(§. 174.) Οἷον $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$ = τῷ κύβῳ τοῦ $1\frac{1}{2}$ κτ.

§. 181. Ἐπειδὴ τοῦ ἀριθμοῦ α ὁ κύβος = ααα, καὶ ὁ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ αβ ἔςαι αααβββ· Ἐὰν οὖν ὁ ἀριθμὸς δύω, ἢ πλείους παράγοντας ἔχῃ, εὑρίσκεται ὁ κύβος τῷ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασμῷ τῶν κυβικῶν ἀριθμῶν ἁπάντων τῶν παραγόντων· ὡς 12 = 3 . 4. πολλαπλασίασον τὸν κύβον τοῦ 3 = 27 μετὰ τοῦ κύβου τοῦ 4 = 64, καὶ ἕξεις 1728 τὸν κύβον τοῦ 12.

§. 182. Ὁ κύβος ἀριθμοῦ θετικοῦ + α ἔςαι, ἢ δῆλον, καταφατικός· + ααα· τοῦ ἀποφατικοῦ δὲ — α, ἔςαι ἀποφατικός· καὶ γὰρ — α × — α = + αα. (§. 77 καν.) + αα × — α = — ααα (§. αὐτ.) Ὥςε ὁ κύβος τῆς — 1 ἐςὶ — 1· τοῦ — 2 = — 8, κτ.

Περὶ τῶν Δυνάμεων ἐν γένει.

§. 183. Ἐὰν ποσότης τις (εἴτε ἀριθμὸς, εἴτε γράμμα) ἅπαξ, ἢ πολλάκις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῇ, τὸ παραγόμενον καλεῖται, Δύναμις, ἢ Ἀξία· Ἐπεὶ δὲ ὁ τετράγωνος (§. 171.) γεννᾶται, ἐὰν ἀριθμός τις ἅπαξ μεθ' ἑαυτοῦ, ὁ δὲ κύβος, (§. 178.) ἐὰν ὁ τετράγωνος ἐπὶ τὴν ῥίζαν (§. 171.) πολλαπλασιασθῇ, καὶ οἱ τετράγωνοι, καὶ οἱ κύβοι περιλαμβάνονται ὑπὸ τῷ ὀνόματι τῶν Ἀξιῶν, ἢ Δυνάμεων.

§. 184. Αἱ δυνάμεις (§. ἀν.) διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων τῇ πληθύϊ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ποσότητος μεθ' ἑαυτῆς· ὥςε α' δύναμις ἀκούει πᾶσα ποσότης, ἣν μονάδι μόνον πολλαπλασιασθεῖσαν νοοῦμεν· ὡς 1, 2, 3, 4, κτ· ἢ α, β, γ, δ κτ. δὶς δ' ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, τὸ παραγόμενον καλεῖται, ἡ β' ταύτης δύναμις, ἢ ἀξία, ἰσοδυναδυναμοῦσα τῷ τετραγώνῳ· (§. 171.) ὡς $2 \times 2 = 4$. $3 \times 3 = 9$. ἢ $\alpha \times \alpha = \alpha\alpha$· $\beta \times \beta = \beta\beta$, κτ· Ἔνθα 4 ἡ β´ ἐςὶ δύναμις τοῦ 2. 9 τοῦ 3. αα τοῦ α· καὶ ββ τοῦ β· τρὶς δὲ, ἡ γ´ δύναμις, τὴν αὐτὴν τῷ κύβῳ δύναμιν ἔχουσα· ὡς $2 \times 2 \times 2 = 8$· $3 \times 3 \times 3 = 27$· Καὶ $\alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha\alpha\alpha$, κτ· τετράκις δὲ, ἡ δ´ δύναμις, ἢ ὁ Διτετράγωνος· οἷον, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$· Καὶ $\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha\alpha\alpha\alpha$· Ἐξ οὗ δῆλον, καὶ τίς ἡ ε´ καὶ ς´ κτ· δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ·

§. 185. Οὗτος ὁ τρόπος τοῦ τὰς δυνάμεις ἀριθμοῦ τινος ἐκφέρειν, καὶ μάλιςα τὰς ὑπερτέρας, ὡς πάνυ διεξοδικὸς, παραλιμπάνεται· Ἐὰν γὰρ θῶμεν τὴν ἑκατοςὴν δύναμιν τοῦ α ζητεῖσθαι, κατὰ τὰ εἰρημένα, γραπτέον τὸ α ἑκατοντάκις ἐφεξῆς· Εἰς ἀποφυγὴν μέντοι τούτου, εἰώθασι τῇ ποσότητι πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτῆρα ἐπιγράφειν, ἐμφαίνοντα, ποσάκις ἡ ποσότης μεθ᾽ ἑαυτῆς πολλαπλασιαςέα· καλεῖται δ᾽ Ἐκθέτης, ἢ τὸ Ἐπίσημον τῆς δυνάμεως· Οἷον, α^{100}. Ἐνταῦθα 100 ἐςὶν ὁ ἐκθέτης τοῦ α· Ἀπαγγέλλεται δὲ, α εἰς τὴν ἑκατοςὴν ἀρθὲν δύναμιν, ἢ α πολλαπλασιαςέον μεθ᾽ ἑαυτοῦ ἑκατοντάκις· καὶ 4^6. 6 ἐςὶν ὁ ἐκθέτης τοῦ 4. τοῦτο δὲ, ἤτοι τὸ $4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$· Ἐὰν ἡ ποσότης ἐν τῇ α´ ᾖ δυνάμει, καίτοι τὴν μονάδα, ὡς ἐκθέτην, ἐπιγραφῆναι δέον· π. χ. α^1, οὐκ ἔςι μέντοι τοῦτο ἐν χρήσει, ἀλλὰ τὸ α· Ὡσαύτως καὶ 5 ἐςὶν $= 5^1$, κτ.

