Περὶ τῶν κλασμάτων·

§. 115. Ἐπὶ τῆς διαιρέσεως, ὁ διαιρέτης ἦν ἐλάσσων τοῦ διαιρετέου, περιεχόμενος ἐν τούτῳ ἅπαξ, ἢ πολλάκις, ὅ διὰ τοῦ πηλίκου γνωςὸν ἡμῖν ἐγίνετο· ἐνίοτε δὲ καὶ λείψανον ὑπελείπετο· ἀλλὰ ληφθήτω ἤδη ὁ διαιρέτης μείζων τοῦ διαιρετέου· καὶ α΄· ἐπὶ τῆς μονάδος· ἤτοι διαιρεθήτω ἡ μονὰς διὰ 2, 3, 4, κτ· ὅπερ γραφόμενον οὕτως ἀποδοθήσεται (§. 85.) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, κτ· ἐνταῦθα ὁ διαιρέτης οὐδ᾽ ἅπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται· δύναται μέντοι μονάς τις ἤτοι ἐνεργείᾳ, ἢ γοῦν ἐπινοίᾳ ἀείποτε εἰς 2, 3, καὶ πλείω μέρη διαιρεθῆναι· ταῦτα δὲ, (τὰ μέρη) ἢ δῆλον, οὐχ ὅλα, ἀλλὰ μέρη εἰσὶ τοῦ ὅλου, **Κλάσματα** καλούμενα·

Οὕτω τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{1}{2}$ ἐςὶν ἡ ἡμίσεια μονὰς, καὶ καλεῖται ἥμισυ· τοῦ $\frac{1}{3}$, τὸ γ΄· μέρος τῆς μον· τριτημόριον λεγόμενον· τοῦ $\frac{1}{4}$, τὸ δ΄. μέρος τῆς μον· τεταρτημόριον λεγόμ. κτ· ὅλως δὲ, ταῦτα τὰ κλάσματα, ἅπερ ἅμα καὶ τὸ πηλίκον παριςῶσι, (§. αὐτ. σχ.) τὴν προσηγορίαν εἰλήφασιν ἐκ τοῦ πλήθους τῶν μερῶν, εἰς ἃ ἡ μονὰς διήρηται, ὡς καὶ κατωτέρω ῥηθήσεται.

Σχόλιον.

Ἐὰν ἀριθμός τις διά τινος ἄλλου, ὡς ὁ 7 διὰ 3, δὲν διαιρῆται, τοῦτο νοητέον οὕτως· ὅτι δηλαδὴ τὸ πηλίκον δὲν ἠμπορεῖ νὰ παρασαθῇ δι᾽ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, ὄχι ὅμως, ὅτι εἶναι ἀπολύτως ἀδύνατον νὰ λάβωμεν ἰδέαν τοῦ πηλίκου· νόει μοι μίαν γραμμὴν 7 ποδιαίαν· ἡ ὁποία χωρὶς ἀμφιβολίαν εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη, τῶν ὁποίων μερῶν τοῦ μεγέθους λαμβάνομεν καὶ πάνυ τὴν ἰδέαν.

§. 116.

§. 116. Ἀλλὰ καὶ εἰς ὅσα ἂν βούλῃ μέρη, τὴν μονάδα διαιρεθῆναι ἔχειν οὐ χαλεπὸν συνιδεῖν· εἰς 5 γὰρ, 6, 10, 30, 80, 1000, καὶ εἰς ἔτι πλείω, ἢ ἐλάττω μέρη ταύτην διελὼν οὕτω ταῦτα δηλώσεις $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{1000}$ κτ· τοῦτο δ' ἂν εἴη τῆς μονάδος τὸ ε΄· ϛ΄· ι΄· λ΄· π΄· καὶ ᾳον μέρος.

§. 117. Ἐὰν οὖν τῆς μονάδος εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διαιρεθείσης, π. χ. εἰς 3, ἢ 4, ἢ κτ· ἓν τούτων ληφθῇ, ὡς $\frac{1}{3}$, ἔξεςί σοι βουλομένῳ καὶ ἔτι ἓν μέρος ἐκείνῳ προσθεῖναι· καὶ οὕτως ἕξεις $\frac{1}{3}$, καὶ ἔτι $\frac{1}{3}$, ἤτοι δύω τριτημόρια, ἢ τρίτα, οὕτω ταῦτα γράψας ($\frac{2}{3}$)· καὶ ἔτι ἓν δὲ προσθεὶς ἕξεις $\frac{3}{3}$. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον χωροῦντός σου, καὶ ἀεὶ ἓν ἴσον μέρος τοῖς προληφθεῖσι προσαθροίζοντος, προκύψουσι ($\frac{4}{3}$)· δ΄ τρίτα· ($\frac{5}{3}$)· ε΄ τρίτα, κτ ἅπερ πάντα κλάσματα καλοῦνται· ὡς $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1000}{4}$, κτ· εἰσὶ κλάσματα, ὡσαύτως ἀναφυέντα, εἴτουν τῷ $\frac{1}{4}$ διηνεκῶς καὶ ἑτέρου ἴσου μέρους προςιθεμένου· τὰ οὖν κλάσματα, ὁποῖα ἂν ὦσι, τῷ εἰρημένῳ τρόπῳ ἀνακύπτουσι· π. χ. $\frac{7}{25}$. ἐνταῦθα διῄρηται ἡ μονὰς εἰς 25 ἴσα μέρη· καὶ ἀεὶ ἑνὸς τούτων λαμβανομένου, συμπεπλήρωται τὰ 7 μέρη, τουτέςιν $\frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{7}{25}$. καὶ τοῦτο γίνεται ἐπὶ πάντων, ἡλίκος ἂν ᾖ ὁ διαιρέτης.

