}{3\chi^3} \cdot 3\sqrt{\chi^{10}} = \chi^{-2} \cdot \frac{1}{3}\chi^{-3}$.

$$3\chi^{\frac{10}{2}} = \chi^{-\frac{4}{2}} \cdot \frac{1}{3} \chi^{-\frac{6}{2}} \cdot 3\chi^{\frac{10}{2}} \cdot$$

$$= \frac{3\chi^{-\frac{4}{2}-\frac{6}{2}+\frac{10}{2}}}{3} = \frac{3\chi^{-\frac{10}{2}+\frac{10}{2}}}{3} = \frac{3\chi^{0}}{3}$$

$= \frac{3:1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$ Ἀλλὰ περὶ πάντων τούτων πλατύτερον ἐν τῷ περὶ ῥιζικῶν ποσοτήτων.

Καὶ ἕτερον παράδ. ἐν γράμμασι. $\chi^{\frac{\nu}{\mu}} \cdot \chi^{\frac{1}{\rho}}$

$$= \chi^{\frac{\nu\rho}{\rho\mu}} \cdot \chi^{\frac{1\mu}{\rho\mu}} = \chi^{\frac{\nu\rho+\mu}{\rho\mu}} = \sqrt[\rho\mu]{\chi^{\nu\rho+\mu}}.$$

§. 207. Δυνάμεις, ὧν οἱ ἐκθέται κλασματικοί, εἰς ὑπερτέρας ἀνυψώσομεν ἀξίας, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν τῆς κλασματικῆς δυνάμεως μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐμφαίνοντος, εἰς ἡλίκην δύναμιν

μιν ἐξαρθῆναι χρή· π. χ. $\chi^{\frac{3}{2}}$ ἔςω εἰς τὴν β'. ἀρτέον δύναμιν· $= \chi^{\frac{3 \cdot 2}{2}} = \chi^{\frac{6}{2}} = \sqrt{\chi^6}$. Καὶ ἐπειδὴ 6 διαιρεθῆναι δύναται διὰ τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέτου 2, ἐξενεχθείη τὸ $\sqrt{\chi^6}$ ἄμεινον διὰ τοῦ χ^3. Ὁ δὲ λόγος αὐτόθεν δῆλος· ἐπειδὴ γὰρ πολλαπλασιάζειν ἐςὶ τὸ τὴν ποσότητα τοσάκις ἑαυτῇ προςιθέναι, ὅσας μονάδας ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων περιέχει· πρόκειται δὲ τὸ $\chi^{\frac{3}{2}}$ εἰς τὴν β'. ἀρθῆναι δύναμιν· ὁ ἐκθέτης τοσάκις ἑαυτῷ προςεθήσεται, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς, ἤτοι δὶς, ἤτοι $\chi^{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = \chi^{\frac{6}{2}} = \chi^3$, ὅπερ εὐχερέςερον προκύπτει διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ· Οἷον $a^{\frac{1}{3}}$ εἰς τὴν ε'. ἀρθὲν δύναμιν ἔςαι $= a^{\frac{1 \cdot 5}{3}} = a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$. Καὶ $\frac{1}{\sqrt{\chi}}$ ἀρθήτω εἰς τὴν ε'. δύναμιν. Ἐπειδὴ $\frac{1}{\sqrt{\chi}} = \frac{1}{\chi^{\frac{1}{2}}} = \chi^{-\frac{1}{2}}$. τὸ $\chi^{-\frac{1}{2}}$ εἰς τὴν ε'. ἀρθὲν δύν. ἔςαι $= \chi^{\frac{-1 \cdot 5}{2}}$

$$= \chi^{-\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{\chi^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[2]{\chi^5}}$$

Καὶ $u^{\frac{\nu}{\rho}}$ εἰς τὴν μ:ην δύναμιν $= u^{\frac{\nu \cdot \mu}{\rho}} = \sqrt[\rho]{u^{\nu\mu}}$.