§. 186. Ἡ ποσότης, ἐξ ἧς ἡ δύναμις ἀνέφυ διὰ τοῦ ἅπαξ, ἢ πολλάκις πολλαπλασιασμοῦ μεθ᾽ ἑαυτῆς, καλεῖται Ῥίζα, ἥτις τῷδε √ τῷ σημείῳ ἐκδηλοῦται· ἐφ᾽ ἧς αὖθις ἀριθμὸς γράφεται, (Ἐκθέτης τῆς ῥίζης καλούμενος) σημαίνων, ποσάκις [τὴν] προκειμένην ποσότητα μεθ᾽ ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῆναι

ναι ἔδει, μέχρις ἂν τοιαύτη ζητουμένη δύναμις προέλθῃ, οἵα ἐςίν, ἧς τὸ $\sqrt{}$ σημεῖον προτέθειται, ἢ ἡλίκη ἐςὶν ἡ ῥίζα, περὶ ἧς ὁ λόγος· Ἡ ῥίζα τῆς β′ δυνάμεως ἀκούει Τετραγωνικὴ, οὕτω γραφομένη $\sqrt{}$, ἢ καὶ οὕτω $\sqrt[2]{}$· ἡ δὲ τῆς γ′ Κυβικὴ, οὕτως ἀποδιδομένη $\sqrt[3]{}$· ἡ δὲ τῆς δ′ ε′ ς′ κτ. δυνάμεως ῥίζα, οὕτω $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$, κτ. π. χ. $α^2$ ἐςὶν ἡ β′. δύν. τοῦ α. τὸ δὲ α ἡ ῥίζα· δηλωθήσεται οὖν $\sqrt[2]{α^2} = α$· α. γὰρ τὸ α ἤρθη εἰς τὴν β′. δύν. εἶτα ἐκ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐλήφθη ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνική· Καὶ $\sqrt[3]{α^3} = α$, κτ.

§. 187. Ἀλλὰ καὶ ἐν γένει, ἡλίκην ἂν δύναμιν παραςῆσαι βουλώμεθα, ἀντὶ τοῦ ἐκθέτου, τοῦ δι' ἀριθμοῦ δηλουμένου, ἀλγεβραϊκῇ ποσότητι, ἤτοι γράμματι, χρησόμεθα. ὡς $α^ρ$, $χ^ν$ ποσότητες εἰσὶν ἀόριςοι εἰς ἀορίςους ἠρμέναι δυνάμεις· Εὑρίσκομεν δὲ καὶ ποσότητας ἐν τοιαύταις δυνάμεσι. π. χ. $χ^{ν+μ}$, ἢ $υ^{ν-μ}$. ἢ $α^{ν+2}$, ἢ $α^{ρ+2}$, ἢ καὶ $α^{ν-ρ}$, ἢ $α^{ν-3}$ κτ· Ἐντεῦθεν φανερὸν, ὅτι καὶ ἡ ῥίζα τῆς τῷ ἐπ' αὐτὴν καθόλου ἐκθέτῃ ἐπισημειουμένης ποσότητος, (ἥτις ποσ. ἀνέφυ τῷ τοσάκις πολλαπλασιασμῷ τῆς ῥίζης μεθ' ἑαυτῆς, ὁσάκις δεικνύει ὁ ἀόριςος ἐκθέτης, μετὰ τὸ διορισθῆναι) ἐπισημειωθήσεται ὡσαύτως τῷ αὐτῷ ἀορίςῳ ἐκθέτῃ· ὡς $\sqrt[ν]{α^ν} = α$· ἢ πολλαπλασιασθήτω ἡ ποσότης α, ν: κις, ἵνα προκύψῃ ἡ δύναμις $α^ν$, ἧς τὸ α ἐςὶν ἡ ν ῥίζα, ὅ, τι ἂν σημαίνῃ τὸ ν·