§. 118. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἴσος ᾖ τῷ διαιρετέῳ, τὸ πηλίκον ἔςαι = 1· (§. 84. σχ.) ἐλάττονος δὲ ὄντος, ἢ ὁ διαιρετέος, τὸ πηλ. ἔςαι μεῖζον τῆς 1· τότε γὰρ περιέχεται ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέῳ ἅπαξ, ἢ τοσάκις· μείζονος δὲ, ἢ ὁ διαιρετέος. τὸ πηλίκον ἐξ ἀνάγκης ἐλαττωθήσεται τῆς 1· (ἐὰν ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς διὰ τοῦ μείζονος διαιρῆται, προκύπτει πηλίκον ἔλαττον τῆς 1· π. χ. εἰ γραμμὴ δύω ποδῶν εἰς 3. ἴσα μέρη διατμηθῇ, ἕκαςον τούτων προφανῶς ἔλαττον ἔςαι

τοῦ

τοῦ ποδός·) τὰ κλάσματα, ὧν ὁ διαιρέτης μείζων τοῦ διαιρετέου, ὅ ἐςι τὰ ἐλάττονα τῆς 1, καλοῦνται γνήσια· ὡς $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{5}{30}$, κτ· ὧν δὲ ὁ διαιρέτης ἐλάσσων τοῦ διαιρετέου, νόθα· οἷον $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{27}{20}$, κτ· τὰ τοιαῦτα ἄμεινον ἂν διὰ δύω μελῶν, ἢ ὅρων παραςαῖεν, τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου διαιρεθέντος, καὶ τῷ ὁλοσχερεῖ πηλίκῳ τοῦ λειψάνου παραρτηθέντος, ὑπογραφομένου τῷ λειψάνῳ καὶ τοῦ διαιρέτου· ὡς $\frac{12}{7}$ εἴη ἂν $= 1 + \frac{5}{7}$· καὶ $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$· (§. 86. σχ.) τὰ δὲ ἴσον τὸν διαιρετέον τῷ διαιρέτῃ ἔχοντα εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· ὡς $\frac{4}{4} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{5}{5} = \frac{8}{8} = \frac{100}{100} = 1$· ἐν πᾶσι γὰρ τούτοις ὁ διαιρέτης ἅπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεται·

§. 119. Ὁ μὲν ἐπὶ τὴν γραμμὴν ἀριθμὸς, ἢ ὁ διαιρετέος, ἀκούει Ἀριθμητὴς, ὡς τὰ παραληφθέντα μέρη τῆς εἰς ἴσα μέρη διαιρεθείσης μονάδας ἀριθμῶν, ἢ ὡς δεικνύων, ὁπόσα μέρη τῆς μονάδος ἐπὶ τοῦδε τοῦ κλάσματος παρείληπται· ὁ δ' ὑπ' αὐτὴν, ἤτοι ὁ διαιρέτης, Παρονομαςὴς κέκληται, ὡς, εἰς ὅσα μέρη ἴσα ἡ μονὰς διήρηται, ἐκφέρων· ἄμφω δὲ κοινῷ ὀνόματι, ὅροι τοῦ κλάσματος.

§. 120. Ἐπειδὴ διὰ τῶν γραμμάτων πᾶσα ποσότης, ἢ ἀριθμὸς δηλοῦται· καὶ κλάσματα, ὡς δῆλον, ταῦτα διασημάναι ἔχουσι· π. χ. $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\nu}{\nu}$. ἔνθα ὡσαύτως τὸ μὲν ἄνω ἀριθμητὴς, τὸ δὲ κάτω παρονομαςὴς καλεῖται, ἀπαγγελλόμενα διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, α β μόριον· $\frac{\gamma}{\delta}$, γ δ μόριον· ἐὰν δὲ καὶ τούτων ὁ ἀριθμητὴς ἢ ὁ αὐτὸς τῷ παρονομαςῇ, ἔςαι $= 1$· τότε γὰρ ὁ διαιρέτης ἅπαξ τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριέχεριέχεται· ἀλλὰ καὶ ἀλλήλοις ἴσα διὰ τὸ (§. 48. δ'.) ἕκαςον γὰρ τούτων = 1· ὥςε $\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\delta}{\delta} = 1$.

§. 121. Ἐπὶ τῆς κοινῆς διαιρέσεως δύνανται πηλίκα διαφόρων παραδειγμάτων ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, καί τοι τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιρετέου τῶν παραδ. ἀνίσων ὄντων· τοῦτο μόνον παρατηρητέον, εἰ ἐν τοῖς διαφόροις παραδείγμ· ὁ διαιρετέος τὸν διαιρέτην ἐπίσης τοσάκις περιέχει· ὡς π. χ. τὰ πηλίκα τοῦ 8 διὰ τοῦ 4 διαιρεθέντος, καὶ τοῦ 12 διὰ τοῦ 6 εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· ἄμφω = 2· ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ κλάσματι ὁ μὲν ἀριθμ. ὡς διαιρετέος, ὁ δὲ παρονομ. ὡς διαιρέτης θεωρεῖται, καί τοι τῆς διαιρέσεως ἀεὶ ἐνεργείᾳ γενέσθαι ἀδυνατούσης, δῆλον, ὅτι καὶ διάφορα κλάσματα ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται, τῶν ἀριθμητῶν, καὶ παρονομαςῶν διαφόρων ὄντων· ὡς $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$· ὃ καὶ κατωτ· δειχθήσεται. Καὶ ὥσπερ ἐπὶ τῶν τῆς διαιρέσεως παραδ· ἐν οἷς ὁ διαιρετέος διάφορος τοῦ διαιρέτου, τὰ πηλίκα εἰσὶ μείζω, ἢ ἐλάττω πρὸς ἄλληλα παραβαλλόμενα, ᾗπερ ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέῳ πλεονάκις, ἢ ἐλαττονάκις ἐμπεριέχοιτο, οὕτως ἐροῦμεν καὶ περὶ τῶν κλασμάτων· καὶ ταῦτα γάρ, ἐν διαφόροις ἀριθμηταῖς, καὶ παρονομαςαῖς, θάτερον θατέρου μεῖζον ἂν εἴη, ἢ ἔλαττον· ὅπερ διὰ τῆς διαιρέσεως ἀναφανήσεται, εἰ ἐγχωρεῖ· ὅπως οὖν τὸ μεῖζον, ἢ ἔλαττον τῶν κλασμάτων πρὸς ἄλληλα παρεξεταζομένων διαγνωσθήσεται, δεικτέον ἤδη, τὴν ἐν χρήσει μέθοδον παραλαμβάνοντας, καὶ ἑτέραν τινὰ ἐν οἰκείῳ τόπῳ ἀποταμιεύοντας.

