ναι πάντη τὰ αὐτὰ μὲ τὰ τῶν ἀφῃρημένων εἴδη, τὰ ὁποῖα ἤδη ἐπραγματευσάμεθα· Ὅθεν εἶναι περιττὸν νὰ παρατεθοῦν καὶ αὐτῶν παραδείγματα· Ὁ ἀναγνώστης θέλει εὕρει αὐτὰ εἰς κάθε κοινὸν ἀριθμητικὸν βιβλίον·

Περὶ τῶν Δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. 153. Ἐπὶ τοῦ παραληφθέντος ἀριθμητικοῦ συςήματος τοῦ ἐκ δέκα χαρακτήρων, (§. 11.) τῆς ἀριθμήσεως δεξιόθεν χωρούσης, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὁ ἐν τῷ β'· τόπῳ τὸ δεκαπλάσιον σημαίνει τοῦ, ὅ ἐν τῷ α'· τόπῳ δηλοῖ· (§. 62.) Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἀριςερόθεν τῆς ἀρχῆς τῆς ἀριθμήσεως γενομένης, ἕκαςος χαρακτὴρ τὸ δεκατημόριον δυνήσεται τοῦ ἀμέσως προηγησαμένου. Καὶ τοῦτο νόμος τῶν ἀριθμῶν γενικὸς, ἀπὸ βουλῆς ἠρτημένος· (§. 12. ἐν τέλει.) Ἀλλὰ καὶ τοῦτο δῆλον, ὅτι, ἐὰν ὁ τόπος τῶν ἁπλῶν, ἔνθα ὁ χαρακτὴρ ἐν τῇ φυσικῇ αὐτοῦ ἵςαται σημασίᾳ, τουτ: ὁ α'· τόπος, ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ ἄρχονται, ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριςερὰ προαγόμενοι, κόμματι διαςαλῇ, καὶ μετ' αὐτὸ καὶ ἕτεροι ἀριθμοὶ γραφῶσιν, ὁ α'· τούτων τὸ δεκατημόριον σημανεῖ ἑκάςου ἀριθμοῦ τοῦ ἐν τῷ τόπῳ τῶν ἁπλῶν, ὁ δὲ β'· τὸ δεκατημόριον τοῦ α'·, κτ' π. χ. 5555, 5555· ἔνθα τὸ κόμμα ἐςὶν, ἐνταῦθα ἀπολήγει καὶ ἡ ἁπλῆ σημασία τοῦ 5, (ἤτοι σημαίνει, ὅπερ διώρισαι, τουτ. 5 μονάδας) ὁ δὲ 5 μετὰ τὸ κόμμα δηλοῖ $\frac{5}{10}$, ὁ δὲ μετὰ τοῦτο β'· δεκάκις ἔλαττον δύναται τοῦ α'· ἤτοι σημαίνει $\frac{5}{100}$, ὁ γ'· $\frac{5}{1000}$, ὁ δ'· $\frac{5}{10000}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων χαρακτήρων.

§. 154.

§. 154. Ὁ τοῦτο ἀκριβῶς θεωρῶν εὐχερῶς κατανοήσει, ὅτι, ἐπειδὴ ἡ δύναμις τῶν χαρακτήρων ἐφ' ἑκάςου τόπου δεκάκις ἐλαττοῦται τῆς τῶν προηγησαμένων, οἱ μετὰ τὸ κόμμα ἀριθμοὶ κλάσματα γίνονται, ὧν ἑκάςου ὁ παρονομαςὴς δεκάκις τὸν πρὸ αὐτοῦ ὑπερέχει· τὰ τοιαῦτα τῶν κλασμάτων καλοῦνται δεκαδικὰ, ὅτι καὶ ταῦτα κατὰ τὸν δεκαδικὸν διατέτακται νόμον· ὥςε κἀνταῦθα δέκα μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἐγγὺς ἀνωτέρας·

§. 155. Γράφουσι δὲ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, διαςαλτέον ταῦτα τῷ κόμματι (,) (§. 153.) ἀπὸ τῶν ὁλοσχερῶν, τοὺς δὲ παρονομαςὰς ἀναγνωςέον ταῖς φωναῖς, δεκατημόρια, ἑκατοςημόρια, χιλιοςημόρια, δεκαχιλιοςημόρια, ἑκατονχιλιοςημόρια, μιλλιοςημόρια, κτ· Εἴθιςαι μέντοι τοὺς παρονομαςὰς μὴ ὑποτιθέναι τοῖς δεκαδικοῖς, ὡς τῶν δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν κατ' αὐτοὺς διοριζομένων τόπων· π. χ. 15,34502 σημαίνει 15 ὁλοσχερεῖς, 3 δεκατημ. 4 ἑκατοςημ. 5 χιλιοςημ. οὐδὲν δεκαχιλιοςημ· 2 ἑκατονχιλιοςημόρα· Εἰ δὲ οὐδεὶς ὁλοσχερὴς πάρεςιν, ἐν τῷ τόπῳ τούτων τοῦ μηδενικοῦ τεθέντος εἰς δήλωσιν τοῦ μηδένα παρεῖναι ὁλοσχερῆ, καὶ μετὰ τοῦτο τοῦ κόμματος, γραφήτωσαν τὰ δεκαδικά· π. χ. 0,54002. ἔνθα οὐδεὶς ὁλοσχερὴς, 5 δεκατημ· 4 ἑκατοςημ· οὐδὲν χιλιοςημ· οὐδὲν δεκαχιλιοςημ· 2 ἑκατονχιλιοςημ·

§. 156. Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα διττῶς γράφειν, καὶ ἀναγινώσκειν ἔχομεν, ἤτοι ἕκαςον χαρακτῆρα, ὡς ἰδιαίτερον κλάσμα θεωροῦντες, καὶ τὸν τούτῳ προσήκοντα παρονομαςὴν γράφοντες, καὶ ἀναγινώσκοντες, ὡς ἐν τῷ ἀνωτ. §. ἢ πάντας τοὺς δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὡς τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς μόνου κλάσματος ἐκδεχόμενοι· οὗ παρονομαςὴς ὁ παρονομαςὴς τοῦ ἐσχάτου δεκαδικοῦ χαρακτῆρος πρὸς τὰ δεξιά· π. χ.