§. 188. Αἱ δυνάμεις ἑκάςου παραγομένου,

οἷον τοῦ $\alpha\beta$, εὑρίσκονται, ἐὰν ἑκατέρου παράγοντος ἡ δύναμις χωρὶς λαμβάνηται· τουτ: $\alpha\beta$, ἢ $\alpha^1\beta^1$, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^3\beta^3$, $\alpha^4\beta^4$, $\alpha^5\beta^5$, κτ. Ὡσαύτως καὶ αἱ τῶν κλασμάτων· οἷον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ δυνάμεις εἰσὶν αἱ ἑξῆς·

$$\frac{\alpha^1}{\beta^1},\ \frac{\alpha^2}{\beta^2},\ \frac{\alpha^3}{\beta^3},\ \frac{\alpha^4}{\beta^4},\ \frac{\alpha^5}{\beta^5}\ \text{κτ·}$$

§. 189. Τοῦ ἀποφατικοῦ ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ $-\alpha$, αἱ δυνάμεις ἕψονται ἀλλήλαις κατὰ τάξιν οὕτω. $-\alpha,\ +\alpha^2,\ -\alpha^3,\ +\alpha^4,\ -\alpha^5,\ +\alpha^6$ κτ· (§ 77.) τουτέςιν, αἱ δυνάμεις, ὧν οἱ ἐκθέται περιττοὶ ἀριθμοὶ, γίνονται ἀποφατικαί. ὧν δὲ ἄρτιοι, καταφατικαί. ὥςε ἡ γ΄. ε΄. ζ΄. θ΄. κτ. δύναμις τῶν ἀποφατικῶν ῥιζῶν ἕξει τὸ $-$ σημεῖον· ἡ δὲ β΄. δ΄. ς΄. η΄. κτ· τὸ $+$.

Ἡ μέθοδος τοῦ τὰ δ΄. εἴδη τοῦ ὑπολογισμοῦ μετὰ ποσοτήτων, διαφόρους ἐκθέτας τῆς δυνάμεως, καὶ ῥίζης ἐχουσιῶν, ὑπολογιςεύειν, καλεῖται ὁ μετὰ ἐκθετῶν ὑπολογισμός.

Περὶ τῆς τούτων Προσθέσεως, καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 190. Τὴν τῶν ποσοτήτων, τῶν εἰς δυνάμεις ἀρθεισῶν, Πρόσθεσιν, καὶ ἀπ᾿ ἀλλήλων Ἀφαίρεσιν, καθ᾿ ὃν ἐδιδάχθημεν τρόπον, ἐν τῷ περὶ Προσθ. καὶ Ἀφαιρ. τῶν ὁλοσχ. περανοῦμεν. Εἰ μὲν γὰρ ὁμοειδεῖς, ἢ ὁμόῤῥιζοι, τουτ: εἰ αἱ αὐταὶ ῥίζαι, καὶ οἱ αὐτοὶ ἐκθέται, προςίθενται, καὶ ἀφαιροῦνται, ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ ὁμοειδεῖς ποσότητες. π. χ. εἰ δέοι προσθεῖναι $2\alpha^2$ τῷ $3\alpha^2$, (ἔνθα καὶ ῥίζαι, καὶ ἐκθέται τὰ αὐτὰ) ἔςαι $2\alpha^2 + 3\alpha^2 = 5\alpha^2$. Καὶ $3\alpha^2\chi^3$ τῷ

$5\alpha^2$

$5\alpha^2\chi^3$, ἔςαι $8\alpha^2$ $2\chi^3$. Καὶ $+4\chi^3\upsilon^2$ τῷ $-2\chi^3\upsilon^2$, (τοῦτο δ' ἐςιν ἐναντία προςιθέναι) ἔςαι $2\chi^3\upsilon^2$.

Ἐςὼ ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ $4\alpha^2$ τὸ $+2\alpha^2$. Ἡ διαφορὰ ἔςαι $2\alpha^2$. (§. 49.) Ἀπὸ τοῦ $4\alpha^\nu\chi^\mu$ τὸ $+\alpha^\nu\chi^\mu$. ἡ διαφ. $=+3\alpha^\nu\chi^\mu$. Καὶ ἀπὸ τοῦ $4\alpha^\nu\chi^\mu$ τὸ $-3\alpha^\nu\chi^\mu$ ἀφαιρεθὲν παρέξει διαφ. τὸ $+7\alpha^\nu\chi^\mu$.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Καὶ ἕτερον παρ.} & \alpha^{2\nu+1}\upsilon-3\chi^{3-\mu}+5\upsilon^{\varrho+1}-18 \\
\text{πρόσθες} & \underline{-5\alpha^{2\nu+1}\upsilon+6\chi^{3-\mu}+3\upsilon^{\varrho+1}+14} \\
 & -4\alpha^{2\nu+1}\upsilon+3\chi^{3-\mu}+8\upsilon^{\varrho+1}-4.
\end{array}
$$

Εἰ δὲ μὴ ὁμοειδεῖς εἶεν αἱ ποσότητες, αἱ εἰς δυνάμεις γεγονυῖαι, καὶ προσεθῆναι, ἢ ἀφαιρεθῆναι πρόκεινται, δείκνυται μόνον τοῦτο τοῖς σημείοις τῆς προσθ. (§. 16.) καὶ ἀφαιρ. (§. 28.) π. χ. τῷ χ^3 προσεθὲν τὸ υ^2 ἔςαι $\chi^3+\upsilon^2$. Τῷ $\chi^\nu\alpha^\mu$ τὸ υ^ϱ, ἔςαι $\chi^\nu\alpha^\mu+\upsilon^\varrho$. Ὡσαύτως καὶ ἀπὸ τοῦ χ^3 ἀφαιρεθὲν τὸ υ^3 ἔςαι $\chi^3-\upsilon^3$. Καὶ ἀπὸ τοῦ χ^ν τὸ $\upsilon^{\mu+\varrho}$, ἔςαι $\chi^\nu-\upsilon^{\mu+\varrho}$.