§. 122. Καὶ δὴ ἀρκτέον ἀπὸ τῶν ἐλαχίςων· δύω κλασμάτων προκειμένων, πρὸς ἄλληλα ταῦτα παραβαλεῖν ἐθέλουσι, θεωρητέον, εἰ τοὺς αὐτούς, ἢ μὴ μή, παρονομαςὰς ἔχουσι· καὶ Εἰ μὲν τὸ α΄· ἡ τούτων παράθεσις καθ᾽ ἑαυτὴν δήλη· μεῖζον γὰρ ἔςαι, οὗ μείζων ὁ ἀριθμητὴς· ὡς $\frac{2}{6}$, καὶ $\frac{5}{6}$· ἔνθα καταφανὲς τὸ $\frac{5}{6}$ μεῖζον εἶναι τοῦ $\frac{2}{6}$· ἐκεῖνο γὰρ μείζονα ἔχει τὸν ἀριθμητήν· ὅ ἐςιν, ἐπ᾽ ἀμφοῖν τῆς μονάδος εἰς 6 ἴσα μέρη διαιρεθείσης, ἐν μὲν τῷ $\frac{2}{6}$ ἐλήφθησαν 2, ἐν δὲ τῷ $\frac{5}{6}$, 5 τούτων τῶν μερῶν· τὸ δὲ $2 < 5$· ἄρα, κτ· ὡσαύτως καὶ τῶν $\frac{12}{133}$ καὶ $\frac{24}{133}$ τὸ β΄. ἐςὶ μεῖζον τοῦ α΄· Εἰ δὲ τὸ β΄· πειρατέον, εἰ οἷόντε, τὰ κλάσματα οὕτω μεταβαλεῖν, ὥςε τοῦ αὐτοῦ ἄμφω παρονομαςοῦ μετασχόντα, τὴν προτέραν αὐτῶν δύναμιν πάντη ἀμετάβλητον διατηρῆσαι· ῥᾷον γὰρ ἐκ τούτου πρὸς ἄλληλα παραβληθήσονται· ἡ δὲ πρᾶξις καλεῖται, **κλάσματα ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ἀνάγειν**· ἐν τῷ (§. 114. δ΄.) δέδεικται, ποσότητα οἱανοῦν, μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιαζομένην, καὶ διαιρουμένην, μηδεμίαν τροπὴν ὑφίςασθαι· ὅσῳ γὰρ αὔξεται, τοσούτῳ καὶ μειοῦται ἀλλ᾽ ἐπὶ τοῦ κλάσματος ὁ μὲν ἀριθμ. θεωρεῖται ὡς διαιρετέος, ὁ δὲ παρονομ. ὡς διαιρέτης· ἐὰν οὖν ἄμφω (ἀριθμ. καὶ παρ.) διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι, τὸ αὐτὸ ἐςιν, ὥσπερ ἂν εἰ ἡ ποσότης οὐδόλως μεταβάλλοιτο· οἷον εἰ τοῦ $\frac{4}{5}$ τὸν ἀριθμητὴν 4 τῷ 7 πολλαπλασιάσομεν, τουτέςι 7: κις αὐξήσομεν, ὡσαύτως καὶ τὸν παρανομ. οὐ τρέπει τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$· ὅ πολλαπλασιασθὲν οὕτως ἀποδοθήσεται $\frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{28}{35}$. ἀληθεύσει δὲ τοῦτο, καὶ εἰ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἄμφω διαιρήσομεν· τοσούτῳ γὰρ ὁ διαιρετέος, ἤτοι ὁ ἀριθμ. μειωθήσεται, ὅσῳ καὶ ὁ διαιρέτης, ἤτοι ὁ παρον· καὶ τὸ πηλίκον ἄρα μενεῖ τὸ αὐτό (§. 114. ε΄.) οἷον $\frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$. τοῦτο ῥητέον καὶ περὶ τῶν γραμμάτων· ἐπειδὴ γὰρ $\frac{\alpha}{\beta}$ πᾶν

κλάσμα

κλάσμα παριςᾷ, καὶ $\frac{\mu}{\mu} = 1$· (§. 84. σχ.) ἄρα καὶ $\frac{\alpha.\mu}{\beta.\mu}$ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ οὐ διάφορον· ἔςι γὰρ $\frac{\alpha.\mu}{\beta.\mu} = \frac{\alpha.1}{\beta.1}$ (§. αὐτ.) $= \frac{\alpha}{\beta}$. (§. 65.). διὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ $\frac{\alpha:\mu}{\alpha:\mu}$ οὐδόλως διαφέρει τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$. ὅτι $\frac{\alpha:\mu}{\alpha:\mu} = \frac{\alpha:1}{\beta:1} = \frac{\alpha}{\beta}$. ἐξ οὗ ὁ κανών.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς, καὶ παρονομ. ἑκάςου κλάσματος μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἄμφω πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι, τὸ κλάσμα οὐδόλως μεταβάλλεται·

§. 123. Οὐδὲν οὖν δυσχερὲς, τοῦτο εἰδόσι, δύω δοθέντα κλάσματα ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ἀνάγειν, ἤτοι τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ἑκατέρῳ διδόναι· ἔςαι δὲ τοῦτο τῷ πολλαπλασιασμῷ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ παρονομαςοῦ ἑκατέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαςὴν τοῦ ἑτέρου· ὡς $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{5}{6}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ἀναχθέντα ἔςαι $\frac{4}{5} = \frac{4.6}{5.6}$. καὶ $\frac{5}{6} = \frac{5.5}{6.5}$. ἔνθα ὁρᾷς, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμ. καὶ ὁ παρ. ἑκατέρου κλάσμ. τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἐπολλαπλασιάσθησαν, τοῦ μὲν α΄. κλ. τῷ 6, τοῦ δὲ β΄. τῷ 5· οὐ μεταβέβληνται ἄρα (§. ἀνωτ.). ὥςε $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{5}{6} = \frac{4.6}{5.6}$ καὶ $\frac{5.5}{6.5} = \frac{24}{30}$, καὶ $\frac{25}{30}$. καὶ ὅτι ἀμφοῖν τοῖς κλάσμασι παρονομαςὴς ὁ αὐτὸς προσεγένετο· τὸ δ᾽ ἐν ἀντιςρόφῳ τῇ τάξει τοὺς παράγοντας εἶναι τοῦ παρονομαςοῦ, οὐδὲν πρὸς ἔπος· τοῦτο γὰρ οὐδεμίαν ἐμποιεῖ διαφοράν. (§. 58.)