0,243

0, 243 κατὰ μὲν τὸν ἄνωτι τρόπον ἐςὶ $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{100}$, καὶ $\frac{3}{1000}$· Κατὰ δὲ τὸν β'· τρόπον $\frac{243}{1000}$, ἤτοι 243 χιλιοςημόρια· Ὅτι δὲ τοῦτο οὐδεμίαν ἐμποιεῖ διαφορὰν τῇ δυνάμει τῶν κλασμάτων, δείκνυται διὰ τῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ἀναγωγῆς· Ἔςι γὰρ $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{3}{1000}$ (§. 124.) ταῦτα δὲ $= \frac{243}{1000}$· (§. 130.) ἄρα καὶ $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{243}{1000}$ (§. 48. δ'.).

Σχόλιον. α'·

Ἐὰν γράφωμεν τὰ κλάσματα κατὰ τὸν β'· τρόπον, ὁ παρονομ· λαμβάνει τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ κλάσματα πάρεισι· πρὸ δὲ τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομ· τίθεται ἡ 1· π. χ· 15, 243 $= 15 + \frac{243}{1000}$· ἢ 15 $\frac{243}{1000}$. Καὶ 6, 0045 $= 6\ \frac{45}{10000}$ (ἐδῶ εἶναι δ'· μηδενικά, ὅτι καὶ οἱ τόποι τῶν δεκαδικῶν εἰσὶ δ'· (καί τοι τῶν μηδενικῶν τόπον δύω χαρακτήρων ἐν τῷ ἀριθμητῇ ἐπεχόντων) καὶ 0, 4021 $= \frac{4021}{10000}$· κτ.

Σχόλιον β'·

Ὅταν ἐν τῷ α'· β'· γ'· κτ. τόπῳ τῶν δεκαδικῶν ἦναι μηδενικά, συντομίας χάριν παραλείπονται, γραφομένων μόνον τῶν σημαντικῶν χαρακτήρων ἐν τῷ ἀριθμητῇ· τὰ δὲ μηδενικὰ τοῦ παρονομαςοῦ δείξουσι τὴν

τὴν δύναμιν τῶν χαρακτήρων· οἷον 0, 00056 $= 0 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{6}{100000}$ $= \frac{56}{100000}$.

Σχόλιον γ'.

Καὶ τοὺς ὁλοσχερεῖς χαρακτῆρας ἠμποροῦμεν να τοὺς γράψωμεν ἐν τῷ ἀριθμητῇ μὲ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, καὶ να τοὺς διακρίνωμεν ὡς ὁλοσχερεῖς κατὰ τὸ α'. σχόλ. ὡς 4, 56 γραφείη ἂν καὶ οὕτω $\frac{456}{100} = 4, \frac{56}{100}$.

Περὶ Προσθέσεως, καὶ Ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν.

§. 157. Ἡ τῶν δεκαδικῶν πρόσθεσις, ἤτοι μόνων ὄντων, ἢ καὶ μεθ' ὁλοσχερῶν συμπεπλεγμένων, πάντη εὐχερής· τελεῖται γάρ, ὡς καὶ ἡ τῶν ὁλοσχερῶν. (§. 21.) ὅτι κἀνταῦθα δέκα μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως μίαν τῆς ἐγγὺς ἀνωτέρας ἀποτελοῦσιν· αὐτόθεν δὲ δῆλον, ὅτι τὰ ὁμοειδῆ ὑπὸ τὰ ὁμοειδῆ γραπτέα, ὡς δεκατημόρια ὑπὸ δεκατημ. κτ. τὸ δὲ κόμμα, τὸ τὰ δεκαδικὰ ἀπὸ τῶν ὁλοσχερῶν διαστέλλον, ἐν τῷ κεφαλαίῳ τὸν αὐτὸν καταλήψεται τόπον, ὃν καὶ ἐν τοῖς προσθετέοις (§. 15.) εἶχε· τὸ γὰρ τῶν ἑκατοστημορίων κεφάλ. ἑκατοστημόρια δηλώσει, τὸ δὲ τῶν δεκατημορίων αὖθις δεκατημόρια, κτ. οἷον,

	Καὶ	
15,543		3,0021
0,236		12,999
5,002		0,9
0,0 03		12,00096
		0,000004
20,7813		28,902064

§. 158. Ὡσαύτως καὶ ἡ τούτων ἀφαίρεσις κατὰ πάντα ὁμοία τῇ τῶν ὁλοσχερῶν. (§. 31.) περὶ δὲ τοῦ κόμματος κρατεῖ τὰ αὐτά. (§. ἀνωτ.) οἷον,

Μειωτέος.	16,4325	Καὶ	15,0004	Μειωτ.
Ἀφαιρετέος.	5,0294		14,9987	Ἀφαιρ.
Διαφορά.	11,4031		00,0017	Διαφ.

§. 159. Βασανίζονται δὲ, κατὰ τὸν ῥηθέντα τρόπον. (§. §. 25. 31.). Ἐνταῦθα κρατοῦσι καὶ τὰ ὁροθετηθέντα περὶ τῆς προσθέσεως, καὶ ἀφαιρέσεως μετ' ἐναντίως ἐχόντων σημείων. (§. 40. σχ. β'. 49.)

π. χ.	+ 3,0562	Καὶ	− 5,0321	Μειωτ.
	− 2,143		+ 2,1432	Ἀφαιρ.
τὸ κεφ.	+ 0,9132		− 7,1753.	Διαφ.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν.

§. 160. Καὶ οὗτος οὐδὲν διαφέρει τοῦ τῶν ὁλοσχερῶν πολλαπλασιασμοῦ· (§. 58. κτ.) Σημείωσαι μόνον τὸν ἑξῆς κανόνα ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν, εἴτε ἐν τῷ ἑτέρῳ, εἴτε ἐν ἑκατέρῳ τῶν παραγόντων, ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ τοῖς δεκαδικοῖς συνάπτονται, εἴτε οὐδεὶς ὁλοσχερὴς πάρεστι· Πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ (§. αὐτ.) (ὡς εἰ πάντες ὁλοσχερεῖς εἶεν, μηδένα λόγον τῶν δεκαδικῶν ποιουμένῳ) μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ τούτων παραγόμενον τοσαῦτα δεκαδικὰ περιέξει, ὅσα ἀμφοῖν τοῖς παράγουσιν ἐνυπῆρχον, ὁμοῦ ληφθέντα·

Παράδειγμα.

$$\begin{array}{r} 5,43 \\ 0,23 \\ \hline 1629 \\ 1086 \\ \hline 1,2489 \end{array}$$

Ἐπειδὴ οὖν τὰ τῶν παραγόντων δεκαδικὰ δ'· εἰσὶν, ὁμοῦ ληφθέντα, καὶ χαρακτῆρες τοσοῦτοι τοῦ παραγομένου διαστέλλονται τῷ κόμματι, εἰς δεκαδικὰ γινόμενοι· Ἔστι δὲ 1,2489 = $1,\frac{2489}{10000}$. (§. 155. καὶ σχ. α'· τοῦ §. 156.) Δειχθήσεται δὲ οὕτω·

5,43

$5,43 = \frac{543}{100}$ (§. 156. σχ. γ'). $0,23 = \frac{23}{100}$

$5,43 \times 0,23 = \frac{543}{100} \times \frac{23}{100}$

$\frac{543}{100} \times \frac{23}{100} = \frac{12489}{10000}$ (§. 141.)