Περὶ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τούτων.

§. 191. Ἐὰν αἱ ποσότητες, αἱ εἰς δυνάμεις ἀρθεῖσαι, ὁμοειδεῖς ὦσι, πολλαπλασιασθήσονται αἱ δυνάμεις μετ' ἀλλήλων, ἐὰν οἱ τούτων ἐκθέται προσιθῶνται ἀλλήλοις.

 Ὁμοει-

Ὁμοειδεῖς δὲ, ἢ Ὁμοβάθμιοι δυνάμεις εἰσὶν αἱ δυνάμεις, αἷς τὰ αὐτὰ πρόσεσι γράμματα· π. χ. $\alpha^2 . \alpha^3 = \alpha^{2+3} = \alpha^5$. α^2 καὶ α^3 εἰσὶν ὁμοειδεῖς δυνάμεις τοῦ α, ὅτι καὶ τὸ α^2, καὶ τὸ α^3 εἰσὶ τὰ αὐτὰ γράμματα, διαφόρους μόνον ἐκθέτας ἔχοντα· Εἰς σαφεστέραν τούτου κατάληψιν ἀναπτυχθήτω τὸ παράδειγμα· α^2 ἐστὶν $= \alpha\alpha$· Καὶ $\alpha^3 = \alpha\alpha\alpha$· ὥστε $\alpha^2 . \alpha^3 = \alpha\alpha . \alpha\alpha\alpha$. Ἀλλ' ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔξεστι τὰ γράμματα ἐφεξῆς γράφειν καὶ ἄνευ τοῦ σημείου (§. 70.) Ὅθεν $\alpha\alpha . \alpha\alpha\alpha = \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$· τοῦτο δ' ἐστιν α^5. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ α^5 προκύπτει καὶ τῇ προσαθροίσει τῶν ἐκθετῶν τοῦ α^2 καὶ α^3.

Οὕτω καὶ $\chi^3 . \chi^4 = \chi^{3+4} = \chi^7$. Ἔστι γὰρ $\chi^3 = \chi\chi\chi$· Καὶ $\chi^4 = \chi\chi\chi\chi$· ἴσον ἀντὶ ἴσου τεθὲν ἔσται

$\chi^3 . \chi^4 = \chi\chi\chi . \chi\chi\chi\chi$. τοῦτο δὲ ἐστὶ

$\chi\chi\chi\chi\chi\chi\chi = \chi^7$. Ἄρα

$\chi^3 . \chi^4 = \chi^{3+4} = \chi^7$.

Οὕτω ποιήσομεν, καὶ εἰ πλείω γράμματα, ἢ ἀριθμοὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰσὶ συνημμένα. οἷον $\chi^2 \upsilon^2 . \chi^3 \upsilon^4 = \chi^{2+3} \upsilon^{2+4}$. Καὶ ἐνεργείᾳ τῶν ἐκθετῶν προστεθέντων $= \chi^5 \upsilon^6$. Ὡσαύτως καὶ $\chi^3 \upsilon . \chi\upsilon = \chi^3 \upsilon^1 . \chi^1 \upsilon^1 = \chi^{3+1} \upsilon^{1+1} = \chi^4 \upsilon^2$. Καὶ ἐν ἀριθμοῖς, $2^4 . 6^5 . 2^3 . 6^2 = 2^{4+3}\, 6^{5+2} = 2^7\, 6^7$. Ἐὰν δὲ αἱ ποσότητες μὴ ὁμοειδεῖς ὦσι, παρατίθενται μόνον ἀλλήλαις, ὡς τῶν κατὰ ταύτας ἐκθετῶν προστεθῆναι μὴ ἐχόντων· π. χ. εἰ πρόκειται υ^3 μετὰ τοῦ χ^4 πολλαπλασιάσαι, γράψο-

γράψομεν $\upsilon^3 \chi^4$. εἰ γὰρ ἀναπτυχθῇ, ἔσται υυυχχχχ $= \upsilon^3 \chi^4$.