Προκεί-

Προκείσθω ἤδη καὶ ἕτερα παραδείγματα·

$\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{5}{7} = \frac{3\cdot 7}{8\cdot 7}$ καὶ $\frac{5\cdot 8}{7\cdot 8} = \frac{21}{56}$ καὶ $\frac{40}{56}$.

ὡσαύτως $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{7} = \frac{1\cdot 7}{4\cdot 7}$ καὶ $\frac{1\cdot 4}{7\cdot 4} = \frac{7}{28}$ καὶ $\frac{4}{28}$.

$\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{7}{12} = \frac{3\cdot 12}{4\cdot 12}$ καὶ $\frac{7\cdot 4}{12\cdot 4} = \frac{36}{48}$ καὶ $\frac{28}{48}$.

Τούτων οὖν τεθέντων, πότερον τούτων μεῖζον, ῥᾳδίως γνωσόμεθα· μεῖζον γὰρ ἔςαι τὸ μείζονα ἔχον ἀριθμητὴν· τούτῳ τῷ τρόπῳ τοῦ κλάσματα δύω ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀνάγειν παρονομ. καὶ ἐπὶ τῶν τοῖς γράμμασι παριςαμένων κλασμάτων χρησόμεθα, ὡς καὶ τούτων ποσότητας καὶ ἀριθμοὺς σημαινόντων, καὶ ἐν ὑπολογισμῷ τῷ αὐτῷ τῶν αὐτῶν γραμμάτων τὴν αὐτὴν ποσότητα· (§. 42. σχ.)·

Εἰ δέοι $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ὑπὸ τὴν αὐτὴν παρονομασίαν ἀγαγεῖν, ἔςαι $= \frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta}$ καὶ $\frac{\gamma \times \beta}{\delta \times \beta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta}$ καὶ $\frac{\gamma\beta}{\delta\beta}$.

Αὖθις $\frac{\nu}{\mu}$ καὶ $\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\nu . \sigma}{\mu . \sigma}$ καὶ $\frac{\rho . \mu}{\sigma . \mu} = \frac{\nu\sigma}{\mu\sigma}$ καὶ $\frac{\rho\mu}{\sigma\mu}$.

καὶ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{\rho}{\mu} = \frac{1 . \mu}{2 . \mu}$ καὶ $\frac{2 . \rho}{2 . \mu} = \frac{\mu}{2\mu}$ καὶ $\frac{2\rho}{2\mu}$.

§. 124. Ἀλλὰ καὶ πλείω κλάσματα παραβαλεῖν θέλοντες τὸν αὐτὸν χωρήσομεν τρόπον, τουτέςι, πάντων τῶν κλασμάτων, ὅσα ἂν παρῇ, ἑκάςου τὸν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαςὴν ἐπὶ τοὺς παρονομαςὰς τῶν ἑτέρων πολλαπλασιάσομεν.

Ὅτι

Ὅτι οὖν πάντα τὸν αὐτὸν λαμβάνουσι παρονομαστὴν, δῆλον ἐκ τοῦ τὸν παρονομαστὴν ἑκάστου τῷ πολλαπλασιασμῷ ἴσων παραγόντων ἀναφύεσθαι, ὡς μετὰ τῶν λοιπῶν ἁπάντων παρονομαστῶν πολλαπλασιαζόμενον· ὅτι δὲ οὔτε τὴν δύναμιν αὐτῶν μεταβάλλει, φανερὸν ἐκ τοῦ ἐφ' ἑκάστου τούτων, πλὴν τοῦ ἰδίου ἀριθμητοῦ, καὶ παρον· τῷ ἀριθμ. καὶ παρον. ἴσους παράγοντας προσεῖναι· τοῦτο δ' ἐστι ταὐτὸν, ὥπερ εἰ ποσότης τις ἐν τῷ διαιρετέῳ, καὶ διαιρέτῃ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ πεπολλαπλασίασται·

Παραδείγματα·

$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, = \frac{2.4.6.2}{3.4.6.2}$ καὶ $\frac{3.3.6.2}{4.3.6.2}$ καὶ $\frac{5.3.4.2}{6.3.4.2}$ καὶ $\frac{1.3.4.6}{2.3.4.6} = \frac{96}{144}$ καὶ $\frac{108}{144}$ καὶ $\frac{120}{144}$, καὶ $\frac{72}{144}$. ἤδη τοίνυν παραβληθήτωσαν·

Αὖθις $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} = \frac{1.3.4.5.6.7}{2.3.4.5.6.7}$ καὶ $\frac{1.2.4.5.6.7}{3.2.4.5.6.7}$ καὶ $\frac{1.2.3.5.6.7}{4.2.3.5.6.7}$ καὶ $\frac{1.2.3.4.6.7}{5.2.3.4.6.7}$ καὶ $\frac{1.2.3.4.5.7}{6.2.3.4.5.7}$, καὶ $\frac{1.2.3.4.5.6}{7.2.3.4.5.6} = \frac{2520}{5040}$ καὶ $\frac{1680}{5040}$ καὶ $\frac{1260}{5040}$ καὶ $\frac{1008}{5040}$ καὶ $\frac{840}{5040}$ καὶ $\frac{720}{5040}$.

§. 125. Ὡσαύτως ἀνάξομεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν παρονομασίαν καὶ κλάσματα πλείω ἀλγεβραϊκὰ διὰ λόγου τὸν αὐτόν· ὡς $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha\delta\zeta}{\beta\delta\zeta}, \frac{\gamma\beta\zeta}{\delta\beta\zeta}$, καὶ $\frac{\varepsilon\beta\delta}{\zeta\beta\delta}$.

Αὖθις $\frac{\nu}{\mu}, \frac{\rho}{\sigma}, \frac{\chi}{\upsilon}, \frac{\iota}{\chi} = \frac{\nu\sigma\upsilon\chi}{\mu\sigma\upsilon\chi}, \frac{\rho\mu\upsilon\chi}{\sigma\mu\upsilon\chi}, \frac{\chi\mu\sigma\chi}{\upsilon\mu\sigma\chi}, \frac{\mu\sigma\upsilon}{\chi\mu\sigma\upsilon}$.

