$+ \frac{\gamma \cdot 1}{\delta \cdot 1} = \frac{\alpha\delta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta}$ ἢ $\alpha + \frac{\gamma}{\delta}$ $= \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta}$ κατὰ τὸν β' τρόπον·

§. 134. Εἰ δὲ πλείους ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ παρεισιν, ἕκαςος καὶ κλάσμα παρηρτημένον ἔχων, προςεθέντων α'· ἐκείνων ἐν μέρει, προσαθροισθήτωσαν εἶτα ἀλλήλοις τὰ κλάσματα. (§. 130.) τὸ δ' ἐκ τούτων ἀναφυὲν καινὸν κλάσμα, γνήσιον ὄν, (§. 118.) προσαρτηθήτω τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὁλοσχερῶν· νόθου δὲ ὄντος, γενέσθω τὸ (§. αὐτ.) ἔνθα ἡ προκύψασα διὰ τῆς διαιρέσεως 1, (ἢ μονάδες) προςεθήτω τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὁλοσχερῶν εἰς ἓν κεφάλαιον· παραδείγματα· $1\tfrac{2}{3} + 4\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{8} + 3\tfrac{5}{6} = 1 + 4 + 2 + 3 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{5}{6} = 10 + \frac{2.2.8.6 + 3.8.6 + 3.2.6 + 5.3.2.8}{3.2.8.6}$ (§. 124.) $= 10 + \frac{192 + 144 + 36 + 240}{288} = 10 + \frac{612}{288} = 10 + 2\tfrac{36}{288} = 10 + 2\tfrac{1}{8} = 12\tfrac{1}{8}$· κατὰ δὲ τὸ ἐν (§. 133. καὶ σχολ·) ἔςαι $1\tfrac{2}{3} + 4\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{8} + 3\tfrac{5}{6} = \tfrac{5}{3} + \tfrac{9}{2} + \tfrac{17}{8} + \tfrac{3}{1} + \tfrac{5}{6} = \frac{480 + 1296 + 612 + 864 + 240}{288}$ (§. 124. §. 130.) $= \frac{3492}{288} = 12\tfrac{36}{288} = 12\tfrac{1}{8}$·

Περὶ τῆς τῶν κλασμάτων ἀφαιρέσεως·

§. 135. Ἤτοι κλάσματα ἐνταῦθα ἀφαιροῦνται ἀπὸ κλασμάτων, ἢ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ ἀπὸ κλασμάτων, ἢ κλάσματα ἀφ' ὁλοσχερῶν, ἢ ὁλοσχερεῖς μετὰ κλασμάτων ἀφ' ὁλοσχερῶν καὶ κλασμάτων, ἢ ὁλοσχερεῖς μόνον ἀφ' ὁλοσχ. καὶ κλ. ἢ ἀνάπαλιν·

Τὸ

Τὸ α΄. τούτων· ἐνταῦθα οἱ παρονομασαὶ ἤτοι οἱ αὐτοὶ, ἢ οὐχί· ἐπεὶ τοίνυν μόνα τὰ ὁμοειδῆ ἀφαιρεῖται ἀπ' ἀλλήλων, (§. 29.) εἰ μὲν ἐκεῖνο, εὐχερὴς ἔσαι ἡ τούτων ἀφαίρεσις· Τοῦτο δ' ἐςιν, ἀπό τινος προκειμένου πλήθους μερῶν, ὧν ἡ μονὰς εἰς ἴσα μέρη διῄρηται, ἑτέραν τινὰ πληθὺν ἰσομεγεθῶν, καὶ τοῖς προτέροις ὁμοειδῶν μερῶν, ἀφαιρεῖν· οἷον δεήσαν ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ $\frac{5}{6}$ τὰ $\frac{3}{6}$, ὅ ἐςιν ἀπὸ 5 μερῶν τῆς μονάδος, εἰς 6 ἴσα μέρη διαιρεθείσης, 3 μέρη τῆς μονάδος, ὁμοίως εἰς 6 ἴσα μέρη διαιρεθείσης, ὧν ἕκαςον ἰσομέγεθες ἑκάςῳ τοῦ προτέρου, ἀφαιρεθέντων, ὑπολειφθήσονται καὶ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 125.) ἐντεῦθεν ὁ κανών· Κλάσματα, οἷς ὁ αὐτὸς παρον. ὑπάρχει, ἀφαιροῦνται ἀπ' ἀλλήλων, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἀφαιρετέου κλάσματος ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου ἀφαιρῆται, καὶ παρονομαςὴς ὁ αὐτὸς τηρῆται· τὰ δὲ κλάσματα καλοῦνται, ὡς καὶ οἱ ἀριθμοί, ὡσαύτως καὶ τὸ ὑπολειπόμενον. (§. 27.) σημεῖον δὲ, τὸ σύνηθες τῆς ἀφαιρέσεως (§. 28.) Παραδείγματα· ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ $\frac{2}{3}$ τὸ $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$·