Ἐὰν οἱ ἐκθέται ἀλγεβρ. ἀριθμοὶ, (γράμ.) αἱ δὲ ποσότητες, αἷς αἱ δυνάμεις ἀνήκουσιν, ὁμοειδεῖς ὦσι, συνάπτονται οἱ ἐκθέται διὰ τοῦ σημείου $+$. π. χ. $\alpha^\rho \alpha^\mu = \alpha^{\rho+\mu}$. Καὶ $\upsilon^\rho \chi^\mu . \upsilon^4 \chi^\beta = \upsilon^{\rho+4} \chi^{\mu+\beta}$. Ἄλλως γὰρ οὐκ ἂν προσαθροισθεῖεν, διὰ τὸ τοὺς ἐκθέτας γενικὰς εἶναι ποσότητας, τουτ: ἀορίστους, εἰς ὧν τὸν διορισμὸν πᾶς ἀριθμὸς τεθῆναι δύναται· Εἰ δ' αἱ ποσότητες, αἱ εἰς δυνάμεις ἀρθεῖσαι, καὶ πολλαπλασιασθῆναι προκείμεναι, μὴ ὁμοειδεῖς εἶεν, παρατίθενται ἀλλήλαις, ὡς ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. (§. αὐτ.) οἷον

$\chi^\rho . \upsilon^\nu = \chi^\rho \upsilon^\mu$. Καὶ $\chi^{\rho+\nu} . \alpha^{\mu+1}$ $= \chi^{\rho+\nu} \alpha^{\mu+1}$.

Προκείσθω καὶ ἕτερα παραδείγματα, πᾶσι τοῖς ῥηθεῖσι τρόποις τοῦ τῶν δυνάμεων πολλαπλασιασμοῦ μετ' ἀλλήλων ἁρμόζοντα.

Πολλαπλασίασον $\alpha \upsilon^3 \chi^4$ μετὰ τοῦ $\upsilon \chi$· τουτέστιν $= \alpha \upsilon^3 \chi^4 . \chi^1 \upsilon^1 = \alpha \upsilon^{3+1} \chi^{4+1}$ $= \alpha \upsilon^4 \chi^5$.

$\chi^2 \upsilon^2 \alpha^4$ μετὰ τοῦ $\alpha^3 \chi \upsilon^3 \beta = \chi^{2+1}$ $\upsilon^{2+3} \alpha^{4+3} \beta = \chi^3 \upsilon^5 \alpha^7 \beta$.

α^μ μετὰ τοῦ $\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$. Καὶ $\alpha^{\mu+1}$ μετὰ τοῦ $\alpha^\mu = \alpha^{\mu+\mu+1} = \alpha^{2\mu+1}$.

$\chi^{\mu-2} \upsilon^\rho$ μετὰ τοῦ $\chi^\nu \upsilon^{\rho-1} = \chi^{\mu+\nu-2}$ $\upsilon^{\rho+\rho-1} = \chi^{\mu+\nu-2} \upsilon^{2\rho-1}$.

$$\chi^{\rho+\mu}\ \upsilon^{\nu}\ \text{μετὰ τοῦ}\ \beta^{\nu}\ \delta^{\chi} = \chi^{\rho+\mu}\ \upsilon^{\nu}\ \beta^{\nu}\ \delta^{\chi}.$$

Καὶ $\alpha^{\nu+1}\ \chi^{3\nu+1}\ \upsilon^{\nu+1} .\ \alpha^{-\nu}\ \chi^{-3\nu}\ \upsilon^{-\nu}$
$= \alpha^{\nu+1-\nu}\ \chi^{3\nu+1-3\nu}\ \upsilon^{\nu+1-\nu} = \alpha^{1}\chi^{1}\upsilon^{1}$
$= \alpha\,\chi\,\upsilon.$

Καὶ μείζω τούτων παραδείγματα κατὰ τοὺς αὐτοὺς κανόνας μεταχειρισθησόμεθα· οἷον, εἰ δέοι $\pi\chi + \alpha\chi^2 - \alpha^2$ πολλαπλασιάσαι μετὰ τοῦ $\chi^2 + \alpha^2$, ὁ κανὼν ὁ ἀνωτ. καταλλήλως κἀνταῦθα προσαρμοσθήσεται. ἐκκείσεται οὖν τὸ παράδ. οὕτω·

$$\begin{array}{r} \pi\chi + \alpha\chi^2 - \alpha^2 \\ \chi^2 + \alpha^2 \\ \hline + \alpha^2\pi\chi + \alpha^3\chi^2 - \alpha^4 \\ \pi\chi^3 + \alpha\chi^4 - \alpha^2\chi^2 \\ \hline \pi\chi^3 + \alpha^2\pi\chi + \alpha\chi^4 + \alpha^3\chi^2 - \alpha^2\chi^2 - \alpha^4. \end{array}$$