Σχόλ.

Σχόλιον.

Τὰ δι' ἀριθμῶν κλάσματα, ὁποῦ ἔχουν νὰ ἀναχθοῦν εἰς κοινὸν παρονομαστὴν, ἠμποροῦν ἐνίοτε νὰ παρασταθοῦν ἐπιτομώτερον· λόγος δὲ ὁ ἐν (§. 122. καν.) ἐνίοτε δηλονότι διὰ νὰ μὴ προκύπτῃ πάνυ μέγα τὸ παραγόμενον, (ὅταν δέῃ νὰ ἀνάξωμεν πολλὰ κλάσμ. εἰς τὸν αὐτὸν παρον.) εἶναι ἀναγκαῖον εἰς μερικὰ κλάσματα νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν μὲ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν, εἰς ἄλλα δὲ μὲ ἐκεῖνον, καὶ εἰς ἄλλα νὰ διαιρῶμεν μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν ἀριθμ. καὶ παρον. μάλιστα δὲ συμβαίνει τοῦτο, ἂν οἱ παρονομασταὶ τῶν διαφόρων κλασμάτων οὕτως ἔχωσιν, ὥστε, ἐὰν οἱ μείζονες παρονομασταὶ ἐν τοῖς διαφόροις κλάσμασι κατατμηθῶσιν εἰς παράγοντας, οἱ ἐλάττους παρονομασταὶ, ἐν μέρει δὲ καὶ ἀριθμηταὶ, περιέχονται ἐν τοῖς μείζοσι παράγουσι· π. χ. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{3}{12}$· ἐνταῦθα ἐν τοῖς παράγουσι τῶν μειζόνων παρονομαστῶν, τοῦ 16, καὶ 12, (ὧν ὁ μὲν ἐκ τοῦ 4×4· ὁ δὲ ἐκ τοῦ 3×4 προκύπτει) περιέχονται καὶ οἱ ἐλάσσους παρον. 2, καὶ 4· ὁ οὖν μικρὸν διασκεπτόμενος εὑρήσει, ὅτι ὁ 4 ἠμπορεῖ νὰ γένῃ ὁ τούτων κοινὸς παρονομαστής. ὥστε πολλαπλασιασθήτω ἐν τῷ α' κλάσματι ὁ ἀριθμ. καὶ παρον. μετὰ τοῦ 2, καὶ προκύψει $\frac{2}{4}$· τὸ β' κλάσμα μένει ἀμετάβλητον, ὡς ἔχον παρονομαστὴν τὸν 4· ἤτοι $\frac{3}{4}$. ἐν τῷ γ' κλ· διαιρεθέντων τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ παρονομ. διὰ 4, ἕξομεν τὸ $\frac{1}{4}$· καὶ ἐν τῷ δ' τελευταῖον διὰ 3, ὡσαύτως $\frac{1}{4}$· ἔστιν οὖν $\frac{1.2}{2.2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4:4}{16:4}$, $\frac{3:3}{12:3} = \frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$. ἡ τοιαύτη μὲ συντομίαν παράστασις μανθάνεται διὰ τῆς συχνῆς ἀσκήσεως· ἀλλὰ χάριν τῶν πρωτοπείρων προκείσθω καὶ ὁ ἑξῆς κανών·

Ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς, ὁ δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ τῶν δοθέντων κλασμάτων διαιρέσιμος, προκύψει, ἐὰν πάντες οἱ ἐλάσσους παρονομασταὶ, καὶ πάντες οἱ παράγοντες τῶν ἐλασσόνων παρονομαςῶν, οἱ τοῖς μείζοσι παρονομ. ἐμπεριεχόμενοι, παραλείπωνται, οἱ δ' ὑπολειφθέντες παρονομαςαὶ, καὶ παράγοντες τῶν παρονομαςῶν μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιάζωνται.

Ἔςωσαν τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$. Ἔςιν ἄρα 2 ἐν 4, 3 ἐν 6, καὶ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ 4, ἤτοι ὁ 2, ὁμοίως ἐν 6 περιεχόμενος· ὥςε $2 \times 5 \times 6 = 60$, τῷ ἐλαχίςῳ κοινῷ παρονομαςῇ, ὃν τὰ κλάσματα ταῦτα ἕξουσιν· ἀναχθέντα τοίνυν ὑπὸ κοινὸν παρονομαςὴν ἔςαι $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $=$ $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$.

Ἔςωσαν δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{12}$. ὁ οὖν 2 περιέχεται ἐν τῷ 4, ὁ 3 ἐν τῷ 6, ὁ 4 ἐν 8, ὁ 6 ἐν 12, καὶ ὁ ἕτερος παράγων τοῦ 8, ἤτοι ὁ 4, ὡσαύτως ἐν 12. ὥςε $2 \times 12 = 24$, τῷ ἐλαχίςῳ κοινῷ παρονομαςῇ αὐτῶν· ἔνθεντοι, εἰ ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν ταῦτα ἀνάξομεν, ἔςαι

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{8},\ \frac{3}{12},\ =\ \frac{12}{24},\ \frac{16}{24},\ \frac{18}{24},\ \frac{20}{24},\ \frac{21}{24},\ \frac{6}{24}.$$

Ἔςωσαν δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{15}$· ἐνταῦθα ὁ 2 περιέχεται ἐν 6, ὁ 3 ἐν 6, ὁ 5 ἐν 10, ὁ ἕτερος παράγων τοῦ 6, ὁ 3, ἐν 15, ὁ δ' ἕτερος, ἤτοι ὁ 2, ἐν 10· καὶ τελευταῖον τοῦ 10 ὁ ἕτερος παράγων 5 ἐν 15· ὅθεν $2 \times 15 = 30$, τῷ ἐλαχίςῳ κοινῷ παρονομαςῇ αὐτῶν·

Ἔνθεντοι, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{15}$ $=$ $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{6}{30}$, $\frac{25}{30}$, $\frac{9}{30}$, $\frac{14}{30}$· ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρον. ἀναχ.