§. 208. Τὰς κλασματικοὺς ἐκθέτας ἐχούσας δυνάμεις, δι' ἑτέρων διαιρήσομεν ταὐτοῤῥίζων δυναμεων, τῇ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσει τῶν κατ' αὐτὰς ἐκθετῶν· (§. 194.) Ἀλλὰ τοὺς κλασματικοὺς ἐκθέτας ὑπὸ τὸν αὐτὸν χρὴ ά. παρονομ. ἀνάγειν, καὶ οὕτως ἀφαιρεῖν τὸν ἀριθμητὴν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ. π. χ.

$$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4}} : a^{\frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2}} = a^{\frac{4}{8}} : a^{\frac{2}{8}} = a^{\frac{4-2}{8}} = a^{\frac{2}{8}} = a^{\frac{1}{4}}. \text{ (§. 125.)} = \sqrt[4]{a}$$

Ὡσαύτως $u^{\frac{3}{4}} : u^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}} : u^{\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4}} = u^{\frac{6}{8}} : u^{\frac{4}{8}} = u^{\frac{6-4}{8}} = u^{\frac{2}{8}} = u^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{u}$. Αὖθις

$$u^{\frac{\nu}{\mu}} : u^{\frac{\rho}{\sigma}} = u^{\frac{\nu\sigma}{\mu\sigma}} : u^{\frac{\rho\mu}{\mu\sigma}} = u^{\frac{\nu\sigma - \rho\mu}{\mu\sigma}}$$

$= ^{\rho\mu}$

$= {}^{\sigma\mu}\sqrt{\upsilon^{\nu\sigma - \rho\mu}}$. Καὶ $\upsilon^{\frac{3}{4}} : \upsilon = \upsilon^{\frac{3}{4}} : \upsilon^{\frac{1}{1}}$
$= \upsilon^{\frac{3\cdot 1}{4\cdot 1}} : \upsilon^{\frac{1\cdot 4}{1\cdot 4}} = \upsilon^{\frac{3}{4}} : \upsilon^{\frac{4}{4}} = \upsilon^{\frac{3-4}{4}}$
$= \upsilon^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\upsilon^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\upsilon}}$

§. 209. Ὥσπερ αἱ κλασματικαὶ δυνάμεις τῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ κατ' αὐτὰς ἀριθμητοῦ εἰς ὑπερτέρας δοθείσας δυνάμεις ἐξαίρονται, οὕτως ἐκ τοὐναντίου διὰ τῆς τῶν ἐκθετῶν καταίρονται διαιρέσεως, ἢ, ὅ ταὐτόν ἐστι, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλασμ. ἐκθέτου· (οὕτω γὰρ διαιρεῖται τὸ κλάσμα δι' ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ (§. 146.)) Τοῦτο δὲ καλεῖται, τὴν ῥίζαν ἐκ τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου ἐξάγειν. π. χ. δεῆσαν ἀπὸ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{4}}$ τὴν τριπλῆν ῥίζαν ἐξαχθῆναι, ἔσται $\alpha^{\frac{1}{4}} : 3 = \alpha^{\frac{1}{4\cdot 3}} = \alpha^{\frac{1}{12}}$. Ὅτι δὲ τὸ $\alpha^{\frac{1}{12}}$ ἡ τριπλῆ ἐστι ῥίζα τοῦ $\alpha^{\frac{1}{4}}$, ἢ ὅτι $\frac{1}{4}$ διὰ τοῦ τρὶς πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{12}}$ ἀνέφυ, οὐ χαλεπὸν συνιδεῖν, εἰδόσιν, ὅτι δυνάμεις πολλαπλασιάζειν ἐστὶ τὸ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προστιθέναι, καὶ ὅτι, ἐὰν ὁ ἐκθέτης τοῦ $\alpha^{\frac{1}{12}}$ τρὶς ἑαυτῷ προστεθῇ, ἐξ ἀνάγκης προκύψει τὸ $\alpha^{\frac{1}{4}}$. Ἔστι γὰρ $\alpha^{\frac{1}{12}} \cdot \alpha^{\frac{1}{12}} \cdot \alpha^{\frac{1}{12}} = \alpha^{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}} = \alpha^{\frac{3}{12}} = \alpha^{\frac{1}{4}}$. Αὖθις ἡ 4: πλῆ ῥίζα τοῦ $\chi^{\frac{3}{4}} = \chi^{\frac{3}{4}} : 4 = \chi^{\frac{3}{4\cdot 4}} = \chi^{\frac{3}{16}} = \sqrt[16]{\chi^{3}}$. ἡ μ: πλῆ ῥίζα τοῦ $\chi^{\frac{\rho}{\sigma}} = \chi^{\frac{\rho}{\sigma}} : \mu = \chi^{\frac{\rho}{\sigma\cdot\mu}} = \sqrt[\sigma\mu]{\chi^{\rho}}$.