Ἀπὸ τοῦ $\frac{11}{12}$ τὸ $\frac{3}{12} = \frac{11-3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Καὶ ἐν γράμμασιν ὡσαύτως· εἰ μὴ ὅτι ἐνταῦθα ἡ ἀφαίρεσις δείκνυται μόνον τῷ $-$, οὐ γίνεται δὲ καὶ ἐνεργείᾳ, ὡς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς· ὅτι τὰ γράμματα εἰσὶν ἀόριςα· Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$·

Ἀπὸ τοῦ $\frac{\chi\upsilon}{\mu}$ τὸ $\frac{\eta}{\mu} = \frac{\chi\upsilon-\eta}{\mu}$·

Εἰ δὲ τὸ β΄, ἀνακτέον αὐτὰ ἐπὶ κοινὸν παρονομαστήν, (§.123.) ἵνα ὁμοειδῆ γένωνται, καὶ ἀφαιρετέον ἀπ' ἀλλήλων· οἷον ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\frac{3}{4}$ τὸ $\frac{2}{9} = \frac{3}{4} - \frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} - \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{27-8}{36} = \frac{19}{36}$. Καὶ ἐν γράμμ.

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} - \frac{\gamma\beta}{\delta\beta} = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\beta\delta}.$$

Τὸ β΄ καὶ γ΄ π. χ. ἄφελε ἀπὸ τῆς 1 τὸ $\frac{3}{4}$· ἔσται οὖν $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{1} - \frac{3}{4}$ (§.128.) $= \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$.

Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\frac{3}{4}$ τὴν 1· $= \frac{3}{4} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{1}$ (§.αὐτ.) $= \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} - \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \frac{3-4}{4} = -\frac{1}{4}$.

Καὶ ἐν γράμμασιν· $\alpha - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\iota} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha.\delta}{\iota.\delta} - \frac{\gamma.\iota}{\delta.\iota} = \frac{\alpha\delta - \gamma}{\delta}$.

Καὶ $\zeta + \eta - \frac{\nu}{\mu} = \frac{\zeta+\eta}{\iota} - \frac{\nu}{\mu} = \frac{(\zeta+\eta)\mu}{\iota.\mu} - \frac{\nu.\iota}{\mu.\iota} = \frac{\zeta\mu + \eta\mu}{\mu} - \frac{\nu}{\mu} = \frac{\zeta\mu + \eta\mu - \nu}{\mu}$ ἢ καὶ $\frac{(\zeta+\eta).\mu - \nu}{\mu}$ (§. 73.) Παραπλησίως $\frac{\alpha}{\beta} - \delta = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\delta}{\iota} = \frac{\alpha.1}{\beta.\iota} - \frac{\delta.\beta}{\iota.\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\delta\beta}{\beta} = \frac{\alpha - \delta\beta}{\beta}$.

Σχόλιον. α΄.

Ὅτε ὁ μειωτέος εἶναι ἐλάττων τῆς 1, ἤτοι κλάσμα

σμα γνήσιον, (§. 118.) ὁ δὲ ἀφαιρετέος εἶναι ἢ 1, ἢ ἕτερος ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, προκύψει ἡ διαφορὰ ἀποφατικὴ, ἤτοι —· διότι τότε ἀφαιρεῖται ἀπ' ἐκείνου πλέον, ἢ αὐτὸς δύναται· ὥστε τὸ λείψανον διαβήσεται εἰς τὸ ἀποφατικόν· (§. 35. καὶ 52.) Ἐπὶ τῶν τοιούτων ἂς γίνηται ἡ ἀφαίρεσις ἀνάπαλιν, ἤτοι ἂς ἀφαιρῆται ὁ μειωτέος ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ ἂς γράφηται ἡ διαφορὰ μὲ τὸ σημεῖον —·

Σχόλιον β'·

Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφέλωμεν κλάσμα ἀπὸ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ἠμποροῦμεν νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ τὸν ἑξῆς τρόπον, ἤτοι λαμβάνομεν μίαν μονάδα τοῦ ὁλοσχεροῦς, καὶ τὴν μεταφέρομεν εἰς κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴν, τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, καὶ οὕτως ἀφαιροῦμεν· οἷον $1 - \frac{5}{12} = \frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$· ὡσαύτως $2 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$· καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τοῦ ὁλοσχεροῦς 2 ἐλήφθη μόνον 1 μονὰς, ὑπελείφθη καὶ 1· ὥστε τὸ λείψανον εἶναι 1, καὶ $\frac{1}{4}$·

Τὸ δ'· ε'· καὶ ς'· ἀπὸ τοῦ $4\frac{3}{4}$ ἄφελε $2 = 4\frac{3}{4} - 2 = \frac{19}{4} - 2$ (§. 133. σχ.) $= \frac{19}{4} - \frac{2}{1} = \frac{19.1}{4.1} - \frac{2.4}{1.4} = \frac{19}{4} - \frac{8}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$·