Τελευταῖον ἔςωσαν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$· ἐνταῦθα οὐδεὶς τῶν παρονομαςῶν περιέχει ἕτερόν τινα· ὥςε $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$· τῷ ἐλ. κ. παρ· ὥςε $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $=$ $\frac{105}{210}$, $\frac{70}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{90}{210}$, ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρ' ἀν·

§. 125. Ἐν τῷ §. 122. καν. δέδεικται, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιάζωμεν, ἢ διαιρῶμεν τὸν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαςὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα οὐ μεταβάλλεται· Καὶ ἔσονται ἄρα πλείω τῶν κλασμάτων ἰσοδύναμα, καίτοι διάφορα τῷ σχήματι δοκοῦντα· π. χ. $\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{24}{36} = \frac{80}{120}$, κτ. ταῦτα πάντα προέκυψε τῷ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαςὴν τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ νῦν μὲν, τῷ 5, νῦν δὲ, τῷ 6, εἶτα, τῷ 12, καὶ τέλος, τῷ 40 πολλαπλασιασθῆναι· τοῦτο δὲ εἴασεν ἄτρεπτον τὸ κλάσμα. (§. αὐτ.) ἀλλ' ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα ῥᾷον τῇ διανοίᾳ ἀνατυπούμεθα, εἰ οἱ τούτου ὅροι, ὁ ἀριθμ. καὶ παρονομαςὴς, ἐλάσσονές εἰσιν, ὡς δυνατὸν, ἢ εἰ μείζους εἶεν, ὡς τῶν $\frac{2}{3}$, καὶ $\frac{80}{120}$ τὸ α'. μᾶλλον εὐξύνετον· οὐκ ὀλίγα δὲ κλάσματα ἀπαντῶσιν, ὧν οἱ ὅροι μέγιςοι, εὑρήσομεν τοὺς ἐλαχίςους ὅρους, εἰ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ παρονομ. διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρήσομεν, τῆς τοῦ κλάσματος δυνάμεως ἀτρέπτου διὰ τοῦτο διαμενούσης· (§. αὐτ.) ἐπὶ οὖν τῶν ὀλιγαρίθμων κλασμάτων ἀποπειρωμένοις πάρεςαι ἡμῖν ἀριθμὸν ἀνιχνεῦσαι, δι' οὗ ὁ ἀριθμ. καὶ παρ. διαιρεθέντες τοὺς ἐλαχίςους ὅρους παράξουσιν· ἐν κλάσμασι δὲ, ὧν ὁ. ἀριθ. καὶ παρ. ἐκ πολλῶν σύγκεινται χαρακτήρων, οὐκ ἂν τοῦτο ῥᾳδίως γένοιτο· ἔνθεντοι, κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα (§. 113.) τρόπον ζητήσομεν τὸν μέγιςον κοινὸν διαιρέτην δύω ἀριθμῶν, (διαιροῦντες τὸν μείζονα διὰ τοῦ ἐλάσσονος) οὗ εὑρεθέντος, ποιήσομεν τοῦτον εἰς διαιρέτην τοῦ ἀριθμ. καὶ παρον. καὶ οὕτω προκύψει τὸ κλάσμα ἐν τῷ ἐλαχίςῳ σχήματι· ὡς τοῦ $\frac{384}{812}$ ὁ μέγ. κοινὸς διαιρέτης ἀμφοῖν (§. αὐτ.) ἐςὶ 4· ὥςε $\frac{384:4}{812:4} = \frac{96}{203}$. τὸ οὖν $\frac{96}{203}$ οὐκ ἔτι ἂν εἰς ἐλάσσονας ὅρους ἀναχθείη· ἐὰν δὲ οὐδὲν μέγιςον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν ἔχωμεν ἕτερον, εἰ μὴ τὴν 1· ἐπειδὴ αὕτη οὐ διαιρεῖ. (§. 96. σχ.) καὶ τὸ τοῦ πραπροκειμένου κλάσματος σχῆμα, ἡλίκον ἂν ᾖ, εἰς ἔλαττον ἀνάξαι οὐχ οἷόντε· ὡς τὸ $\frac{53}{120}$, κτ.

Σχόλιον.

Ἂν ἡ μονὰς, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐλάβομεν τὸ κλάσμα, ἦναι πολλὰ μικρὰ, ὥςε ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ἓν μόριον τοῦ παρονομαςοῦ δὲν σημαίνει πολὺ τίποτε, συνηθίζουν νὰ προσθέτουν εἰς τὸν ἀριθμητὴν, ἢ παρονομαςὴν ἀκόμη ἓν μόριον, ἂν διὰ τούτου ἠμποροῦν νὰ ἀναχθοῦν εὐκολώτερα εἰς ἐλάσσονας ὅρους. π. χ· ἂν τὰ ἀνωτ. $\frac{53}{120}$ ἤθελαν ἦναι μόρια ἑνὸς δακτύλου, ἤτοι, ὁ δάκτυλος διῃρημένος εἰς 120 μόρια, ἐξ ὧν ἐλάβομεν τὰ 53, καὶ ὁ ὑπολογισμὸς δὲν ζητῇ μεγάλην ἀκρίβειαν, εἶναι δυνατὸν τὸ $\frac{53}{120}$ νὰ γένῃ $\frac{54}{120}$, οὗ ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 6· ὥςε $\frac{54}{120} = \frac{54:6}{120:6} = \frac{9}{20}$.

§. 126. Εἰ πρόκεινται νόθα κλάσματα εἰς ἐλαχίστους ὅρους ἀναχθῆναι, γενέσθω α'· τὸ (§. 118.) περὶ αὐτῶν ῥηθέν· ὅτε καὶ τὸ παρηρτημένον κλάσμα ῥᾷον μεταχειρισθείη, τῆς μεθόδου (§. ἀνωτ.) μὴ δεομένοις· οἷον $\frac{26}{4} = 6\frac{2}{4} = 6\frac{2:2}{4:2} = 6\frac{1}{2}$.