$5,43 \times 0,23 = \frac{12489}{10000}$ (§. 48. δ'.) $= 1,2489$ (§. 156. σχ. γ'.)

Οὕτω δείξομεν καὶ τὰ λοιπὰ τῶν παραδειγμάτων, ἐν οἷς εἴτε μόνον ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων τοῖς δεκαδικοῖς συνημμένος εὑρίσκεται, εἴτε οὐδεὶς ὁλοσχερῆς πάρεςι.

§. 161. Ἐὰν ἐν τῷ παραγομένῳ μὴ τοσοῦτοι χαρακτῆρες προκύπτωσιν, ὅσοι κατὰ τον κανόνα (§. αν.) τῷ κόμματι διαςαλῆναι ὤφειλον, πληρούτω τὰ μηδενικὰ τὸν λοιπὸν τόπον, καὶ ἐν τῷ τόπῳ τῶν ἁπλῶν μονάδων ἑνὸς μετὰ τοῦ κόμματος τιθεμένου· (§. 155.) π. χ.

0,0000032	Καὶ	0,0000032
6		0,00324
0,0000192		128
		64
		96
		0,0000000,0368

Σημείωσαι, ὅτι τὰ σημεῖα + καὶ — κἀνταῦθα ἕπονται τοῖς γενικοῖς κανόσι· (§. 77. καν.)

Περὶ Διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν.

§. 162. Ὁ δὲ τῆς διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν κανὼν (ἐν ᾗ, ἤτοι τῷ διαιρετέῳ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ μετὰ δεκαδικῶν ἔνεισιν, ἢ μόνον δεκαδικὰ, τῷ δὲ διαιρέτῃ μόνον ὁλοσχερεῖς, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ τελευταῖον ἀμφοῖν δεκαδικὰ μετὰ, ἢ ἄνευ ὁλοσχερῶν, τὰ δὲ δεκαδικὰ ἐπ' ἀμφοῖν ἤτοι ἰσάριθμα, ἢ τῷ μὲν πλείω, τῷ δ' ἐλάττω) ἐςὶν ὁ ἑξῆς.

 Δίελε,

Δίελε, κατὰ τὸν συνήθη τρόπον. εἶτα ἀρίθμησον, εἰ ὁ διαιρετέος, ἢ ὁ διαιρέτης, πλείω ἔχει δεκαδικὰ, ἢ ἄμφω, ἰσάριθμα· Καὶ εἰ μὲν τοῦτο, οἱ τοῦ πηλίκου χαρακτῆρες δηλοῦσιν ὁλοσχερεῖς ἀριθμούς· εἰ δὲ τῷ διαιρετέῳ πλείω δεκαδικὰ πάρεισι, τοσούτους τῶν χαρακτήρων τοῦ πηλίκου ποίησον δεκαδικὰ, ὅσοις ὁ διαιρετέος τοῦ διαιρέτου πλεονεκτεῖ· Εἰ δὲ τελευταῖον τῷ διαιρέτῃ πλείω πάρεισι, τοσαῦτα πρόσαψον τῷ πηλίκῳ μηδενικὰ, καθ' ὅσους χαρακτῆρας ὁ διαιρετέος τοῦ διαιρέτου μειονεκτεῖ·

Παράδειγμα, ἔνθα τὰ δεκαδικὰ τοῦ διαιρετέου ἰσάριθμα τοῖς τοῦ διαιρέτου·

65,19 : 1,23 | 53
61 5·
03 69
3 69
000

Ἐνταῦθα τὸ πηλίκον ἐςὶ 53. ἢ 1, 23 ἐμπεριέχεται τῷ 65, 19. 53 : κις·

Δεῖξις·

$$65,19 : 1,23 = \frac{6519}{100} : \frac{123}{100} \ (\S.156.\ \sigma\chi.\ \gamma') = \frac{6519}{100} \cdot \frac{100}{123} \ (\S.148.\ \kappa\alpha\nu.) = \frac{651900}{12300} = 53.$$

Παραδείγματα τοῦ β'. τρόπου.

1) Ἐπ' ἀμφοῖν ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ, καὶ δεκαδικά·

12,236 : 2,3 | 5,32.
11 5··
00 73
69
046
46
00

Ἐν τούτῳ, προσῆν τῷ διαιρετέῳ γ' δεκαδικὰ, τῷ δὲ διαιρέτῃ ἕν· Ὥςε κατὰ τὸν κανόνα, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος δυσὶ δεκαδικοῖς τὸν διαιρέτην ὑπερέχει, ἀποτμηθήσονται δύω χαρακτῆρες τοῦ πηλίκου εἰς δεκαδικά·

2) Ὁ

2) Ὁ μὲν διαιρέτης ἔςω εἷς ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, τῷ δὲ διαιρετέῳ ἔςωσαν ὁλοσχερεῖς, καὶ δεκαδικά. ὡς

31,155 : 5 | 6,231

30 . . .
11
10
15
15
005
5
0

Τῷ διαιρέτῃ οὐδὲν ἦν δεκαδικὸν, τῷ δὲ διαιρετέῳ ἦν γ᾽· ὥςε γ χαρακτῆρες τοῦ πηλίκου τῷ κόμματι διαςέλλονται·

3) Ὁ διαιρέτης εἷς ὁλοσχερὴς, ὁ δὲ διαιρετέος μόνον δεκαδικά· οἷον

0,009768 : 3 | 3256

9
07
6
16
15
18
18
00

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος καθ᾽ ἓξ δεκαδικὰ τὸν διαιρέτην ὑπερέχει, (ἐνταῦθα τῷ διαιρέτῃ οὐδὲν προσῆν) διαςαλτέον 6 χαρακτῆρας τοῦ πηλίκου, ἐν δὲ τῷ τόπῳ τῶν ἁπλῶν μονάδων, ἤτοι τῶν ὁλοσχερῶν, θετέον 0. (§. 155·) τὸ οὖν πηλίκον ἔςαι 0,003256.