Ἀπὸ τοῦ $4\frac{3}{4}$ ἄφελε τὸ $3\frac{1}{8} = 4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{8} = \frac{19}{4} - \frac{25}{8} = \frac{19.8}{4.8} - \frac{25.4}{8.4} = \frac{152}{32} - \frac{100}{32} = \frac{152 - 100}{32} = \frac{52}{32} = 1\frac{20}{32} = 1\frac{5}{8}$·

Ἀπὸ τοῦ $4\frac{3}{4}$ ἄφελε $5\frac{1}{8} = 4\frac{3}{4} - 5\frac{1}{8} = \frac{19}{4} - \frac{41}{8} = \frac{19.8}{4.8} - \frac{41.4}{8.4} = \frac{152}{32} - \frac{164}{32} = \frac{152 - 164}{32} = -\frac{12}{32}$ (§ 35. καὶ 52.) $= -\frac{3}{8}$ (§. 125.)

Ἀπὸ

Ἀπὸ τοῦ $5\frac{3}{7}$ ἄφελε $\frac{3}{8} = \frac{38}{7} - \frac{3}{8} = \frac{38.8}{7.8} - \frac{3.7}{8.7} = \frac{304}{56} - \frac{21}{56} = \frac{283}{56} = 5\frac{3}{56}$.

Ἀπὸ τοῦ $\frac{3}{8}$ ἄφ. $1\frac{3}{4} = \frac{3}{8} - \frac{7}{4} = \frac{3.4}{8.4} - \frac{7.8}{4.8} = \frac{12}{32} - \frac{56}{32} = -\frac{44}{32} = -1\frac{12}{32} = -1\frac{3}{8}$.

Καὶ ἐν γράμμασιν· ἄφελε ἀπὸ τοῦ $\alpha + \frac{\gamma}{\delta}$ τὸ β. $= \frac{\alpha\delta+\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\iota}$ (§. 133. σχ.) $= \frac{\iota\alpha\delta + \iota\gamma}{\delta.\iota} - \frac{\beta\delta}{\iota.\delta} = \frac{\alpha\delta+\gamma}{\delta} - \frac{\beta\delta}{\delta} = \frac{\alpha\delta+\gamma-\beta\delta}{\delta}$.

Ἀπὸ τοῦ $\alpha + \frac{\gamma}{\delta}$ ἄφελε τὸ $\beta + \frac{\nu}{\mu} = \frac{\alpha\delta+\gamma}{\delta} - \frac{\beta\mu+\nu}{\mu} = \frac{(\alpha\delta+\gamma)\mu}{\delta\mu} - \frac{(\beta\mu+\nu)\delta}{\mu\delta}$

$$= \frac{(\alpha\delta+\gamma)\mu - (\beta\mu+\nu)\delta}{\delta\mu}$$

$$= \frac{\alpha\delta\mu + \gamma\mu - \beta\mu\delta + \nu\delta}{\delta\mu}.$$

Ἀπὸ τοῦ $\mu + \frac{\nu}{\mu}$ ἄφ. τὸ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu\mu+\nu}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\mu\mu+\nu)\beta}{\mu\beta} - \frac{\alpha.\mu}{\beta.\mu} = \frac{(\mu\mu+\nu)\beta - \alpha\mu}{\beta\mu}$

$$= \frac{\mu\mu\beta + \nu\beta - \alpha\mu}{\beta\mu}.$$

Ἀπὸ τοῦ $\chi + \frac{\nu}{\mu}$ ἄφ. τὸ $\chi + \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{\chi\mu+\nu}{\mu} - \frac{\chi\sigma+\varrho}{\sigma} = \frac{(\chi\mu+\nu)\sigma}{\mu\sigma} - \frac{(\chi\sigma+\varrho)\mu}{\sigma\mu}$

$= (\chi\mu+\nu)$

$$=\frac{(\chi\mu+\nu)\sigma-(\chi\sigma+\rho)\mu}{\mu\sigma}=\frac{\chi\mu\sigma+\nu\sigma-\chi\mu\sigma-\rho\mu}{\mu\sigma}$$

$$=\frac{\nu\sigma-\rho\mu}{\mu\sigma}.$$

§. 136. Καὶ κλάσματα δὲ ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς συνημμένα ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖν οἷόν τε, τὸ − πρὸ αὐτῶν ἔχοντα· ἔνθα παντὶ τῷ τὸν νοῦν ἐπιςήσαντι δῆλον, ὅτι α'· ἀπὸ τοῦ Μειωτέου ἀφαιρεθῆναι τὸ πρὸς αὐτῷ κλάσμα χρὴ, ὁμοίως καὶ ἀπὸ τοῦ Ἀφαιρετέου τὸ οἰκεῖον, εἶτα δὲ καὶ τὰ λείψανα ἀπ' ἀλλήλων·

Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $4-\frac{3}{4}$ τὸ $3\frac{1}{8}=\frac{4}{1}-\frac{3}{4}$ $=\frac{4\cdot4}{1\cdot4}-\frac{3}{4}=\frac{16}{4}-\frac{3}{4}=\frac{16-3}{4}=\frac{13}{4}$. Ἤδη ἀπὸ τοῦ $\frac{13}{4}$ ἀφαιρεθὲν τὸ $3\frac{1}{8}$, ἔσαι $\frac{13}{4}-3\frac{1}{8}=$ $\frac{13}{4}-\frac{25}{8}=\frac{13\cdot8}{4\cdot8}-\frac{25\cdot4}{8\cdot4}=\frac{104}{32}-\frac{100}{32}$ $=\frac{104-100}{32}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.

Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $4-\frac{3}{4}$ τὸ $2-\frac{1}{6}$. α'· $4-\frac{3}{4}=\frac{4}{1}-\frac{3}{4}=\frac{4\cdot4}{1\cdot4}-\frac{3\cdot1}{4\cdot1}=\frac{16-3}{4}=\frac{13}{4}$. β'· $2-\frac{1}{6}=\frac{2}{1}-\frac{1}{6}=\frac{2\cdot6}{1\cdot6}-\frac{1}{6\cdot1}=\frac{12-1}{6}$ $=\frac{11}{6}$.

Καὶ $\frac{13}{4}-\frac{11}{6}=\frac{13\cdot6}{4\cdot6}-\frac{11\cdot4}{6\cdot4}=\frac{78}{24}-\frac{44}{24}$ $=\frac{34}{24}=1\frac{10}{24}=1\frac{5}{12}$.

Ἢ βραχύτερον $(4-\frac{3}{4})-(2-\frac{1}{6})=\frac{13}{4}$ $-11=\frac{78-44}{24}=\frac{34}{24}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$.

§. 137. Ἐν τῷ περὶ ἀφαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν (§. 49. κτ.) δέδεικται, ὅπως ἀφαιρετέοι εἰσὶν οἱ ἀριθμοὶ μετ' ἀντιθέτων σημείων· τοῦτο δ' αὐτὸ τὰ καὶ τοῖς κλάσμασιν ἁρμόζει· καὶ ταῦτα γὰρ (οὕτως ἔχοντα) ἀφαιρεῖσθαι ἀπ' ἀλλήλων δύνανται· καὶ τὰ μὲν μέχρι τοῦδε παραδείγμ. ἦν $+$· Εἰ γὰρ ἀπὸ $\frac{3}{4}$ ἀφαιρεῖται $\frac{1}{2}$, ἄμφω εἰσὶν, ὡς δῆλον, καταφατικά· ἤδη δ' ἐκκεί(σονται κλάσματα, ὧν θάτερον ἀποφατικὸν, ἐν οἷς τὰ ἐκεῖ ὁροθετηθέντα (§. αὐτ.) κρατεῖ· τουτέστι μεταβαλὼν τὸ σημεῖον τοῦ ἀφαιρετέου εἰς τὸ ἀντικείμενον, τρέψον τὴν ἀφαίρεσιν εἰς πρόσθεσιν· οἷον, εἰ ἀφελεῖν δέοι ἀπὸ $+\frac{3}{4}$ οὐχὶ $+\frac{3}{8}$, ἀλλὰ $-\frac{3}{8}$, ἔςαι $+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 8}{4\cdot 8}+\frac{3\cdot 4}{8\cdot 4}=\frac{24}{32}+\frac{12}{32}$ $=\frac{36}{32}=1\frac{4}{32}=1\frac{1}{8}$·

Ἄφελε ἀπὸ τοῦ $-\frac{3}{4}$ τὸ $+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ $=-\frac{4}{4}$ (§. 135.) $=-1$. Καὶ ἐν γράμμασιν·

Ἀπὸ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀφαιρεθὲν τὸ $-\frac{\gamma}{\delta}$, ἔςαι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}$ $=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$.

§. 138. Ἐνίοτε ἀπαντῶσι καὶ ὁλόκληροι σειραὶ κλασμάτων, αἷς τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ ἐναλλὰξ πρόσεςιν, ἅτινα εἰς μίαν ποσότητα ἀναγαγεῖν βουλόμεθα· οἷον εἰ ἥδε ἡ σειρὰ εἴη $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$ $+\frac{1}{2}$· ἐπὶ τῶν τοιούτων σύναψον ἐν μέρει τὰς τῷ $+$, ὡσαύτως καὶ τὰς τῷ $-$ σημειουμένας, καὶ ἄφελε αὐτὰς ἀπ' ἀλλήλων· ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγμ. ποσότητες ἀποφατικαί εἰσιν αἱ $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, καταφατικαὶ δὲ αἱ $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$· Ἀναχθεῖσαι αἱ α'· εἰς τὸν αὐτὸν παρονομ. ἔσονται $=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 6}$ καὶ $\frac{1\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{18}{24}$ καὶ $\frac{4}{24}=\frac{22}{24}$ $=\frac{11}{12}$· Αἱ δὲ β'· $=\frac{1\cdot 8\cdot 2}{4\cdot 8\cdot 2}$ καὶ $\frac{3\cdot 4\cdot 2}{8\cdot 4\cdot 2}$, καὶ $\frac{1\cdot 4\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 8}$ $=\frac{16}{64}$ καὶ $\frac{24}{64}$, καὶ $\frac{32}{64}=\frac{72}{64}=\frac{9}{8}$·