Ἐὰν γὰρ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀπὸ τοῦ $+\alpha^2$ μετὰ τοῦ $-\alpha^2$ ἀρξώμεθα, δῆλον ὅτι, κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα τοῦ τὰς ὁμοειδεῖς δυνάμεις τῇ προσθέσει τῶν ἐκθετῶν πολλαπλασιάζεσθαι, $-\alpha^4$ προκύψει· (§. 77.) Ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ τοῦ πολλαπλασιαςέου ἔςιν αὖθις ἓν α, ἤτοι ἐν τῷ $\alpha\chi^2$. Τοῦτο πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ α^2 ἔςαι $\alpha\chi^2\alpha^2$. Ἀλλ' ἐνταῦθα τὸ α καὶ α^2 καὶ ἐνεργείᾳ πολλαπλασιάσαι οἷόν τε, τῇ τῶν κατ' αὐτὰ ἐκθετῶν προσθέσει καὶ προκύψει $\alpha^3\ \chi^2$. Ὅτι α, ἢ α^1 δύναται τὸ αὐτό· (§. 185.) κτ' Ἀλλὰ καὶ ἐν γένει, εἴπου ἐγχωρεῖ, τοῦ κανόνος οὐκ ἀμελητέον.

$$\pi.\chi. \qquad \alpha^{\rho}\pi^{\mu} - \beta\chi^{\nu} + \alpha\chi^{2\nu}$$

$$\alpha^{\nu} \qquad \chi^{\mu}$$

$$-\alpha^{\rho}\pi^{\mu}\chi^{\mu} + \beta\chi^{\nu+\mu} - \alpha\chi^{2\nu+\mu}$$

$$+\alpha^{\rho+\nu}\pi^{\mu} - \alpha^{\nu}\beta\chi^{\nu} + \alpha^{\nu+1}\chi^{2\nu}$$

$$\alpha^{\rho+\nu}\pi^{\mu} - \alpha^{\nu}\beta\chi^{\nu} - \alpha^{\rho}\pi^{\mu}\chi^{\mu} + \alpha^{\nu+1}\chi^{2\nu} + \beta\chi^{\nu+\mu} - \alpha\chi^{2\nu+\mu}.$$

Ἐπὶ γὰρ τοῦ ἐσχάτου ὅρου $+\alpha\chi^{2\nu}$ μετὰ τοῦ $-\chi^{\mu}$ πολλαπλασιασθέντος, προσίθεμεν ἀλλήλοις τοὺς ἐκθέτας τοῦ πολλαπλασιαςέου, καὶ πολλαπλασιαςοῦ. τὸ δὲ σημεῖον ἔςαι $-$. (§. 177.) Ὥςε μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν, οὗτος ὁ ὅρος ἔςαι $-\alpha\chi^{2\nu+\mu}$. Οὕτω καὶ τοὺς ἑτέρους ὅρους μετὰ προσοχῆς παρατηροῦσιν, εἰ μόνον τῶν προηγηθέντων ἐν συνέσει ἐγενόμεθα, οὐδεμία δυσχέρεια ἡμῖν ἀπαντήσει.

Σχόλιον.

Σημείωσαι, ὅτι ἡ πρόσθεσις τῶν δυνάμεων δὲν πρέπει νὰ συγχέηται μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δυνάμεων. ὅθεν διὰ μνήμης ἔχε ἀεὶ τὸν κανόνα, ὅτι δυνάμεις πολλαπλασιάζειν ἐςὶ τὸ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προσιθέναι·

§. 192. Καὶ ἐνεργείᾳ δυνάμεις εἰς ἄλλας ἔτι ὑπερτέρας δυνάμεις διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κατ' αὐτὰς ἐκθετῶν ἀνυψῶσαι δυνάμεθα· π. χ. εἰ τὸ προκείμενον α^{2} (ὅ ἐςι β'. δύν. τοῦ α) εἰς τὴν β'. ἐξᾶραι βούλει δύναμιν, πολλαπλασιάσας τὸν ἐκθέτην τοῦ α^{2} διὰ τοῦ 2, ἕξεις τὴν β'. δύν: τοῦ α^{2}. Οἷον $\alpha^{2.2} = \alpha^{4}$. Εἰ δὲ εἰς τὴν γ', διὰ τοῦ

3.