4) Ἐπ᾽ ἀμφοῖν μόνον δεκαδικὰ, ἀλλὰ τῷ διαιρετέῳ πλείω· ὡς

0,006816 : 0,0213 | 32

639·
0426
426
0 0

Ἐπειδὴ τῷ διαιρέτῃ δ᾽· δεκαδικὰ προσῆν, τῷ δὲ διαιρετέῳ 6, τουτ: οὗτος ὑπερεῖχεν ἐκεῖνον δυσὶ δεκαδικοῖς, δύω χαρακτῆρας τοῦ πηλίκου διαςαλῆναι χρή· Καὶ ἐπειδὴ ἐνταῦθα μόνον δύω εἰσιν, εἰς σημεῖον τοῦ ἁπλοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι τοῦ ὁλοσχεροῦς, ἐν τῷ τόπῳ τούτου τεθήτω τὸ 0 μετὰ τοῦ κόμματος· Ὥςε τὸ πηλίκον ἔςαι 0, 32, τουτ' ὁ διαιρέτης περιέχεται τοσάκις ἐν τῷ διαιρετέῳ·

Δεῖξις·

$12,236 : 2,3 = \frac{12236}{1000} : \frac{23}{10}$ (§. 156. σχ. γ'.) $= \frac{12236}{1000} \cdot \frac{10}{23}$ (§. 148. καν.). $= \frac{122360}{23000}$, ἢ $= \frac{12236}{2300}$. Δίελε ἄμφω τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ 23 $= \frac{532}{100} = 5\, \frac{32}{100} = 5, 32$. Ὡσαύτως καὶ $0,006816 : 0,0213 = \frac{006816}{1000000} : \frac{0213}{10000}$ $= \frac{6816}{1000000} : \frac{213}{10000}$ (§. 156. σχ. β'.) $= \frac{6816}{1000000} \times \frac{10000}{213} = \frac{6816}{21300} = \frac{32}{100}$.

Παραδείγματα τοῦ γ' τρόπου.

```
504,3 : 1,23 | 41
492 .
 123
 123
 000
```

Τῷ πηλίκῳ προςίθεται καὶ 0, καὶ ἔςι κυρίως 410. ὅτι ὁ διαιρέτης τοῦ διαιρετέου πλεονεκτεῖ καθ' ἓν δεκαδικόν.

```
Καὶ   492 : 1,23 | 4
      492
      000
```

Τῷ πηλίκῳ προςίθενται καὶ δύω 0, καὶ ἔςι κυρίως 400. Ὅτι ὁ διαιρέτης τοῦ διαιρετέου (ᾧ τινι ἐνταῦθα οὐδὲν δεκαδικὸν πρόσεςι) δυσὶ δεκαδικοῖς πλεονεκτεῖ·

Καὶ 0,3325 : 0,0025 | 133

25
82
75
75
75
00

Ἐνταῦθα ὁ μὲν διαιρετέος ἔχει 4 δεκαδικὰ, ὁ δὲ διαιρέτης 6· Ὥςε 2 πλέον· Ἔνθεντοι καὶ τῷ πηλίκῳ προσαρτῶνται ἔτι δύω μηδενικὰ, καὶ ἔςι 13300.

Δεῖξις.

$$504,3 : 1,23 = \frac{5043}{10} : \frac{123}{100} \quad (\text{§. 156. σχ. γ'.})$$
$$= \frac{5043}{10} \cdot \frac{100}{123} = \frac{5043 \cdot 100}{10 \cdot 123} = \frac{504300}{123}.$$ Δίελε ἄμφω τοὺς ὅρους διὰ 123, καὶ ἔςαι $= 4100$·

§. 163. Ἐν τοῖς μέχρι τοῦδε παραδείγμασιν, ὁ διαιρέτης κατεμέτρει ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον, ἤτοι διῄρει αὐτὸν ἄνευ λειψάνου· Ἐὰν δ' ἐπίτινος παραδείγμ. καὶ λείψανον ὑπολείπηται, μεταχειρισθησόμεθα τοῦτο κατὰ τὴν ἑξῆς μέθοδον.

§. 164. Πᾶν κλάσμα, ὁποῖον ἂν ᾖ, (§. 118.) δύναται μεταβληθῆναι εἰς δεκαδικόν· Μέθοδος λίαν ἐν χρήσει οὖσα· Ἐὰν μετὰ τὸ κόμμα, ὅπερ ὅριόν ἐςὶ τῶν ἁπλῶν ὁλοσχερῶν, καὶ δεκαδικῶν, (§. 151.) μηδενικὰ τεθῶσιν, ὅσα ἂν βούλῃ, ὁ πρὸ τοῦ κόμματος ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς οὐδεμίαν ὑποίσεται μεταβολὴν, ὡς ἐν τῷ τόπῳ τῶν δεκατημορίων, ἑκατοςημ. κτ· μηδενικῶν ὄντων, μηδὲν σημαινόντων· π. χ. 5, ἢ 5,0000 ἰσοδυναμοῦσιν ἀλλήλοις· Ὡσαύτως καὶ 124 τῷ 1240000· Εἰ οὖν, κλάσματος προκειμένου, ἐν τῷ ἀριθμητῇ, ἔνθα αἱ ἁπλαῖ μονάδες ἀπολήγουσι, κόμμα ποιήσαντες μηδενικὰ προσάψομεν, τὸ κλάσμα μένει ἀμετάβλητον· π. χ. $\frac{3}{5}$, ἢ $\frac{3,000}{5}$ ἴσα ἀλλήλοις. Ἐν γὰρ τοῖς τόποις τῶν δεκαδικῶν μηδενικὰ πάρεισιν· Ἐπεὶ δὲ τὸ γνήσιον κλάσμα (§. 118.) (οὗπερ