Ὥστε ἀπὸ $\frac{9}{8}$ ἀφαιρετέον, ἢ μᾶλλον τῷ ἀντικειμένῳ σημείῳ προσθετέον τὸ $\frac{11}{12}$· ταῦτο δ' ἂν εἴη $\frac{9}{8} - \frac{11}{12} = \frac{9 \cdot 12}{8 \cdot 12} - \frac{11 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{108}{96} - \frac{88}{96} = \frac{20}{96} = \frac{5}{24}$·

Καὶ ἐν γράμμασιν ὡσαύτως· οἷον, εἰ πρόκειται ἡ ἑξῆς σειρά, ἣν εἰς μίαν ποσότητα ἐπιτεμεῖν βουλόμεθα· $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} + \alpha - \frac{\zeta}{\eta}$· καταφατικαὶ εἰσὶν αἱ $\frac{\gamma}{\delta} + \alpha = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{1} = \frac{\gamma + \alpha\delta}{\delta}$· ἀποφατικαὶ δὲ αἱ $\frac{\beta}{\delta}$ καὶ $\frac{\zeta}{\eta} = \frac{\beta\eta + \zeta\delta}{\delta\eta}$· τὸ οὖν παράδειγμα ἔσται $\frac{\gamma + \alpha\delta}{\delta} - \frac{(\beta\eta + \zeta\delta)}{\delta\eta}$· δῆλον δέ, ὅτι, ἐὰν μόνον ἐπὶ τοῦ α' κλάσμ. ἄμφω οἱ ὅροι πολλαπλασιασθῶσι μετὰ τοῦ η, ἄμφω τὰ κλάσματα ἕξουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· ὥστε $\frac{\gamma\eta + \alpha\delta\eta - (\beta\eta + \zeta\delta)}{\delta\eta}$

$$= \frac{\gamma\eta + \alpha\delta\eta - \beta\eta - \zeta\delta}{\delta\eta}$$

§. 139. Ἐντεῦθεν ῥᾷστα ἄν τις συνίδοι, ὅπως ἂν τὰ τῆς πράξεως χωρήσαι, τοῦ ἑξῆς παραδείγμ. τῆς ἀφαιρέσεως δοθέντος· $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\cdot\right)$ Ἀμέλει ὁ μειωτέος ἀχθήσεται α'· εἰς μίαν ποσότητα, εἶτα καὶ ὁ ἀφαιρετέος, καὶ τελευταῖον ἄμφω ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ τότε ἀφαιρεθήσονται ἀπ' ἀλλήλων.

Αἱ καταφατικαὶ ποσότητες τοῦ μειωτέου εἰσὶ $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8} + \frac{4}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

Αἱ ἀποφατικαὶ ποσότητες τοῦ αὐτοῦ $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $= \frac{4}{32}$ καὶ $\frac{24}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$·

Αἱ καταφ. καὶ ἀποφ. ποσ. τοῦ μειωτέου ἅμα $\frac{5}{4} - \frac{7}{8} = \frac{5\cdot8}{4\cdot8} - \frac{7\cdot4}{8\cdot4} = \frac{40}{32} - \frac{28}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ $=$ ὅλῳ τῷ μειωτέῳ·

Αἱ τοῦ ἀφαιρετέου καταφ. ποσότ. $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$·

Αἱ τοῦ ἀφαιρετέου ἀποφ. 1, $\frac{1}{8}$, $= \frac{1}{1}$, $\frac{1}{8}$ $= \frac{8}{8}$ καὶ $\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$·

Τοῦ ἀφαιρετέου αἱ καταφ. καὶ ἀποφ. ποσότ ὁμοῦ $\frac{5}{4} - \frac{9}{8} = \frac{5\cdot8}{4\cdot8} - \frac{9\cdot4}{8\cdot4} = \frac{40-36}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$·

Τοῦ Μειωτέου, καὶ ἀφαιρετέου αἱ ποσότητες ὁμοῦ $\frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $=$ ὅλῳ τῷ παραδ·