§. 127. Τὰ διὰ γραμμάτων κλάσματα, ἐὰν τούτοις καὶ συνεργοὶ (§. 47.) ἐνυπάρχωσιν, ἀναχθεῖεν ἂν εἰς ἐλάσσονας ὅρους, α'· εἰ συνεργοὺς ἄμφω οἱ ὅροι (§. 119.) ἔχουσιν, ὧν τὸ κοινὸν μέτρον, ἢ ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης εὑρεθῆναι ἔχει· β'· εἰ ἀμφοῖν τοῖς ὅροις τὰ αὐτὰ ἔνεισι γράμματα, ἢ γ'· εἰ ἑκάτερον αὐτοῖς πάρεσι· τότε γὰρ κρατεῖ ὡσαύτως τὰ ἐν (§. 125.) π. χ. τὸ $\frac{4\alpha\beta}{12\gamma}$ ἀνάξομεν εἰς ἐλαχίςους ὅρους, διαιροῦντες τῷ 4. ὡς κοινῷ μέτρῳ ὄντι (§. 113.) τοῦ 4, καὶ 12, ἔςαι οὖν $\frac{4\alpha\beta:4}{12\gamma:4} = \frac{1\alpha\beta}{3\gamma} = \frac{\alpha\beta}{3\gamma}$

(§. 69.)

(§. 69.) ὡσαύτως $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\delta\gamma} = \frac{\alpha\beta\gamma:\alpha\gamma}{\alpha\delta\gamma:\alpha\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$. (§. 114. ε΄.)

ἄλλωςδὲ οὐκ ἔνι· Τὰ γὰρ γράμματα, ὡς καθόλου ποσότητες, θεωρούμενα, ἀδιόριςά εἰσιν· ὥςε οὐδὲ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης τούτων ζητηθήσεται· ὡς τοῦ $\frac{\alpha\gamma}{\delta\beta}$, ἢ $\frac{3\alpha\beta}{5\gamma\delta}$, ἢ $\frac{\chi}{\psi\delta}$ ἡ ἐπ' ἐλάχιςον ἀναγωγὴ ἀμήχανος·

§. 128. Ἐπειδὴ ἡ 1. οὐ διαιρεῖ· (§. 96. σχ.) πᾶς ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς εἰς κλάσμα γενέσθαι δύναται, οὗ παρονομαςὴς ἡ 1. οἷον $6 = \frac{6}{1}$· $12 = \frac{12}{1}$; $116 = \frac{116}{1}$· Καὶ ἐν γράμμασιν· $\alpha = \frac{\alpha}{1}$· $\chi\psi = \frac{\chi\psi}{1}$· ὅπερ αὐτόθεν δῆλον· τὴν δὲ τούτου χρῆσιν κατωτέρω μαθησόμεθα·

§. 129. Μετὰ ταύτας τὰς περὶ τῶν κλασμάτων γνώσεις, ῥητέον ἤδη καὶ περὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσ. πολλαπλ. καὶ διαιρέσ. αὐτῶν·

Περὶ Προσθέσεως τῶν κλασμάτων·

§. 130. Ἐὰν τὰ κλάσματα ἔχῃ τοὺς αὐτοὺς παρονομαςὰς, ἥκιςα δυσχερὴς ἡ τούτων πρόσθεσις, ὡς ὁμοειδῶν ὄντων· τότε γὰρ, προσαθροισθεῖσι τοῖς ἀριθμηταῖς ὑπογραφήτω ὁ κοινὸς παρονομαςής· ὡς $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$· οὕτω ποιοῦμεν, καὶ πλειόνων τῶν κλασμάτων ὄντων· οἷον $\frac{1}{24} + \frac{5}{24} + \frac{7}{24} + \frac{8}{24} = \frac{21}{24}$· τοῦτο δὲ κατανοῆσαι καὶ πάνυ ῥᾴδιον· μέρη γὰρ μονάδων ἀλλήλοις προςεθῆναι πρόκεινται, τῆς μονάδος εἰς ἴσα μέρη διαιρεθείσης· οὕτω καὶ μετὰ τῶν γραμμάτων· $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}$

+ ν

$+ \frac{\nu}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma + \nu}{\beta}$· Καὶ $\frac{2\alpha}{\delta} + \frac{\chi}{\delta} + \frac{\varrho}{\delta} = \frac{2\alpha + \chi + \varrho}{\delta}$. ὁ δὲ λόγος ὁ αὐτός.

Σχόλιον.

Ἄς ληφθῶσιν $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8}$ ἑνὸς πήχεως· π. χ. ὑφάσματός τινος· τουτ. τεθήτω ὁ πῆχυς εἰς 8 ἴσα μέρη διῃρημένος, ἐξ ὧν ἐλήφθη 1 μέρος, καὶ ἔτι 2, καὶ τελευταῖον 5. εἰς τοῦτο δὲν εἶναι κἀμμία ἀμφιβολία, ὅτι ὅλα τὰ μέρη τὰ ληφθέντα ὁμοῦ εἶναι ἴσα μὲ 8, καὶ ἴσα ἀλλήλοις· ἐπειδὴ ἡ μονὰς, ἤτοι ὁ πῆχυς εἰς 8 ἴσα μέρη διῃρέθη· ὥστε $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1$. (§. 84. σχ.)

§. 131. Ἐὰν δὲ τὰ κλάσματα μὴ ὦσι τῆς αὐτῆς παρονομασίας, ἀναγκαῖον α΄· εἰς τὸν αὐτὸν ἀναχθῆναι παρονομαστὴν, τουτ: ὁμοειδῆ γενέσθαι, καὶ οὕτως εἶτα προσεθῆναι· (§. ἀνωτ.)

Ὡς $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1.3.2.8}{5.3.2.8} + \frac{1.5.2.8}{3.5.2.8} + \frac{1.5.3.8}{2.5.3.8} + \frac{1.5.3.2}{8.5.3.2}$ (§. 124.) $= \frac{48}{240} + \frac{80}{240} + \frac{120}{240} + \frac{30}{240} = \frac{48+80+120+30}{240} = \frac{278}{240} = 1\,\frac{38}{240}$ (§. 118.) $= 1\,\frac{19}{120}$ (§. 125.) σχεδὸν $= 1\,\frac{20}{120}$ (§. αὐτ. σχ.) $= 1\,\frac{1}{6}$. (§. 125.)