(οὗπερ ὁ ἀριθμητὴς θεωρεῖται ὡς διαιρετέος, ὁ δὲ παρονομ. ὡς διαιρέτης) διελεῖν οὐκ ἔχομεν, ὡς τοῦ ἀριθμητοῦ ἐν τούτῳ ἐλάττονος ὄντος τοῦ παρον: ἐὰν προσαρτήσαντες τῷ ἀριθμητῇ μηδενικὰ μετὰ τοῦ κόμματος ὄπισθεν τοῦ τόπου τῶν ὁλοσχ. μονάδων μὴ διέλωμεν τὸ κλάσμα, τηρεῖται, ὡς εἴρηται, ἀμετάβλητον· Οἷόντε δὲ βουλομένοις καὶ διαιρεῖν, τῷ παρον: τοῦ κλάσμ. διαιρέτῃ χρωμένους, καὶ τῶν τοῦ πηλίκου χαρακτήρων τοσούτους διαςέλλοντας τῷ κόμματι, ὅσα μηδενικὰ τῷ ἀριθμητῇ προςέθειντα· π. χ. $\frac{3}{4}$. τῷ 3 δύω μηδενικῶν προσαφθέντων, ἔςαι $\frac{300}{4}$. Οὗ ἐνεργείᾳ διαιρεθέντος, τὸ πηλίκον ἔςαι 75· Ἔςι δὲ τοῦτο ἑκατοντάκις μεῖζον, ἢ εἶναι ὤφειλεν, ὡς τοῦ ἀριθμητοῦ τῇ τῶν μηδενικῶν προσθέσει ἑκατοντάκις αὐξηθέντος· Ἀνάγκη ἄρα τὸ πηλίκον ἔτι διὰ 100 διαιρεθῆναι· Οὗ γεγονότος, ἔςαι $\frac{75}{100} = 0, 75$. Ἀλλ' εἰς τοῦτο βραχύτερον ἂν ἔλθοιμεν, εἰ, αὐτίκα ἐν τῇ διαιρέσει, ὅσα μηδενικὰ τῷ ἀριθμητῇ προσετέθη, εἰς τοσούτους κατὰ τὸ δεκαπλοῦν κατωτέρους τόπους τὸ πηλίκον καταβιβάσομεν. Ὅθεν εἰ ἀντὶ τοῦ $\frac{3}{4}$ τεθείη $\frac{300}{4}$, διαιρήσομεν οὕτως, ὥς' εὐθὺς ἐν ἀρχῇ πρὸ τοῦ πηλίκου τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος τιθέναι· 0, 75· τὸ γὰρ πηλίκον τοῦ 30 διὰ 4 ἐγένετο δεκάκις κατώτερον, τῇ προσθέσει τοῦ μηδενικοῦ. Ὥςε οὐκ ἔςι μονὰς, ἀλλὰ δεκατημόριον, ὅπερ δείκνυται τῷδε τῷ τρόπῳ 0, 75, Ὁ οὖν κανὼν ἐςίν· Ἀπόδος τῷ διαιρέτῃ τοσαῦτα μηδενικὰ, ὅσα ἂν βούλῃ. Δίελε εἶτα διὰ τοῦ παρονομαςοῦ, θεὶς πρὸ τοῦ πηλίκου εὐθὺς τὸ μηδενικὸν μετὰ τοῦ κόμματος, τὴν τῶν ὁλοσχερῶν ἀπουσίαν δεικνύον, καὶ οὕτω προάγων τὴν διαίρεσιν, ἐφ' ὅσον βούλῃ ἢ δύνῃ, ἕξεις τὸ πηλίκον ἐν δεκαδικοῖς κλάσμασιν, ὅπερ ἴσον ἐςὶ τῷ δοθέντι κλάσματι,

σματι, ἢ τοὐλάχιςον ἔγγιςα αὐτοῦ· π. χ. $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0, 5$·

$\frac{3}{8} = \frac{3,000}{8} = 0, 375$. Καὶ $\frac{5}{8} = \frac{5,000}{8}$ $= 0, 625$.

Ἐπειδὴ ἕκαςον νόθον κλάσμα μεταβάλλεται εἰς ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν, καὶ γνήσιον κλάσμα, (§. 118.) ἐξενεχθείη ἂν καὶ τοῦτο (τὸ γν· κλ·) αὖθις ἐν δεκαδικοῖς· π. χ. $\frac{19}{5} = 3\ \frac{4}{5} = 3\ \frac{40}{5} = 3.\ 8$.

§. 165. Ἐπὶ τῶν προχειρισθέντων παραδειγμάτων τῆς μεταβολῆς τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ, ἡ διαίρεσις οὐδὲν λείψανον ὑπέλειπε· πολλάκις μέντοι τὴν διαίρεσιν εἰς πέρας ἀφικέσθαι οὐχ οἷόν τε, ὅσα ἂν μηδενικὰ προσαρτήσῃς, καὶ ἐφ' ὅσον ἂν τὴν διαίρεσιν προαγάγῃς· Οὕτω δ' ἔγγιςα τῆς ἀληθείας ἂν γένοιο, ὡς τελευταῖον τὸ ἁμάρτημα ὡς τὸ μηδὲν ἐκλογίζεσθαι· Ὅσῳ γὰρ πλείω μηδενικὰ προσεθῇ, τοσούτῳ ἐλάσσων καὶ ἡ ἀπάτη γενήσεται· Ἔςω μεταβλητέον τὸ $\frac{3}{7}$ εἰς δεκαδικὸν κλάσμα· προσαφθήτωσαν 6 μηδενικὰ τῷ ἀριθμητῇ $\frac{3000000}{7}$, καὶ διαιρεθήτω· τὸ πηλίκον ἔςαι 0, 428571 . . . Ἐνταῦθα τὸ ἔλλειμμα ἔλαττον μιλλιοςημορίου· Ἐὰν γὰρ ἀντὶ τοῦ ἑνὸς μιλλιοςημορίου, τοῦ ἐν τῷ ἐσχάτῳ χαρακτῆρι τοῦ πηλίκου, 2 μιλλιοςημόρια τεθῇ. καὶ τὸ πηλίκον μετὰ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθῇ, τὸ παραγόμενον ἔςαι μεῖζον τοῦ διαιρετέου· Ἐν πλείςοις τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ἔνθα μεγίςη οὐκ ἀπαιτεῖται ἀκρίβεια, προάζομεν τὸ πηλίκον μέχρι τῶν δεκαχιλιοςημορίων, ἢ καὶ χιλιοςημορίων· Ἔξεςι δὲ, ὅτε τὸ πηλίκον ἀκριβῶσαι βουλόμεθα, καὶ τὸ λείψανον αὐτῷ προσαρτᾷν, οὗ παρονομαςὴς ἔςαι ὁ διαιρέτης μετὰ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσα ἐνῆν τῷ διαιρετέῳ· ὥςε τὸ $\frac{3}{7}$ ἀκριβέςατα ἐξενεχθὲν ἔςαι $0,428571\ \frac{3}{7000000}$. Τοῦτο γὰρ

$= \frac{428571}{1000000} + \frac{3}{7000000} = \frac{428571 \cdot 7}{1000000 \cdot 7} + \frac{3}{7000000} =$

$= \frac{2999997}{7000000} + \frac{3}{7000000} = \frac{3000000}{7000000} = \frac{3}{7}$. Ἀλλὰ τοῦτο οὐκ ἐν χρήσει τοῖς μόνον τοῖς δεκαδικοῖς ἀρκουμένοις.