Περὶ τοῦ τῶν κλασμάτων πολλαπλασιασμοῦ·

§. 140. Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν κλασμάτων, πολλαπλασιάζονται κλάσματα (εἴτε γνήσια, εἴτε νόθα·) ἐπὶ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς, ἢ κλάσματα ἐπὶ κλάσματα· (εἴτε γνήσια ἄμφω, ἢ νόθα, ἢ θάτερον μόνον) περὶ παντὸς τρόπου ἐπάξομεν γενικὸν κανόνα, βραχέα τινὰ ἐν μέρει θεωρήσαντες· παραληφθήτω α΄: ὁ μὲν ἕτερος παράγων, κλάσμα, ὁ δ' ἕτερος, ὁλοσχερὴς· οἷον ἔξω πολλαπλασιασέον $\frac{3}{4}$ μετὰ τοῦ 5, ἢ, ὃ ταὐτὸν, 5 μετὰ τοῦ $\frac{3}{4}$· (§. 58.) τοῦτο δ' ἐστὶν ὁ πολλαπλαλαπλασιασέος $\frac{3}{4}$ προσεθήσεται ἑαυτῷ τοσάκις, ὁσάκις ἡ 1 τῷ 5 ἐμπεριέχεται (§. 55.), ἤτοι πεντάκις· οἷον $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. τὸ δὲ $= \frac{15}{4}$· (§. 130.) ταὐτὸ δὲ προκύψει, καὶ εἰ ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς τῷ ἀριθμητῇ τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζοιτο· ἔνθεν „συνάγεται ὁ κανών· κλάσματα πολλαπλασιασθή„σονται μεθ' ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἐκεί„νων τῷ δοθέντι ὁλοσχερεῖ πολλαπλασιάζηται ὥςε $\frac{3}{4} . 5 = \frac{3 . 5}{4} = \frac{15}{4}$. τῷ αὐτῷ τρόπῳ χρηςέον, καὶ εἰ νόθον κλάσμα μεθ' ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ πολλαπλασιάσαι πρόκειται· ἐντεῦθεν δῆλον, καὶ ὅπως ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν, μετὰ κλάσματος συνημμένον, μεθ' ἑτέρου ὁλοσχεροῦς πολλαπλασιάσομεν· οἷον $1\frac{3}{4}$ μετὰ 4· τοῦ γὰρ ὁλοσχεροῦς μετὰ τοῦ κλάσματος εἰς νόθον κλάσμα τραπέντος, (§. 133. καὶ σχ.) ὁ τοῦ καινοῦ κλάσματος ἀριθμητὴς τῷ ὁλοσχερεῖ πολλαπλασιασθήσεται· $1\frac{3}{4} . 4 = \frac{7}{4} . 4 = \frac{28}{4} = 7$.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν κλασμάτων ἐν γράμμασι μετὰ γραμμάτων, ὁλοσχερεῖς παριςώντων, τελεσθήσεται ὡσαύτως· π. χ. $\frac{\alpha}{\beta} . \delta = \frac{\alpha\delta}{\beta}$. ὅτι δὲ οὕτως ἔχειν ἀνάγκη, αὐτόθεν δῆλον· πρόκειται γὰρ ἡ ποσότης $\frac{\alpha}{\beta}$, δ: ις (§. 55.) ληφθῆναι, ἢ δ: ις ἑαυτῇ προσεθῆναι· (§. αὐτ.) ὅπερ, ὡς ἀνωτ. δέδεικται, διὰ τοῦ πολλαπλ. τοῦ ἀριθμητοῦ γίνεται· Καὶ τὰς τοιάςδε τῶν ποσοτήτων, οἷα ἡ $\alpha + \frac{\beta}{\gamma}$ πολλαπλασιάσομεν μεθ' ἑτέρας, οἷον μετὰ τῆς δ, μεταχειριζόμενοι αὐτὰς τὸν ὅμοιον τρόπον, ὡς καὶ τοὺς ἀριθμούς· καὶ γὰρ $\alpha + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\iota} + \frac{\beta}{\gamma}$ (§. 128.)

$= \frac{\alpha\gamma}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}. = \frac{\alpha\gamma + \beta}{\gamma}.$ (§. 130.)

Ὁ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ δ ἔςαι $= \frac{\alpha\gamma+\beta.\delta}{\gamma}$ $= \frac{(\alpha\gamma+\beta)\,\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma\delta+\beta\delta}{\gamma}$. Ἔςω $\alpha = 1$; $\beta = 2.$ $\gamma = 3.$ $\delta = 4.$ Ἐὰν οὖν οἱ ἀριθμοὶ ἀντικαταςῶσι τῶν γραμμάτων ἔςαι $\frac{\alpha\gamma\delta + \beta\delta}{\gamma}$ $= \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{12+8}{3} = \frac{20.}{3}$

Τὸ αὐτὸ δ' ἂν προέκυψε, καὶ εἰ ἐν ἀρχῇ τὰ γράμματα διωρίζοντο· ἦν γὰρ $\alpha + \frac{\beta}{\gamma} \cdot \delta =$ $1 + \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{5}{3} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{3} = \frac{20}{3}$ $= 6\frac{2}{3}$.

Αὖθις $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \delta + \gamma = \frac{\alpha \,.\, (\delta + \gamma)}{\beta}$ $= \frac{\alpha\delta + \alpha\gamma}{\beta}.$ Καὶ $\alpha\gamma - \frac{\nu}{\mu}.\zeta = \frac{(\alpha\gamma\mu - \nu)\zeta}{\mu}$ $= \frac{\alpha\gamma\mu\zeta - \nu\zeta}{\mu}.$