3, καὶ ἔςαι ἡ γʹ. δύν. τοῦ $\alpha^2 = \alpha^{2\cdot 3} = \alpha^6$. Ἔνθεντοι αἱ δοθεῖσαι δυνάμεις ἀρθήσονται εἰς ὑπερτέρας, ἐὰν τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας τῷ ἀριθμῷ πολλαπλασιάσωμεν, τῷ τὴν δύναμιν ἐμφαίνοντι, εἰς ἣν ταύτας ἐξᾶραι βουλόμεθα. Ὁ δὲ λόγος δῆλος ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγμ. Εἰ δέοι α^2 εἰς τὴν γʹ. δύναμιν ἐξᾶραι, ποιήσομεν τοῦτο, εἰ α^2 τρὶς μεθ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθῇ, ὅπερ ἂν εἴη $\alpha^2 . \alpha^2 . \alpha^2$. Δυνάμεις δὲ πολλαπλασιάζειν ἐςὶ τοὺς αὐτῶν ἐκθέτας προςιθέναι. Ὥςε $\alpha^2 . \alpha^2 . \alpha^2$ ἔςαι $= \alpha^{2+2+2} = \alpha^6$. ἀλλὰ τούτου συντομώτερον ἐφικοίμεθα, εἰ, ἀντὶ τοῦ τὸν ἐκθέτην 2 τρὶς ἑαυτῷ προςεθῆναι, μετὰ 3 πολλαπλασιάσαιμεν ὅπερ ἴσα δύναται τῇ τριττῇ προσθέσει τοῦ 2, καὶ οὕτως ἄρεται α^2 εἰς τὴν γʹ. δύν. Αὖθις α^4 εἰς τὴν εʹ. δύν ἀρθὲν ἔςαι $\alpha^4 . \alpha^4 . \alpha^4 . \alpha^4 . \alpha^4$. ἢ $\alpha^{4+4+4+4+4} = \alpha^{20}$. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ α^{20} προκύψει, εἰ τὸν ἐκθέτην 4 μετὰ τοῦ 5 πολλαπλασιάσομεν. Ἔςαι γὰρ $\alpha^{4\cdot 5} = \alpha^{20}$. Οὕτω καὶ $\alpha^6\ \upsilon^4$ εἰς τὴν γʹ. ἀρθὲν δύν. ἔςαι $\alpha^{6\cdot 3}\ \upsilon^{4\cdot 3} = \alpha^{18}\ \upsilon^{12}$. Καὶ ἐν γένει· Ἔςω α^{ν} εἰς τὴν γʹ. ἀρτέον δύναμιν. Ἔςαι οὖν $\alpha^{\nu\cdot 3}$, ἢ $\alpha^{3\nu}$. Καὶ $\alpha^{\varrho}\ \upsilon^{\chi}$ εἰς τὴν εʹ. $= \alpha^{5\varrho}\ \upsilon^{5\chi}$. Καὶ $\alpha^{\varrho+1}\ \upsilon^{2\varrho}$ εἰς τὴν δʹ. $= \alpha^{(\varrho+1)4}\ \upsilon^{(2\varrho)4} = \alpha^{4\varrho+4}\ \upsilon^{8\varrho}$. Ὡσαύτως καὶ εἰ ἡ δοθεῖσα γενικὴ δύναμις εἰς ἑτέραν δοθεῖσαν γενικὴν δύναμιν ἐξαρτέα. Οἷον υ^{χ} εἰς τὴν μ δύν. ἀρθὲν ἔςαι $\upsilon^{\chi\cdot\mu}$. Καὶ $\alpha^{\nu+1}$ εἰς τὴν μ δύν. $= \alpha^{(\nu+1)\mu}$, ἢ $\alpha^{\nu\mu+\mu}$.

§. 193. Πολλάκις εὑρίσκομεν καὶ ποσότητας διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ καὶ διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως συνημμένας, εἰς δυνάμεις ἀρθῆναι προκειμένας. π. χ. $(\alpha\chi)^2$. ὅ ἐςιν αχ εἰς τὴν βʹ.

χρὴ

χρὴ ἀρθῆναι δύν. (ἐνταῦθα αχ εἰσὶ δύω ποσότ. συνημμέναι τῷ πολλαπλ.) Τότ. οὖν ἑκατέρα, (εἰ δύω), ἢ ἑκάςη (εἰ πλείους) τῶν ποσοτήτων ἐπισημειωθήσεται τῷ ἐκθέτῃ. Καὶ $(\alpha\chi)^2$ γένοιτο ἄρα $\alpha^2\ \chi^2$. Ὡς καὶ $(\alpha\chi\upsilon)^3 = \alpha^3\ \chi^3\ \upsilon^3$. Καὶ $(\alpha^2\chi)^4 = \alpha^{2\cdot 4}\ \chi^4 = \alpha^8\ \chi^4$. Ὁ δὲ λόγος αὖθις καταφανὴς, ἐὰν τὰς ποσότητας ἀναλύσωμεν· $(\alpha\chi)^2$ ἐςὶν $\alpha\chi\cdot\alpha\chi$. ἤτοι $\alpha\alpha\chi\chi$. ἢ $\alpha^2\ \chi^2$. Καὶ $(\alpha^2\ \chi)^4$. $= \alpha^2\chi.\ \alpha^2\chi.\ \alpha^2\chi.\ \alpha^2\chi = \alpha^2\ \alpha^2\ \alpha^2\ \alpha^2.$ $\chi\chi\chi\chi = \alpha^8\ \chi^4$. τουτ. πολλαπλασιάζομεν τὴν δοθεῖσαν δύναμιν ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἑκάςης προκειμένης ποσότητος· Τῶν δὲ ποσοτήτων, τῶν ἑτέρους ἐκθέτας μὴ ἐχουσῶν, νοεῖται ἡ 1 ἐκθέτης· Ὡς ἐπὶ τοῦ $(\alpha\chi)^2$ οὐδετέρα τῶν ποσοτήτων ἐκθέτης πάρεστιν· ἀλλὰ ταύτας θεωρήσομεν ὡς $(\alpha^1\ \chi^1)^2$. (§ 185.) Καὶ πολλαπλασιασθέντων τοίνυν τῶν ἐκθετῶν τοῦ α καὶ χ, ἤτοι τῆς 1, καὶ 1 μετὰ τοῦ 2, προκύπτει $\alpha^2\ \chi^2$. Καὶ ἐν γένει $(\alpha\chi)^\varrho = (\alpha^1\ \chi^1)^\varrho = \alpha^\varrho\ \chi^\varrho$. Καὶ $(\alpha^\nu\ \chi^\varrho)^\mu = \alpha^{\nu\mu}\ \chi^{\varrho\mu}$.