§. 166. Τῇ (§. 164.) μεθόδῳ χρῆσθαι δυνάμεθα καὶ ἐπὶ τῶν κοινῶν τῆς διαιρέσεως παραδειγμάτων, ἐν οἷς λείψανα ὑπολείπονται· ἀντὶ γὰρ τοῦ τὸ λείψανον μετὰ τοῦ διαιρέτου ὡς κοινὸν κλάσμα τῷ πηλίκῳ προσαρτᾷν, ἄμεινον ἂν ποιήσαιμεν, εἰ τοῦτο εἰς τοσαῦτα δεκαδικὰ τρέψαιμεν κλάσματα, ὅσα ἱκανὰ εἰς τὸ τὴν ἀπάτην ἐλαχίςην ἀποδοῦναι. π. χ. 5432 διὰ 21 διαιρεθὲν δώσει πηλίκον 258, καὶ λείψανον τὸ 14, ἢ $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. ἀλλὰ τῷ 14 προσεθέντος ἑνὸς 0, διαςαλήτωσαν οἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ τοῦ πηλίκου μετὰ τοῦ κόμματος, μεθ' ὃ τεθήτω τὸ α' πηλίκον τοῦ 140 : 21 = 6, δεκαδικὰ σημαῖνον· καὶ οὕτως ἀεὶ τῷ λειπομένῳ 0 προςιθεὶς προάγαγε τὴν διαίρεσιν, ἐφ' ὅσον ἂν δόξῃ σοι· Τὸ οὖν ὁλικὸν πηλίκον ἔςαι 258,6666...

§. 167. Ἀλλὰ καὶ δύω, ἢ καὶ πλείω κλάσματα ῥᾷον πρὸς ἄλληλα παραβαλοῦμεν, (§. 121. 122.) εἰς δεκαδικὰ αὐτὰ τρέψαντες· ἐκ τούτου γὰρ δῆλον ἔςαι, ὁπότερον τὸ ἕτερον ὑπερέχει· π. χ. $\frac{5}{13}$ καὶ $\frac{3}{11}$ ἐν δεκαδικοῖς κλάσμασιν = 0, 384615... καὶ 0, 272727.... Ἔνθα προφανὲς, ὅτι τὸ $\frac{5}{13}$ μεῖζον τοῦ $\frac{3}{11}$· ἐκείνου γὰρ τὸ α' δεκαδικὸν $\frac{3}{10}$, τούτου δὲ $\frac{2}{10}$.

§. 168. Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαιρέσεως μετὰ τῶν δεκαδικῶν (§. 162.) καὶ λείψανον ὑπολείπηται, καὶ τοῦτο εἰς δεκαδικὰ μεταβαλεῖν ἔνι· τοῦτο δὲ γίνεται, τοῖς λειψάνοις μηδενικῶν ἀεὶ προσαπτομένων, καὶ τῆς διαιρέσεως προαγομένης, καὶ τῶν πηλίκων, ὡς δεκαδικῶν κλασμάτων, εἰς τοὺς αὐτοῖς προσήκοντας τόπους τιθεμένων· Καὶ ἔνθα μὲν ἐπ' ἀμφοῖν (διαιρετέῳ, καὶ διαιρέτῃ) ρέτη) ἰσάριθμα τὰ δεκαδικά, ὧν τὸ πηλίκον ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, (§. 162.) ὁ τόπος τοῦ α΄· δεκαδικοῦ κλάσματος αὐτόθεν δῆλος· τουτέϛιν, ἔνθα τὰ πηλίκα τῆς προαγομένης διαιρέσεως τοῦ λειψάνου ἄρχονται· Ἔνθα δὲ τῷ διαιρέτῃ πλείω δεκαδικὰ ἔνεισι τῶν τοῦ διαιρετέου, τουτ: ἔνθα τῷ πηλίκῳ τοσαῦτα μηδενικὰ προστιθέναι χρὴ, ὅσοις δεκαδικοῖς ὁ διαιρέτης τὸν διαιρετέον ὑπερέχει, (§. αὐτ.) ἀντὶ τῶν μηδενικῶν τιθέαμεν τοσούτους ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, (διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν λειψάνων, οἷς τὰ μηδενικὰ προσήφθη, εἰς τὸ δύνασθαι διαιρεθῆναι, προκύπτοντας) ὅσα μηδενικὰ τῷ πηλίκῳ προσεθῆναι χρῆν· Ἐὰν δὲ τοῦ διαιρετέου τὰ δεκαδικὰ πλείω, διαϛέλλονται α΄· ἐν τῷ πηλίκῳ, ὡς δεκαδικὰ, οἱ ἀπαιτούμενοι ἀριθμοὶ, (§. αὐτ.) καὶ εἶτα τοῦ τοῖς λειψάνοις μηδενικὰ προσαρτᾶν ἀρχόμεθα, ὧν τὰ πηλίκα τοῖς προηγουμένοις δεκαδικοῖς προϛιθέσθω· ὁ δὲ τόπος τούτων αὐτόθεν διορίζεται.