§. 141. Ὁ κλασμάτων μετὰ κλασμάτων πολλαπλασιασμὸς, ὡς τοῦ $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8}$, οὐδὲν δυσχερὲς ἔχει· κατὰ τὸ (§. ἀνωτ.), εἰ κλάσμα ὁλοσχερεῖ ἀριθμῷ πολλαπλασιάσειν ἐμέλλομεν, ἐπολλαπλασιάζετο ὁ ἀριθμητὴς μόνον· Εἰ οὖν καὶ ἐπὶ τούτων οὕτω χωρήσομεν, τουτ: εἰ μόνον τὸν ἀριθμ' τοῦ ἑτέρου κλάσμ' μετὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἑτέρου πολλαπλασιάσομεν, ὁ δὲ παρονομαςὴς

νομαςὴς τοῦ πολλαπλασιαςέου ὁ αὐτὸς τηρηθείη, τὸ παραγόμενον πάνυ ἂν μέγα προκύψειε· πρόκειται γὰρ ὁ πολλαπλασιαςέος πολλαπλασιασθῆναι οὐχὶ μετὰ τηλικούτου ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ἡλίκος ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, ἀλλὰ μετ' ἀριθμοῦ διῃρημένου διὰ τοῦ παρονομαςοῦ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ· πολλαπλασιασθέντων τοίνυν τῶν ἀριθμητῶν ἀμφοῖν τῶν κλασμάτων μετ' ἀλλήλων, τοσούτῳ ηὔξηται τὸ παραγόμενον, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ παρονομαςὴς τοῦ ἑτέρου κλάσματος· ἀναγκαῖον ἄρα τοσούτῳ καὶ μειωθῆναι· τὸ δὲ γενήσεται, εἰ τὸν διαιρέτην, τουτ. τὸν παρονομαςὴν, τοσάκις αὐξήσομεν· ἔςαι δὲ τοῦτο, εἰ καὶ τοὺς παρονομαςὰς τῶν κλασμάτων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιάσομεν· ὥςε κλάσματα πολλαπλασιάζονται μετὰ κλασμάτων, ἐὰν πολλαπλασιάζωμεν μετ' ἀλλήλων τοὺς ἀριθμητὰς, ὡσαύτως καὶ τοὺς παρονομαςάς. ἢ ἐὰν τὸ ἐκ τῶν ἀριθμητῶν παραγόμενον εἰς καινὸν ἀριθμητὴν, τὸ δ' ἐκ τῶν παρονομαςῶν εἰς καινὸν παρονομαςὴν γίνηται· π. χ. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} = \frac{15}{32}$.

Δειχθήσεται δὲ ὁ κανὼν ἄμεινον διὰ γραμμάτων.

Ἔςω $\frac{\alpha}{\beta}$ πολλαπλασιαςέον μετὰ τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$· ταῦτα παρίςῶσι πᾶν κλάσμα· Ὅ, τι οὖν κατὰ τούτων δειχθήσεται, κρατήσει καὶ κατὰ παντὸς κλάσματος· καὶ τὸ μὲν πηλίκον, ὃ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ δίδωσι, (διαιρεθὲν γὰρ α διὰ τοῦ β δώσει πάντως πηλίκον τι) ῥηθήτω ν· ὥςε $\frac{\alpha}{\beta} = \nu$· Ὃ δὲ τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$, μ· τουτέςι $\frac{\gamma}{\delta}$

 $= \mu$·

$= \mu$· ἄρα $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \nu \,.\, \mu$· ἴδωμεν οὖν, ὅπως τοῦτο ἀνακύψειεν·

$$\frac{\alpha}{\beta} = \nu \qquad \frac{\gamma}{\delta} = \mu$$

πολλαπλ. β· μετὰ τοῦ β.   · δ πολλαπλ. μετὰ τοῦ δ·

$$\frac{\alpha \,.\, \beta}{\beta} = \beta\nu. \quad \text{καὶ} \quad \frac{\gamma \,.\, \delta}{\delta} = \delta\mu\cdot$$

$$\alpha = \beta\nu \cdot \text{καὶ } \gamma = \delta\mu \text{ (§. 114. δ')}$$

Ἐπεὶ δὲ $\alpha = \beta\nu$, καὶ
$\gamma = \delta\mu$

$$\text{Ἔςαι καὶ } \alpha \,.\, \gamma = \beta\nu \,.\, \delta\mu \quad \text{(§. 79. α')}$$

$: \beta\delta$·

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\beta\nu \,.\, \delta\mu}{\beta\delta} = \nu\mu \,.$$

Ἦν δὲ καὶ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \nu\mu$, ὡς εἴδομεν ἐν ἀρχῇ

$$\text{Ἔςαι ἄρα καὶ } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\cdot \quad \text{(§. 48. δ')}$$

Ἐπὶ δὲ τοῦ $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ ὁρῶμεν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων μετ' ἀλλήλων πεπολλαπλασιασμένους, ὡσαύτως καὶ τοὺς παρονομαςάς, διὰ δὲ τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ παρίςαται οἱονδηποτοῦν κλάσμα· δῆλος ἄρα ὁ ἀνωτέρω κανών·

Προ-

Προκείσθω ἤδη καὶ παραδείγματα.