Καὶ τῷ τῆς προσθέσεως σημείῳ συνημμέναι ποσότητες εἰς δυνάμεις ἐξαίρεσθαι δύνανται. $(\alpha+\beta)^2$ ποσότης ἐςὶ σύνθετος εἰς τὴν β΄. ἀρθησομένη δύναμιν· ὅ ἐςιν, ἡ ποσότης $\alpha+\beta$ πολλαπλασιαςέα μεθ᾽ ἑαυτῆς· καὶ τούτου ἐνεργείᾳ γεγονότος, προκύψει $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. ὅ ἐςιν $(\alpha+\beta)^2$. Ὡσαύτως καὶ $(\alpha+\beta)^3$. Ἐν τούτῳ πολλαπλασιασθήτω α΄. $\alpha+\beta$ μετὰ τοῦ $\alpha+\beta$. (ὅ ἐςιν ἀρθήτω α΄. εἰς τὴν β΄ δύναμιν) καὶ τὸ παραγόμ. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ εἶτα ἔτι μετὰ τοῦ $\alpha+\beta$. καὶ ἔςαι $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3$. Καὶ τοῦτο ἔχει ἀντ᾽ ἐκείνου τοῦ σχήματος ἀντικαθίςασθαι, καὶ ἀνάπαλιν· ἐνίοτε γὰρ εὐχερείας, ἢ ἄλλου τινὸς ἕνεκα γραγράφουσι τὸ $(\alpha + \beta)^2$ ἀντὶ τοῦ $(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$. ἢ καὶ ἀντὶ τοῦ $(\alpha + \beta)^3$ τὸ $(\alpha + \beta) . (\alpha + \beta) . (\alpha + \beta)$ κτ. Οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. Ὡσαύτως καὶ αἱ τῷ — σημείῳ συνημμέναι. π. χ. $(\alpha - \beta)^2$. Ὅπερ $= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$. ἐὰν ἀμέλει $\alpha - \beta$ μετὰ τοῦ $\alpha - \beta$ πολλαπλασιασθῇ.

Σχόλιον.

Ὅταν δείχνωμεν, ὅτι πρέπει νὰ ἐξαρθῇ εἰς δύναμιν μία διὰ τοῦ $+$, ἢ $-$ συμπεπλεγμένη (§. 44.) ποσότης, πάντοτε εἶναι ἀναγκαῖον νὰ κλείηται ἐν παρενθέσει, καὶ ὁ ἐκθέτης νὰ βάνηται ἐπάνω πρὸς τὰ δεξιὰ, ὡς σύνηθες· διότι ἀλλέως ἠμπορεῖ νὰ ἀκολουθήσῃ ἀπάτη. π. χ. ἄλλο σημαίνει τὸ $(\alpha + \beta)^2$ ἀπὸ τὸ $\alpha + \beta^2$. Τὸ α΄. θέλει νὰ εἰπῇ, ὅτι ἡ ποσότης $\alpha + \beta$ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ μεθ᾽ ἑαυτῆς. Τὸ δὲ β΄. ὅτι εἰς τὴν ποσότητα α πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ β· Ἂς τεθῇ τὸ $\alpha = 5$. καὶ τὸ $\beta = 10$. καὶ ἔσαι $(\alpha + \beta)^2 = (5 + 10)^2 = 15^2 = 15 . 15 = 225$. Ἀλλὰ τὸ $\alpha + \beta^2$ ἔσαι $= 5 + 10^2 = 5 + 10 . 10 = 5 + 100 = 105$. Τὸ οὖν 225 πάντη διάφορον τοῦ 105.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Δυνάμεων.

§. 194. Δυνάμεις ὁμόῤῥιζαι (ὅ ἐσι τὴν αὐτὴν ποσότητα ῥίζαν ἔχοντες) διαιροῦνται δι᾽ ἀλλήλων, ἐὰν οἱ τούτων ἐκθέται ἀφαιρῶνται ἀπ᾽ ἀλλήλων·

ἡ Δεῖξις τούτου γενέσθω διὰ γραμμάτων.

Ἀξία, κατὰ τὰ εἰρημ. καλεῖται, ἡ προκύψασα ποσότης διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μετ᾽ ἀλλήλων ὁμοειδῶν ποσοτήτων. Οὕτως α. α. α. α. ἐσὶν ἡ δ΄. ἀξία, ἢ δύν. τοῦ α, ἢ α^4. γραφείη δ᾽ ἂν καὶ αααα. Ἀλλὰ διὰ τῆς διαιρέσεως τὰ γράμματα χωρίζονται αὖθις ἀπ᾽ ἀλλήλων.