Παραδείγματα καὶ τῶν τριῶν τρόπων·

Τοῦ α΄· 5143,2 : 3,2 | 1607,25· 1607 ἐϛὶ τὸ ὁλοσχερὲς πηλίκον, καὶ μετὰ τοῦτο ἄρχονται τὰ δεκαδικά· τὸ δ᾽ ὁλικὸν πηλίκον ἐϛὶ 1607,25· ὅτι ἐνταῦθα οὐδὲν ἔτι λείπεται·

Τοῦ β΄· 368,72 : 0, 034 | 10844,7058: 10844 εἰσιν οἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ τοῦ πηλίκου: καὶ ἐπειδὴ τῷ διαιρέτῃ ἦν γ΄ δεκαδικὰ, τῷ δὲ διαιρετέῳ 2, προσθετέον ἦν τῷ πηλίκῳ καὶ ἓν μηδενικὸν, κα. τὸ λείψανον τὸ δὲ ἦν $\frac{10}{34}$· Ἀλλ᾽ ἄμεινον προϊόντες χωροῦντας τῇ διαιρέσει, καὶ τοῖς λειψάνοις τὸ μηδενικὸν προσαρτῶντας, ἀντὶ τοῦ ἑνὸς τῷ πηλίκῳ προστεθησομένου μηδενικοῦ, τῷ πηλίκῳ τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἤδη εἰς πηλίκον προκύπτοντα, προϛιθέναι, καὶ εἶτα τὰ δεκαδικὰ κλάσματα·

Τοῦ γ΄· 63, 2155 : 315 | 18, 0615714.

Τὸ

Τὸ πηλίκον ἐνταῦθα κατὰ τὴν συνήθη διαίρεσιν ἐςὶ 18001 Ἐπεὶ δὲ ὁ διαιρετέος τρισὶ δεκαδικοῖς τοῦ διαιρέτου πλεονεκτεῖ, διαςαλτέοι τρεῖς χαρακτῆρες τοῦ πηλίκου· καὶ τοῦτο ποιήσας, καὶ τὴν διαίρεσιν προάγων, τῷ τὰ μηδενικὰ τοῖς λειψάνοις προςιθέναι, θὲς τὰ προϊόντα πηλίκα πρὸς τοῖς δεκαδικοῖς. Τὸ οὖν πηλίκον ἔςαι 18, 0615714 . . . .

§. 169. Ἡ *βάσανος* τοῦ ἀκριβοῦς πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ τῶν ὁλοσχερῶν. (§. 98.) πλὴν ὅτι ἐνταῦθα, ἐὰν τὰ δεκαδικὰ ἐπ' ἄπειρον χωρῶσι, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ὁ διαιρετέος οὐκ ἀκριβῶς προκύπτει· ὅ, τι δὲ τοῖς σημείοις $+$ καὶ $-$ ἀνήκει, (§. 77.) ἁρμόζει κἀνταῦθα.

§. 170. Ἀλλὰ καὶ τὰ δεκαδικὰ εἰς τὰ κοινὰ μεταβαλοῦμεν αὖθις κλάσματα, εἰ ἀναγκαῖον. Ἐπὶ γὰρ τῶν μὴ ἐπ' ἄπειρον χωρούντων, ῥᾴδιον· Τουτέςι γραφήτω παρονομαςὴς ἡ 1 μετὰ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσοι οἱ τῶν δεκαδικῶν τόποι, καὶ διαιρεθήτω ὁ ἀριθμητὴς, καὶ παρονομαςὴς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, δι' οὗ εἰς τοὺς ἐλαχίςους ὅρους ἀνάγονται· π. χ. $0,75 = \frac{75}{100}$. ἄμφω διὰ τοῦ 25 διαιρεθέντες ἔσονται $= \frac{3}{4}$. Καὶ $0,625 = \frac{625}{1000}$. διαιρεθὲν διὰ 125 $= \frac{5}{8}$. Ἴδε καὶ §. 114. έ. Εἰ δ' οἱ ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος εἰς ἄπειρον χωροῦσιν, ἡ προτεθεῖσα μέθοδος οὐκ ἀσφαλής.

Περὶ τῶν Τετραγώνων, καὶ Κυβικῶν Ἀριθμῶν·

§. 171. Ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος τὸ προκύπτον παραγόμενον καλεῖται Ἀριθμὸς Τετράγωνος· ὁ δ' ἀριθμὸς, ἡ τούτου Τετραγωνικὴ Ῥίζα· ὡς $12 \times 12 = 144$· Ἐνταῦθα 144 ἐςὶν ὁ τετράγωνος, καὶ 12 ἡ ῥίζα.

Σχόλ.

Σχόλιον.

Ἡ προσηγορία τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἐλήφθη ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν, ὅπου τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου σχήματος, τουτ: τοῦ ἰσοπλεύρου, καὶ ὀρθογωνίου εὑρίσκεται, ἐὰν ἡ πλευρὰ τούτου ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθῇ·

§. 172. Ἐπειδὴ οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ προκύπτουσιν, ἐὰν τὴν ῥίζαν μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιάζωμεν, ἡ 1 μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθεῖσα δίδωσιν 1. ὥςε 1 ἔςαι ὁ τετράγωνος τῆς 1· ὡσαύτως καὶ 4 ἐςὶν ὁ τετράγ. τοῦ 2· οὗτος δὲ ἡ ῥίζα ἐκείνου.

§. 173. Τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκονται καὶ οἱ τετραγωνικοὶ ἀριθμοὶ τῶν κλασμάτων, ἐὰν δηλονότι τὸ κλάσμα δι' ἑαυτοῦ πολλαπλασιάζηται· ὥςε τοῦ $\frac{1}{2}$ ὁ τετράγ. ἐςὶν $\frac{1}{4}$· ὅτι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. (§. 141.) τοῦ $\frac{1}{3}$ ὁ τετρ. ἐςὶν $\frac{1}{9}$, κτ· τουτέςι τετραγωνίσομεν ἄμφω τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος· οἷον, τοῦ $\frac{4}{5}$ ὁ τετρ: $= \frac{16}{25}$·

§. 174. Ὁ δὲ τετράγωνος ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς, κλάσματι συνημμένου, ἀναφανήσεται, εἰ εἰς νόθον κλάσμα ταυτα μεταμείψαντες τὸν τετράγωνον τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος λάβωμεν· ὡς $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. ὁ δὲ τετράγ. $= \frac{25}{4}$, κτ· Ὥςε δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι, ἐὰν ἡ ῥίζα κλάσμα περιέχῃ, καὶ ὁ τετράγωνος αὐτῆς περιέξει·

§. 175. Ἐν γένει δὲ, ἐὰν ἡ ῥίζα ᾖ α, ὁ τετράγ. αὐτῆς ἔςαι αα· τῆς δὲ ῥίζης 2α ὁ τετρ. ἐςὶ 4αα· ὡσαύτως καὶ τῆς αβ ἐςὶν ααββ· κτ·