$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{35}$. Καὶ $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} \cdot \frac{\nu}{\mu} = \frac{\alpha\gamma\varepsilon\nu}{\beta\delta\zeta\mu}.$$

§. 142. Ἐὰν δὲ καὶ ἓν, ἢ πλείω, ἢ καὶ πάντα τὰ κλάσματα, τὰ μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθησόμενα, νόθα ἢ κλάσματα, τουτ' μείζω τῆς 1 (§. 118.), ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς γενήσεται κατὰ τὰ αὐτά, ὡς τῆς ἀνωτέρω διὰ τῶν γραμμάτων δείξεως κατὰ πάντων τῶν κλασμάτων κρατούσης· ὡς $\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{63}{64}$. Εἰ δ' οἱ παράγοντες (§. 16.) ὁλοσχερεῖς εἰσιν ἀριθμοὶ μετὰ κλασμάτων, οἷον $1\frac{3}{4}$. $2\frac{1}{2}$, εἰς νόθα κλάσματα τραπέντες κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα μεταχειρισθήσονται· $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ (§. 133. σχ.) καὶ $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. ὥστε $\frac{7}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$.

Καὶ ἐπειδὴ πᾶς ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς ὡς κλάσμα θεωρηθῆναι ἔχει, οὗ παρονομαστὴς ἡ 1, (§. 128.) ἐὰν ἐν τοῖς παράγουσι καὶ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ ἐνῶσι, γραφήσονται ὡς κλάσματα, καὶ πολλαπλασιασθήσονται· $\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{96}{84} = 1\frac{12}{84} = 1\frac{1}{7}$.

Σχόλιον.

Τὸ παραγόμενον, ὁποῦ προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γνησίων κλασμάτων, εἶναι πάντοτε ἔλαττον τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων· οἷον $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$. ὡς ὁρᾷς, τὸ $\frac{3}{7} <$ τοῦ $\frac{5}{7}$, ὡσαύτως καὶ τοῦ $\frac{3}{5}$. ὅτι ἐν τῷ $\frac{3}{5}$ διῃρέθη ἡ μονὰς μόνον εἰς 5 μέρη, ἐν δὲ τῷ παραγομένῳ εἰς 7, ἐξ ὧν (5, καὶ 7) ἐλήφθησαν 3 εἰς τὸν ἀριθμητήν· ἡ δ' αἰτία, ὅτι τὸ γνήσιον κλάσμα ἔλαττον τῆς 1. Ὅτε λοιπὸν πολλαπλασιάζεται γνήσιον κλάσμα διὰ γνησίου, ἀναγκαίως τὸ παραγόμεγόμενον ἔλαττον ἔςαι τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων· ὁ γὰρ ἕτερος παράγων ἐλήφθη ἔλαττον, ἢ ἅπαξ. τῶν δὲ νόθων πολλαπλασιαζομένων, τὸ παραγόμενον μεῖζον τοῦ ἑτέρου, ἢ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων· ὅτι τὸ νόθον κλάσμα μεῖζον τῆς 1.

§. 143. Περὶ δὲ τῶν σημείων + καὶ −, χώραν ἔχει κἀνταῦθα τὰ ῥηθέντα (§. 77. καν.)· ὅτι καὶ τὰ κλάσματα ποσότητές εἰσι· π. χ. $+\frac{5}{8} \cdot +\frac{3}{8} = \frac{15}{64}$. Καὶ $-\frac{5}{8} \cdot -\frac{3}{8} = +\frac{15}{64}$·

Καὶ $-\frac{5}{8} \cdot +\frac{3}{8} = -\frac{15}{64}$· καὶ $+\frac{5}{8} \cdot -\frac{3}{8} = -\frac{15}{64}$· Καὶ ἐν γράμμασιν.

$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$· Καὶ $-\frac{\alpha}{\beta} \times -\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$. Καὶ $\frac{\alpha}{\beta} \times -\frac{\gamma}{\delta} = -\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$·

Καὶ $-\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\beta} = -\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$· Ὡσαύτως καὶ εἰ ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἴη, ἢ νόθον κλάσμα, ἢ ἑκάτεροι νόθα κλάσματα.

Περὶ τῆς τῶν κλασμάτων διαιρέσεως·

§. 144. Ἐν τῇ τῶν κλασμάτων διαιρέσει ἀριθμὸν ζητεῖν πρόκειται, ποσάκις ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται:, ἐμφαίνοντα, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν· (§. 82.) ὁ δὲ ζητούμενος τὸ πηλίκον ἐςίν· οἷον ἔςω διαιρετέον $\frac{3}{4}$ διὰ τοῦ $\frac{2}{3}$, ὅ ἐςι, ζητητέον, ποσάκις ὁ $\frac{3}{4}$ περιέχει τὸν $\frac{2}{3}$· ἐνταῦθα ἀπαντῶσι διάφοροι τρόποι.

1) Ὁ διαιρέτης ἐςὶν ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, ὁ δὲ διαιρετέος κλάσμα, γνήσιον, ἢ νόθον· ἢ τὸ ἀνάπαλιν·

2) Ὁ