Καὶ ἐν γράμμασιν $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\nu}{\mu} + \frac{\chi}{\upsilon}$

$$= \frac{\alpha\delta\mu\upsilon}{\beta\delta\mu\upsilon} + \frac{\gamma\beta\mu\upsilon}{\delta\beta\mu\upsilon} + \frac{\nu\beta\delta\upsilon}{\mu\beta\delta\upsilon} + \frac{\chi\beta\delta\mu}{\upsilon\beta\delta\mu}$$

$= \frac{\alpha\delta\mu\upsilon + \gamma\beta\mu\upsilon + \nu\beta\delta\upsilon + \chi\beta\delta\mu}{\beta\delta\mu\upsilon}$· ἔνθα καὶ οὐδεμία ἀναγωγὴ εἰς ἐλάσσονας ὅρους χώραν ἔχει·

§. 132.

§. 132. Τὸν αὐτὸν τρόπον προσθήσομεν ἀλλήλοις καὶ τὰ νόθα τῶν κλασμάτων, (§. 118.) $\frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + = \frac{5.2.3+3.4.3.+1.4.2}{4.2.3} = \frac{30+36+8}{24} = \frac{74}{24} = 3\,\frac{2}{24}$ (§. αὐτ.) $= 3\,\frac{1}{12}$.

§. 133. Ἀλλὰ καὶ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς τοῖς κλάσμασι προσθεῖναι ἔχομεν, (ὡς οὐκ ὀλιγάκις ἡμῖν χρήσιμον τοῦτο ὄν) ὡς κλάσματα αὐτοὺς θεωροῦντες, (§. 128.), ὧν παρον. ἡ 1 καὶ μετὰ τοῦ κλάσματος εἰς τὸν αὐτὸν παρον· αὐτοὺς ἀνάξαντες τελέσομεν τὸ (§. 130.) οἷον $4 + \frac{3}{4} = \frac{4}{1} + \frac{3}{4} = \frac{4.4}{1.4} + \frac{3.1}{4.1} = \frac{16}{4} + \frac{3}{4} = \frac{19}{4} = 4\,\frac{3}{4}$.

Σχόλιον.

Κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον θέλει προκύψει τὸ κεφάλαιον τοῦ $4 + \frac{3}{4}$, ἤτοι τὸ $\frac{19}{4}$, κτ· πολὺ συντομώτερον· πολλαπλασίασον τὸν ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν μετὰ τοῦ παρον: τοῦ κλάσμ. καὶ προσθεὶς εἰς τὸ παραγόμενον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ποίησον τὸ κεφάλ. ἀριθμητὴν, παρονομασοῦ μένοντος τοῦ προτέρου· διότι οὐδεὶς ἕτερος παρονομασὴς εἶναι δυνατὸς, ὡσὰν ὁποῦ ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς ἔχει παρον· τὴν 1. ὁ δὲ καινὸς παρον· ἀνακύπτει διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν προτέρων παρονομ. εἰς ἀλλήλους· ἀλλ' ἡ μονὰς οὐ πολλαπλασιάζει.

Οἷον $4 + \frac{3}{4} = \frac{4.4+3}{4} = \frac{19}{4}$. Καὶ $2\,\frac{3}{4} = \frac{2.4+3}{4} = \frac{11}{4}$. κατὰ δὲ τὸν α' τρόπον $2 + \frac{3}{4} = \frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \frac{2.4}{1.4} + \frac{3.1}{4.1} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Ὁμοίως καὶ ἐν γράμμασιν· $\alpha + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{1} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{1.\delta} + \gamma$.

$$+\frac{\gamma\cdot 1}{\delta\cdot 1}=\frac{\alpha\delta}{\delta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\gamma\cdot}{\delta}\ \text{ἢ}\ \alpha+\frac{\gamma}{\delta}$$

$=\frac{\alpha\,\delta+\gamma}{\delta}$ κατὰ τὸν β' τρόπον·

§. 134. Εἰ δὲ πλείους ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ παρεισιν, ἕκαςος καὶ κλάσμα παρηρτημένον ἔχων, προςεθέντων α' ἐκείνων ἐν μέρει, προσαθροισθήτωσαν εἶτα ἀλλήλοις τὰ κλάσματα. (§. 130.) τὸ δ' ἐκ τούτων ἀναφυὲν καινὸν κλάσμα, γνήσιον ὄν, (§. 118.) προσαρτηθήτω τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὁλοσχερῶν· νόθου δὲ ὄντος, γενέσθω τὸ (§. αὐτ.) ἔνθα ἡ προκύψασα διὰ τῆς διαιρέσεως 1, (ἢ μονάδες) προςεθήτω τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὁλοσχερῶν εἰς ἓν κεφάλαιον· παραδείγματα·

$$1\tfrac{2}{3}+4\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{8}+3\tfrac{5}{6}=1+4+2+3+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{5}{6}=10+\frac{2.2.8.6+3.8.6+3.2.6+5.3.2.8}{3.2.8.6}$$

$$(\S.\ 124.)=10+\frac{192+144+36+240}{288}$$

$=10+\frac{612}{288}=10+2\,\frac{36}{288}=10+2\,\frac{1}{8}=12\,\frac{1}{8}$· κατὰ δὲ τὸ ἐν (§. 133. καὶ σχόλ·) ἔςαι

$$1\tfrac{2}{3}+4\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{8}+3\tfrac{5}{6}=\tfrac{5}{3}+\tfrac{9}{2}+\tfrac{17}{8}+\tfrac{3}{1}+\tfrac{5}{6}=\frac{480+1296+612+864+250}{288}$$

$$(\S.\ 124.\ \S.\ 130.)=\frac{3492}{288}=12\,\frac{36}{288}=12\,\frac{1}{8}\cdot$$

Περὶ τῆς τῶν κλασμάτων ἀφαιρέσεως·

§. 135. Ἤτοι κλάσματα ἐνταῦθα ἀφαιροῦνται ἀπὸ κλασμάτων, ἢ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ ἀπὸ κλασμάτων, ἢ κλάσματα ἀφ' ὁλοσχερῶν, ἢ ὁλοσχερεῖς μετὰ κλασμάτων ἀφ' ὁλοσχερῶν καὶ κλασμάτων, ἢ ὁλοσχερεῖς μόνον ἀφ' ὁλοσχ. καὶ κλ. ἢ ἀνάπαλιν·