§. 176. Ἐὰν οὖν ἡ ῥίζα ἐκ 2, ἢ πλειόνων παραγόντων συγκέηται, πολλαπλασιαςέον μετ' ἀλλήλων τοὺς τετραγώνους τούτων, καὶ προκύψει ὁ ὁλικὸς τετράγωνος·. Καὶ ἀνάπαλιν· Ἐὰν ὁ τετράγωνος ἐκ 2, ἢ πλειόνων παραγόντων συγκροτῆται, ὧν ἕκα-

ςος

ςος τετράγωνος, πολλαπλασιάσομεν τὰς ῥίζας τούτων μετ' ἀλλήλων, καὶ τὸ παραγόμενον ἔςαι ἡ ὁλικὴ ῥίζα· οἷον. ἐπειδὴ 2304 ἴσον τῷ 4. 16. 36. ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτων ἐςὶ 2. 4. 6, ὅ ἐςι 48· ἄρα ὁ 48 ἡ τετραγωνικὴ ἐςὶ ῥίζα τοῦ 2304. ὅτι 48. 48 = 2304·

§. 177· Ἐὰν τῇ ῥίζῃ τὸ σημεῖον + προσῇ, ὡς ἐν τοῖς παραληφθεῖσι παραδείγμ. ἔςαι καὶ ὁ τετράγ. ἀριθμὸς καταφατικός. ὅτι + μετὰ + πολλ. δίδωσι +. (§. 77.) ὥςε καὶ ὁ τοῦ + α τετράγ. ἐςὶ + αα· Ἐὰν δὲ ἡ ῥίζα ἡ ἀποφατικὴ, ὡς — α, ὁ τετράγ. ἔςαι ὡσαύτως καταφατικός· ὅτι — α X — α = + αα (§. αὐτ.) Καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου, + αα ζητῆναι δύναται ὁ τετράγωνος καὶ τῆς ῥίζης + α, καὶ τῆς — α. Καὶ παντὸς τετραγώνου δύω ἄρα ῥίζας ἀποδοῦναι δυνάμεθα, τὴν μὲν, θετικὴν, τὴν δ' ἑτέραν ἀποφατικήν. Ἡ οὖν τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 25 ἐςί καὶ + 5, καὶ — 5. ὅτι + 5 X + 5 = 25. καὶ — 5 X — 5 = 25.

§. 178. Ἐὰν ἀριθμὸς τρὶς ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ, ἢ ἐὰν ὁ τετράγωνος ἐπὶ τὴν ῥίζαν πολλαπλασιασθῇ, τὸ παραγόμενον καλεῖται Κύβος, ἢ Κυβικὸς ἀριθμός· οἷον α X α X α = ααα = κύβῳ τοῦ α· Ἢ αα X α = ααα = κύβῳ τοῦ α· καὶ 5 X 5 X 5 = 125. Ἢ 25 X 5 = 125 = κύβῳ τοῦ 5.

§. 179. Ῥαδίως δὲ καὶ τοὺς κυβικοὺς ἀριθμοὺς τῶν κλασμάτων εὑρήσομεν, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· Οἷον τοῦ $\frac{1}{2}$ ὁ κύβος ἐςὶν $\frac{1}{8}$· καὶ τοῦ $\frac{2}{3}$ = $\frac{8}{27}$· τουτέςι ληψόμεθα ἐν μέρει τὸν κύβον τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ παρονομαςοῦ.

§. 180. Τὸν δὲ κύβον ἀριθμοῦ τινος, κλάσματι συνημμένου, ἀνιχνεύσομεν, ὡς καὶ τὸν τετράγωνον (§. 174.)

(§. 174.) Οἷον $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$ = τῷ κύβῳ τοῦ $1\frac{1}{2}$ κτ.

§. 181. Ἐπειδὴ τοῦ ἀριθμοῦ α ὁ κύβος = ααα, καὶ ὁ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ αβ ἔςαι αααβββ· Ἐὰν οὖν ὁ ἀριθμὸς δύω, ἢ πλείους παράγοντας ἔχῃ, εὑρίσκεται ὁ κύβος τῷ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασμῷ τῶν κυβικῶν ἀριθμῶν ἁπάντων τῶν παραγόντων· ὡς 12 = 3 . 4. πολλαπλασίασον τὸν κύβον τοῦ 3 = 27 μετὰ τοῦ κύβου τοῦ 4 = 64, καὶ ἕξεις 1728 τὸν κύβον τοῦ 12.

§. 182. Ὁ κύβος ἀριθμοῦ θετικοῦ + α ἔςαι, ἢ δῆλον, καταφατικός· + ααα· τοῦ ἀποφατικοῦ δὲ — α, ἔςαι ἀποφατικός· καὶ γὰρ — α X — α = + αα. (§. 77 καν.) + αα X — α = — ααα (§. αὐτ.) Ὥςε ὁ κύβος τῆς — 1 ἐςὶ — 1· τοῦ — 2 = — 8, κτ.

Περὶ τῶν Δυνάμεων ἐν γένει.

§. 183. Ἐὰν ποσότης τις (εἴτε ἀριθμὸς, εἴτε γράμμα) ἅπαξ, ἢ πολλάκις μεθ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῇ, τὸ παραγόμενον καλεῖται, Δύναμις, ἢ Ἀξία· Ἐπεὶ δὲ ὁ τετράγωνος (§. 171.) γεννᾶται, ἐὰν ἀριθμός τις ἅπαξ μεθ' ἑαυτοῦ, ὁ δὲ κύβος, (§. 178.) ἐὰν ὁ τετράγωνος ἐπὶ τὴν ῥίζαν (§. 171.) πολλαπλασιασθῇ, καὶ οἱ τετράγωνοι, καὶ οἱ κύβοι περιλαμβάνονται ὑπὸ τῷ ὀνόματι τῶν Ἀξιῶν, ἢ Δυνάμεων.

§. 184. Αἱ δυνάμεις (§. ἀν.) διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων τῇ πληθύϊ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ποσότητος μεθ' ἑαυτῆς· ὥςε α' δύναμις ἀκούει πᾶσα ποσότης, ἣν μονάδι μόνον πολλαπλασιασθεῖσαν νοοῦμεν· ὡς 1, 2, 3, 4, κτ· ἢ α, β, γ, δ κτ. δὶς δ' ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, τὸ παραγόμενον καλεῖται, ἡ β' ταύτης δύναμις, ἢ ἀξία, ἰσοδυνα-