Σχόλιον.

Τὰς ῥιζικὰς ποσότητας θέλομεν τὰς πραγματευθῇ κατωτέρω ἀκριβέστερον, καὶ ἐναργέστερον, ἰδιαιτέρως· Ἡ τούτων γνῶσις εἶναι ἀπολύτως ἀναγκαία, ὡσὰν ὁποῦ ἀλλέως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καταλάβῃ τινὰς τὰ Μαθηματικὰ συγγράμματα, εἰς τὰ ὁποῖα προϋποτίθε-

ται

ται αὕτη· Ὅθεν ὁ εὐκόλως προχωρῆσαι βουλόμενος ἂς προσέχῃ εἰς τοὺς κανόνας, καὶ παραδείγματα.

Περὶ Λύσεως τῶν κλασμάτων εἰς Ἀπείρους Σειράς.

§. 210. Ἕκαςον κλάσμα οὐ μόνον γράφοντες, ἀλλὰ καὶ διὰ σειρᾶς ὅρων παραςῆσαι δυνάμεθα, ἧς τὸ πέρας, ἐφ' ὅσον ἂν βούλῃ, τοῦ ὑπολογισμοῦ προαγομένου, οὐχ εὑρίσκεται· καὶ τοῦτό ἐςιν, ὃ Ἄπειρος Σειρὰ καλεῖται· ἔνθα μᾶλλον, καὶ μᾶλλον τῇ ἀληθείᾳ προσεγγίζουσι, πάντη αὐτῆς ἐφικέσθαι οὐχ οἷόν τε· ἡ δὲ τούτων χρῆσις ἐπίσημος, ὡς κατωτέρω δειχθήσεται.

§. 211. Πᾶς ἀριθμὸς τῆς 1 μείζων, οὐ μόνον ὡς τῇ προσθέσει δύω ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν προκύψας, ἔχει θεωρηθῆναι, ἀλλὰ καὶ δυσὶν ἀριθμοῖς τοῦτον ἔνι παραςῆσαι· π. χ. τὸν 3 παραςήσομεν ὡς ἐκ $2+1$, καὶ τὸν 5 ὡς ἐκ $3+2$, ἢ ἐκ $4+1$ συγκείμενον· Ἀλλὰ τοὺς αὐτοὺς καὶ ὡς διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπ' ἀλλήλων δύω ποσοτήτων ἀναφυέντας ἂν θεωρήσαιμεν. Οἷον τὸν 3 ἐκ τοῦ $5-2$, καὶ τὸν 5 ἐκ τοῦ $6-1$, ἢ καὶ καθ' ὁντιναοῦν ἕτερον τρόπον. Ὥςε κλάσμα δι' ἀπείρου σειρᾶς παραςῆσαι βουλόμενος ἀπόδος τὸν παρον. διὰ ποσότητος, ἐκ β΄. μερῶν συνιςαμένης, ἤτοι τῷ τῆς προσθέσεως, ἢ τῷ τῆς ἀφαιρέσεως συνημμένων σημείῳ. Ὡς $\frac{2}{3}$ παράςησον διὰ $\frac{2}{2+1}$, ἢ $\frac{2}{4-1}$. καὶ ἐνεργείᾳ διαιρῶν εὑρήσεις πηλίκον τὴν ἄπειρον σειράν. Ἵνα δὲ τοῦτο ἐν γένει δηλωθῇ, παραληπτέον ἐπ' ἀμφοῖν τῶν τρόπων ἀλγεβραϊκὸν κλάσμα, ὡς διὰ τούτου ἁπάντων τῶν κλασμάτων σημαινομένων. Γράψον οὖν κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, καὶ τὸ μὲν α παριςάτω πάντα ἀριθμὸν, καὶ αὐτὴν τὴν 1, τὸ δὲ $\beta+\gamma$ ὡσαύτως οἱουσοῦν δύω ἀριθμοὺς, μείζους τῆς 1, ἅμα ληφθέντας· π. χ. ἐν τῷ κλ. $\frac{5}{8}$. α ἔςαι $=5$. καὶ ἐὰν